

دراسة رياضية و نمذجة رقمية لجريان سائل وحيد

الطور في وسط مسامي أحادي البعد

د.م. مصطفى المصري - م.م. لمى مكاي

جامعة البعث - كلية الهندسة الكيميائية و البترولية - قسم الهندسة البترولية

ملخص:

تعتبر عمليات استثمار المكامن النفطية من أهم مراحل الصناعة النفطية. فالجدوى الاقتصادية للمكمن المستثمر ترتبط بالتخطيط الصحيح و الفهم الدقيق لخصائص المكمن بمكوناته الصخرية و السوائل التي ترتشح ضمن وسطه المسامي. إن التعقيد الذي تتميز به الأوساط المسامية الصخرية الحاملة للمواد الهيدروكربونية، ذات التحولات الطورية المقرونة بظواهر حرارية و فيزيوكيميائية، تجعل من الطرق الكلاسيكية المعتمدة لدراسة المكمن و التخطيط لاستثماره غير دقيقة و غير كافية للتنبؤ بسلوك و أداء المكمن.

بدأ الاعتماد حديثاً على طريقة المحاكاة والنمذجة الرياضية التي تمكننا من التقليل من المخاطر في اتخاذ القرار المتعلق بطريقة الاستثمار الامثل، لتحقيق أفضل جدوى إقتصادية ممكنة. و ذلك من خلال ما توفره هذه الطريقة من قدرة تنبؤية تساعد على فهم أفضل لسلوك و أداء المكمن بشرط توفر المعطيات اللازمة لحل النموذج الرياضي المعايير، بطريقة تحليلية أو رقمية.

نورد في هذا البحث، صياغة نموذج رياضي لمكمن متجانس أحادي البعد يرتشح ضمنه سائل وحيد الطور، و طريقة الحل الرقمي لهذا النموذج الرياضي، و تطبيق النموذج

دراسة رياضية و نمذجة رقمية لجريان سائل وحيد الطور في وسط مسامي أحادي البعد

المصاغ لمحاكاة مكنن بئر حقن و أخرى للإنتاج و آلية توزع الضغط في الطبقة المنتجة بين البئرين.

كلمات مفتاحية: محاكاة، نمذجة، وسط مسامي، جريان وحيد الطور، نموذج أحادي البعد.

Mathematical study and numerical modeling of the single phase fluid flow in the one-dimensional porous media

Summary

The oil reservoirs exploitation processes are one of very important steps of petroleum industry. The rentability of investor reservoir is related to correct planning and accurate understanding of rock properties and liquids flow in porous media. The complexity of porous media contains hydrocarbon materials, with phases changes related to thermo-physiochemical phenomena, make the classical methods used to study the reservoir recovery are inaccurate and insufficient to predict the performance and behavior of reservoir.

Recently, simulation and modeling are used to decrease the risks in the decision of the optimal recovery method, and achieve the best possible rentability. This method provides predictive capacity help us to better understanding of reservoir. By the suitable input data, we can solve the calibrated mathematical model analytically or numerically. We present in this research the formulation of mathematical model of isotropic-one dimension reservoir with single phase fluid flow. The numerical solution, the application of this model, and the mechanism of pressure diffusivity along productive formation, will be presented to simulate a reservoir with injection and production wells..

Key Words: Simulation, Modeling, porous media, Single phase flow, 1D Model.

مقدمة:

تتجلى عملية محاكاة الخزانات النفطية بربط المفاهيم الفيزيائية بالأسس الرياضية لعمليات ارتشاح السوائل الطبقيّة ضمن مسامات و شقوق الطبقة الصخرية الخازنة. ومن خلال استخدام البرمجيات الحاسوبية يتم الحصول على أداة قادرة على التنبؤ بأداء و سلوك الممكن النفطي في شروط عملية مختلفة و تسمى هذه الأداة (Simulator). و تظهر الحاجة لمحاكاة الخزانات النفطية من خلال متطلبات مهندسي المخزون المتزايدة للحصول على تنبؤات دقيقة لأداء مكن المواد الهيدروكربونية تحت ظروف استثمار مختلفة. تتبع هذه الحاجة من حقيقة كون مشاريع استثمار المكامن النفطية (التي تصل رؤوس الأموال فيها إلى مئات ملايين الدولارات) تتضمن مخاطرة في اختيار مخطط التطوير و الاستثمار حيث يجب أن تكون هذه المخاطرة ضمن أصغر الحدود المسموح بها. هناك عوامل عديدة تؤثر على مخطط الاستثمار و نسبة المخاطرة فيه، و هذه العوامل تتضمن الآتي [4]:

- التعقيد الجيولوجي و الليتولوجي للخزان النفطي، بسبب عدم التجانس و عدم التناظر في خواص الصخور المشكلة لهذا الخزان النفطي.
- التغيرات الكبيرة للسوائل الطبقيّة و خواصها على امتداد الطبقات الحاملة لهذه السوائل، و ما يرافقها من تغيرات في النفوذية النسبية.
- صعوبة اختيار آلية الاستثمار المناسبة لإنتاج السوائل الطبقيّة، و تداخلها مع آليات استثمار أخرى يمكن تطبيقها في استثمار المكن المدروس.

يمكن إخضاع هذه العوامل لتحكم وسيطرة مهندس المخزون من خلال محاكاة المكن المدروس، حيث يمكن أخذها بعين الاعتبار من خلال معطيات الإدخال (Input Data)

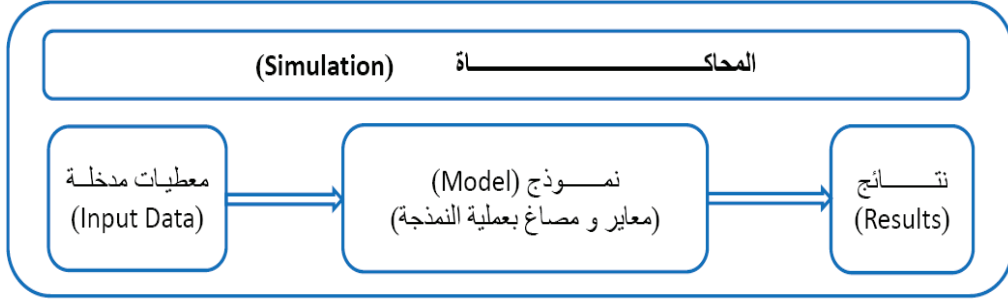
لنموذج المحاكاة المعتمد (Simulation Model)، و مقدره أداة المحاكاة (Simulator) على تطبيق مختلف تقنيات و طرق الاستثمار. إن اختيار آلية الاستثمار المناسبة تعتمد على صحة تفسير النتائج لعملية المحاكاة و هي ترتبط بخبرة فريق العمل الهندسي المنفذ للدراسة.

الهدف من البحث:

يهدف البحث الى صياغة نموذج رياضي، يعبر عن جريان سائل وحيد الطور في وسط مسامي صخري أحادي البعد. ثم تحويل هذا النموذج الرياضي (معادلة تفاضلية جزئية لتغير الضغط بالنسبة للمسافة و الزمن) الى نموذج رقمي باستخدام طريقة الفروق المنتهية.

1. مفهوم النمذجة و المحاكاة: (Simulation and Modeling Concept)

تشير المحاكاة الى العلم الذي يربط بين المفاهيم الفيزيائية و الأسس الرياضية لعملية أو ظاهرة ما، مدعومة بالبرمجة الحاسوبية لتطوير أداة قادرة على التنبؤ بسلوك و أداء هذه الظاهرة تحت ظروف عملية مختلفة. أما النمذجة فهي تمثل عملية صياغة النموذج المناسب لعملية المحاكاة، هذا النموذج الرياضي يصاغ بشكل يمكن حله رقمياً لإعطاء نتائج يمكن تحليلها و الحكم على دقتها من خلال معايرة الموديل.



الشكل (1): الترابط بين النمذجة و المحاكاة.

1.1 . محاكاة الخزانات النفطية:

تتطلب النمذجة الرياضية لظاهرة مدروسة فهم تأثير العوامل المختلفة التي تشكل هذه الظاهرة. يتضمن نظام الخزان النفطي عند محاكاة الخزانات النفطية (Reservoir Simulation): فهم سلوك الصخور الخازنة (الوسط المسامي)، و فهم سلوك السوائل الطبقيّة التي ترتشح ضمن هذا الوسط المسامي و بالتالي فإن الإلمام بخواص هذه الصخور و السوائل و التأثير المتبادل فيما بينها ضرورة ملحة لإجراء عملية محاكاة الخزانات النفطية. و معرفة المفاهيم الأساسية لهندسة المخزون، متمثلة بالآتي: (ظواهر الارتشاح المستقر و غير المستقر، الطاقة الكامنة للسوائل، عدم تجانس و عدم تناظر خواص صخور الوسط المسامي الخازن). و كذلك فإن معرفة القوانين الأساسية (قانون دارسي، قانون حفظ المادة)، ضرورة لنمذجة و محاكاة مشاكل ارتشاح السوائل ضمن الوسط المسامي [3].

من جانب آخر فإن الطرق الرياضية التي تعتمد على طريقة (Finite – Difference) الفروق المنتهية التي تستخدم في مجال محاكاة الخزانات النفطية، يتم تحويلها إلى نماذج رقمية و هذا يتطلب صياغة النموذج الرياضي بشكل معادلات تفاضلية، غالباً ما تكون معادلات تفاضلية جزئية (PDE's) باستخدام مفاهيم و أسس الحساب التفاضلي.

تستخدم طرق التحليل الرقمي لحل المشاكل الرياضية المعقدة، كطريقة الفروق المنتهية المستخدمة لإيجاد حل تقريبي للعلاقة بين التابع و مشتقه في (Discrete Points) نقاط مجزأة، وهذا ما يؤكد الربط بين المفاهيم الفيزيائية (خواص السوائل و الصخور، أسس و مفاهيم هندسة المخزون و قوانينها من قانون دارسي و قانون حفظ الكتلة و ظواهر الارتشاح و الجريان المستقر و غير المستقر و الطاقة الكامنة للسوائل) و الأسس الرياضية (الحساب التفاضلي و التحليل الرقمي).

من خلال ما سبق نستنتج أن محاكاة الخزان النفطي تتكون من عدة خطوات [6]:

1. تحديد هدف الدراسة. تكون الخطوة الأولى لأي عملية محاكاة ناجحة هي وضع مجموعة أهداف واضحة و يمكن تحقيقها، ترتبط هذه الأهداف بمعطيات الإنتاج المتوفرة (Production History).
2. تجميع و تحليل و معالجة المعطيات اللازمة لإجراء عملية المحاكاة، من خلال إدخال هذه المعطيات إلى موديل المحاكاة (Simulation Model) .
3. بناء نموذج الخزان. بعد تحضير المعطيات اللازمة لعملية المحاكاة، حيث يقسم الممكن إلى عدة بلوكات (Grid Blocks). يتم تحديد الخواص الطباقية (كثافة، نفوذية، مسامية، سماكة فعالة .. الخ) لكل خلية من هذه الشبكة. تكون هذه الخواص متجانسة ضمن الخلية الواحدة و تختلف من خلية إلى أخرى حسب الحالة المدروسة، بحيث تكون هذه المعطيات منسوبة بشكل دقيق حسب مقياس شبكة التجزئة المعتمدة.
4. إجراء معايرة لنموذج الخزان (History Matching). حيث يتم إجراء الحسابات اعتماداً على معطيات الإنتاج المتوفرة، و من خلال تفسير النتائج من قبل الجيولوجيين و المهندسين يمكن اعتماد معطيات الإدخال أو تعديلها.

دراسة رياضية و نمذجة رقمية لجريان سائل وحيد الطور في وسط مسامي أحادي البعد

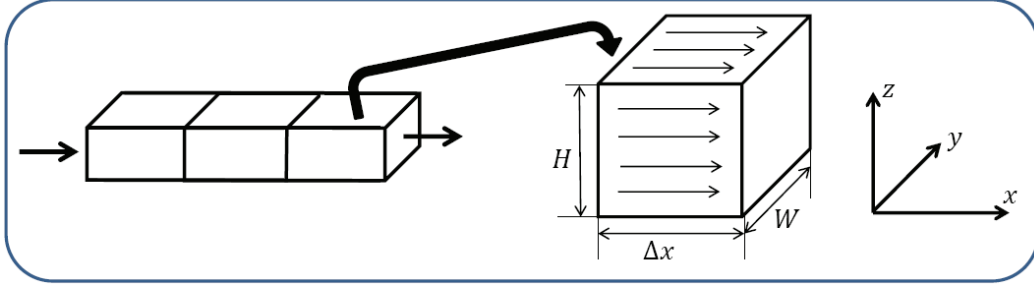
5. إجراء الحسابات التنبؤية (Run Prediction Cases). حيث يتم تقييم مختلف مخططات الإنتاج و تحليل مؤشرات الخزان المختلفة.
6. تحليل و تفسير النتائج.

2. صياغة المعادلات الأساسية للجريان أحادي الطور:

المعادلات الرياضية لجريان سائل أحادي الطور في وسط مسامي، تصف العمليات الفيزيائية التي تعكس العلاقة بين السائل و الوسط المسامي و شروط الجريان المطبقة [2].

1.2. معادلة الاستمرارية (continuity equation):

يمكن تطوير معادلة الاستمرارية من خلال تطبيق معادلة (Mass – Balance) التوازن المادي على العنصر الحجمي المراقب (control volume) الذي يمر السائل من خلاله. يعتمد شكل العنصر الحجمي المراقب على نظام الإحداثيات المستخدم لوصف مشكلة الجريان، و نظام الإحداثيات يجب أن يكون مطابقاً وملائماً لمسارات تساوي الطاقة الكامنة المتعلقة بشكل حدود المكنم الفيزيائية و توزع الخواص على امتداد هذا المكنم. الإحداثيات المستخدمة في النمذجة إما أن تكون إحداثيات ديكارتية، أو أسطوانية، أو كروية. يتعلق اختيار نظام الإحداثيات المناسب بمدى تجانس أو عدم تجانس خواص المكنم، و أشكال جريان السائل من الطبقة باتجاه البئر.



شكل(2): عنصر حجمي مراقب أحادي البعد بشبكة جيومترية مستطيلة بإحداثيات ديكارتية.

إن تحديد العنصر الحجمي المراقب لتطبيق معادلة التوازن المادي يعتبر خطوة ضرورية و أساسية لصياغة قانون الجريان، حيث يجب تحديد خواص السائل و الوسط الصخري المسامي (مسامية ، نفوذية ، كثافة ، لزوجة،...) للعنصر الحجمي و للسائل.

2.2. صياغة النموذج الرياضي:

للتعبير بشكل رياضي عن جريان سائل في وسط مسامي يجب استخدام القوانين التالية:

1- معادلة حفظ المادة (conservation of mass) [2]:

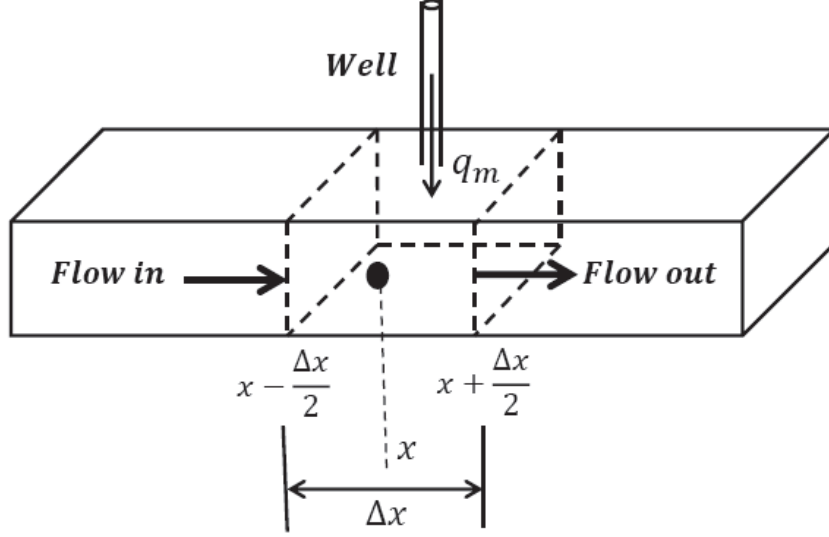
$$(m_i - m_o) + (m_s) = m_{ac} \quad (1)$$

$(m_i = mass\ in)$: كمية السائل الداخلة إلى العنصر الحجمي.

$(m_o = mass\ out)$: كمية السائل الخارجة من العنصر الحجمي.

$(m_{ac} = accumulated\ mass)$: كمية السائل المتراكمة ضمن العنصر الحجمي.

$(m_s = source\ mass)$: كمية السائل الخارجية.



شكل(3): التفاصيل الرياضية للعنصر الحجمي المراقب (أحادي البعد).

2- معادلة الحالة (equation of state) (EOS): و التي تصف تغير كثافة السائل بدلالة الضغط و درجة الحرارة.

$$\rho_l = \rho_{lsc} [1 + C_l(P - P_{sc}) - C_{Tl}(T - T_{sc})] \quad (2)$$

$$\rho_l = \frac{\rho_{lsc}}{B_l}$$

($l: g; o; w$): ماء، نפט، غاز. (C_l): معامل انضغاطية السائل. (C_{Tl}):

معامل التمدد الحراري للسائل. (T_{sc}): درجة الحرارة السطحية. (T): درجة

الحرارة الطبقيّة. (P_{sc}): الضغط بالشروط السطحية. (P): الضغط الطبقي.

(B_l) معامل حجم السائل. (ρ_l, ρ_{lsc}): كثافة السائل بالشروط السطحية و

الطبقيّة على التوالي.

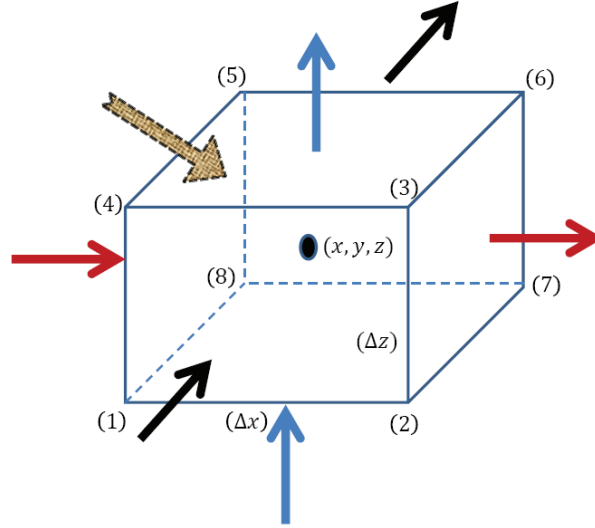
3- قانون دارسي الذي يمثل المعادلة الأساسية و يصف سرعة دخول السائل إلى
العنصر الحجمي المراقب [1]:

$$\begin{aligned} u_x &= \frac{q}{A_x} \\ &= \frac{K_x dP}{\mu dx} \end{aligned} \quad (3)$$

(u_x) : سرعة جريان السائل بالاتجاه (x) .
المسامي. (μ) : لزوجة السائل.
طول الوسط المسامي.
 (K_x) : نفوذية الوسط.
 $(\frac{dP}{dx})$: تدرج الضغط على

3.2. الشكل التفاضلي لمعادلة الجريان:

في كثير من الدراسات يتم اعتماد عدة أشكال للعنصر الحجمي المراقب عند جريان السائل في الوسط الخازن، تختلف هذه الأشكال حسب الأبعاد $(1D, 2D, 3D)$ ، وحسب نوع الإحداثيات (ديكارتية، إسطوانية، كروية). من منطلق إيجاد النموذج الرياضي (بشكله التفاضلي الجزئي) لجريان السائل أحادي الطور، اعتمدنا العنصر الحجمي للمراقبة الموضح بالشكل (4)، لإيجاد هذا النموذج (الموديل) بالإحداثيات الديكارتية (x, y, z) [5].



شكل(4): التفاصيل الرياضية للعنصر الحجمي المراقب أحادي البعد (إحداثيات ديكارتية).

من معادلة التوازن المادي (1)، ومن كون جداء الكثافة (ρ) بمعدل الجريان (q) يعطي كمية السائل الداخلة أو الخارجة من العنصر الحجمي في واحدة الزمن نجد:

$$\left[q \left(\frac{L^3}{t} \right) \right] \times \left[\rho \left(\frac{m}{L^3} \right) \right] = \left[W \left(\frac{m}{t} \right) \right] \quad (4)$$

من خلال ملاحظة الشكل (3)، كمية السائل ($q_m \left(\frac{m}{t} \right)$) يمكن أن تكون موجبة في حالة الحقن أو سالبة في حالة الإنتاج، و هذا ينعكس بإشارة موجبة رياضياً لكمية السائل الداخل إلى العنصر الحجمي المراقب في حالة الحقن و بإشارة سالبة في حالة الإنتاج. يمكن إعادة كتابة المعادلة (1) خلال مجال زمني محدد (Δt) كما يلي:

$$\begin{aligned} & \left[(W)_{x-\frac{\Delta x}{2}} \Delta t + (W)_{y-\frac{\Delta y}{2}} \Delta t + (W)_{z-\frac{\Delta z}{2}} \Delta t \right] - \\ & \left[(W)_{x+\frac{\Delta x}{2}} \Delta t + (W)_{y+\frac{\Delta y}{2}} \Delta t + (W)_{z+\frac{\Delta z}{2}} \Delta t \right] + q_m \Delta t = \\ & [(\phi. \Delta x. \Delta y. \Delta z. \rho)_{t+\Delta t} - \\ & (\phi. \Delta x. \Delta y. \Delta z. \rho)_t] \end{aligned} \quad (5)$$

(ϕ): مسامية الصخر (%).

باعتقاد التعريف التالي للتدفق المادي: $\dot{m} \left(\frac{m}{L^2 t} \right)$: mass flux

$$\begin{aligned} W_x &= \dot{m}_x \Delta y \Delta z \\ &= \dot{m}_x A_x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W_y &= \dot{m}_y \Delta x \Delta z \\ &= \dot{m}_y A_y \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} W_z &= \dot{m}_z \Delta x \Delta y \\ &= \dot{m}_z A_z \end{aligned}$$

و يمكن التعبير عن التدفق الكتلي بدلالة الكثافة و السرعة كما يلي:

$$\begin{aligned} \dot{m}_{x,y,z} \\ &= \rho u_{x,y,z} \end{aligned} \quad (7)$$

و بالتالي تصبح مجموعة المعادلات (6) كما يلي:

$$W_x \\ = \rho u_x A_x$$

$$W_y \\ = \rho u_y A_y \quad (8)$$

$$W_z \\ = \rho u_z A_z$$

بتعويض مجموعة المعادلات (8) في (5) نجد:

$$\begin{aligned} & - \left[(\rho u_x A_x)_{x+\frac{\Delta x}{2}} - (\rho u_x A_x)_{x-\frac{\Delta x}{2}} + (\rho u_y A_y)_{y+\frac{\Delta y}{2}} \right. \\ & \left. - (\rho u_y A_y)_{y-\frac{\Delta y}{2}} + (\rho u_z A_z)_{z+\frac{\Delta z}{2}} - (\rho u_z A_z)_{z-\frac{\Delta z}{2}} \right] + q_m \\ & = \frac{1}{\Delta t} [(\phi \cdot \Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z \cdot \rho)_{t+\Delta t} \\ & - (\phi \cdot \Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z \cdot \rho)_t] \quad (9) \end{aligned}$$

بتقسيم المعادلة (9) على حجم العنصر الحجمي المراقب ($V_b = \Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z$)

نجد:

$$\begin{aligned}
 & - \left[\frac{(\rho u_x)_{x+\frac{\Delta x}{2}} - (\rho u_x)_{x-\frac{\Delta x}{2}}}{\Delta x} \right] - \left[\frac{(\rho u_y)_{y+\frac{\Delta y}{2}} - (\rho u_y)_{y-\frac{\Delta y}{2}}}{\Delta y} \right] \\
 & - \left[\frac{(\rho u_z)_{z+\frac{\Delta z}{2}} - (\rho u_z)_{z-\frac{\Delta z}{2}}}{\Delta z} \right] + \frac{q_m}{V_b} \\
 & = \frac{(\phi \rho)_{t+\Delta t} - (\phi \rho)_t}{\Delta t} \tag{10}
 \end{aligned}$$

بأخذ النهايات الحدية المتزامنة و المترابطة مكانياً (تقلص العنصر الحجمي في لحظة ما إلى اللانهاية):

$$\begin{aligned}
 & \lim_{\Delta x; \Delta y; \Delta z; \Delta t \rightarrow 0} [..] \\
 & = \lim_{\Delta x; \Delta y; \Delta z; \Delta t \rightarrow 0} \left[\frac{(\phi \rho)_{t+\Delta t} - (\phi \rho)_t}{\Delta t} \right] \tag{11}
 \end{aligned}$$

حيث:

$$\begin{aligned}
 [..] = & - \left[\frac{(\rho u_x)_{x+\frac{\Delta x}{2}} - (\rho u_x)_{x-\frac{\Delta x}{2}}}{\Delta x} \right] \\
 & - \left[\frac{(\rho u_y)_{y+\frac{\Delta y}{2}} - (\rho u_y)_{y-\frac{\Delta y}{2}}}{\Delta y} \right] \\
 & - \left[\frac{(\rho u_z)_{z+\frac{\Delta z}{2}} - (\rho u_z)_{z-\frac{\Delta z}{2}}}{\Delta z} \right] + \frac{q_m}{V_b}
 \end{aligned}$$

دراسة رياضية و نمذجة رقمية لجريان سائل وحيد الطور في وسط مسامي أحادي البعد

باستخدام مفهوم المشتق الجزئي من الدرجة الأولى بالنسبة للإحداثيات البعدية (x, y, z) و الزمنية (t) [6] وفق العلاقة:

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{f(s+\frac{\Delta s}{2})-f(s-\frac{\Delta s}{2})}{\Delta s} ; \frac{\partial f}{\partial t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(t+\Delta t)-f(t)}{\Delta t} \quad (12)$$

و بتطبيقه في المعادلة (11) نجد:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial}{\partial x} (\rho u_x) - \frac{\partial}{\partial y} (\rho u_y) - \frac{\partial}{\partial z} (\rho u_z) + \frac{q_m}{V_b} \\ = \frac{\partial}{\partial t} (\rho \phi) \end{aligned} \quad (13)$$

بضرب المعادلة (13) ب (V_b) نجد:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial}{\partial x} (\rho u_x A_x) \Delta x - \frac{\partial}{\partial y} (\rho u_y A_y) \Delta y - \frac{\partial}{\partial z} (\rho u_z A_z) \Delta z + q_m \\ = V_b \frac{\partial}{\partial t} (\rho \phi) \end{aligned} \quad (14)$$

يتجلى الفرق بين المعادلة (13) و (14) يكون المعادلة (14) تظهر مقطع الجريان العرضي (A) العمودي على اتجاه جريان (ارتشاح) السائل. و بذلك تكون المعادلة (14) الممثلة لمعادلة الاستمرارية تمثل النموذج (الموديل) الرياضي لجريان سائل في وسط مسامي ثلاثي الأبعاد (3D) مصاغ على شكل معادلة تفاضلية جزئية (PDE's).

بإدخال معادلة الحالة (2) بشكلها المبسط حيث: ($B = sc/\rho$). حيث (B) يمثل

نتاج قسمة حجم السائل في الشروط الطباقية إلى حجمه في الشروط السطحية، و إدخال

قانون دارسي المعادلة (3) الذي يعبر عن سرعة ارتشاح السائل عبر مقطع عرضي بتأثير فرق الضغط، باستخدام مفهوم التدفق الكتلي الذي يكتب بدلالة التدفق الحجمي:

$$q_m = q_{sc} \rho_{sc} \quad (15)$$

بتعويض (2، 3، 15) في (14) للحصول على المعادلة (16):

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{A_x K_x}{\mu B} \frac{\partial P}{\partial x} \right) \Delta x + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{A_y K_y}{\mu B} \frac{\partial P}{\partial y} \right) \Delta y + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{A_z K_z}{\mu B} \frac{\partial P}{\partial z} \right) \Delta z \\ & + q_{sc} \\ & = V_b \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\phi}{B} \right) \end{aligned} \quad (16)$$

نناقش أشكال الجريان حسب الموديل الرياضي المصاغ حسب المعادلة (16):

- سائل غير قابل للانضغاط (**incompressible –fluid flow model**):

هذا يعني أن كثافة السائل ثابتة أي ($B = Const$) و بإهمال التأثير الحراري و بثبات اللزوجة، يصبح الطرف الأيمن للمعادلة (16) مساوياً للصفر:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x} \left(A_x K_x \frac{\partial P}{\partial x} \right) \Delta x + \mu q_{sc} \\ & = 0 \end{aligned} \quad (17)$$

هذا يكافئ:

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\mu q_{sc}}{K_x V_b} = 0 \xrightarrow{q_{sc}=0} \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} = 0$$

- نموذج جريان سائل قليل الانضغاطية: (Slightly-compressible) [5]:

$$B = B^0 / [1 + C_l (P - P^0)] \quad (18)$$

حيث (C_l) : معامل انضغاطية السائل (Fluid Compressibility).

و بفرض الوسط المسامي غير قابل للانضغاط، نكون الطرف الأيمن من المعادلة (16):

$$\begin{aligned} V_b \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\phi}{B} \right) &= V_b \phi \frac{\partial}{\partial t} \left(\left[\frac{1 + C_l (P - P^0)}{B^0} \right] \right) \\ &= \frac{V_b \phi C_l}{B^0} \frac{\partial P}{\partial t} \end{aligned} \quad (19)$$

و بالتعويض في المعادلة (16) لجريان في وسط أحادي البعد نحصل على العلاقة التالية:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{A_x}{\mu} \cdot \frac{K_x}{B} \cdot \frac{\partial P}{\partial x} \right) \Delta x + q_{sc} \\ = \frac{V_b \phi C_l}{B^0} \frac{\partial P}{\partial t} \end{aligned} \quad (20)$$

بما أن (C_l) صغير جداً: $1 + C_l (P - P^0) \approx 1$; $B = B^0$

بالتعويض في (20) نحصل على النموذج الرياضي لجريان سائل وحيد الطور قليل الانضغاطية في وسط مسامي غير متجانس و غير متناظر.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(A_x K_x \frac{\partial P}{\partial x} \right) \Delta x + B^\circ \mu q_{sc} \\ = V_b \phi C_l \mu \frac{\partial p}{\partial t} \end{aligned} \quad (21)$$

في حال الوسط متجانس و متناظر يكون لدينا:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{B^\circ \mu}{V_b K_x} q_{sc} \\ = \frac{\phi \mu C_l}{K_x} \frac{\partial P}{\partial t} \end{aligned} \quad (22)$$

• حالة جريان سائل وحيد الطور قليل الانضغاط في وسط مسامي قابل للانضغاط :

من النموذج (16): نكتب النموذج الرياضي لجريان سائل وحيد الطور في وسط مسامي أحادي البعد:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{A_x K_x}{\mu B} \frac{\partial P}{\partial x} \right) \Delta x + q_{sc} \\ = V_b \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\phi}{B} \right) \end{aligned} \quad (23)$$

كون السائل قليل الانضغاطية (ليس غازاً)، باستخدام نفس الافتراضات المتبعة للحصول على المعادلة (21)، نجد:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(A_x K_x \frac{\partial P}{\partial x} \right) \Delta x + B^\circ \mu q_{sc} \\ = V_b \phi C_t \mu \frac{\partial P}{\partial t} \end{aligned} \quad (24)$$

$$C_t = C_l + C_R \frac{\phi^\circ}{\phi} \quad : [1,5] \text{ (} C_t \text{) الكلي معامل الانضغاطية}$$

علاقة المسامية بانضغاطية الصخر (C_R):

$$\phi = \phi^\circ [1 + C_R(P - P^\circ)] \quad , \quad \frac{\partial \phi}{\partial P} = \phi^\circ C_R \quad , \quad \frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{\partial \phi}{\partial P} \frac{\partial P}{\partial t}$$

وبالتالي يصبح النموذج الرياضي في هذه الحالة:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{B^\circ \mu}{V_b K_x} q_{sc} \\ = \frac{\phi \mu C_t}{K_x} \frac{\partial P}{\partial t} \end{aligned} \quad (25)$$

3. الطرق الرقمية:

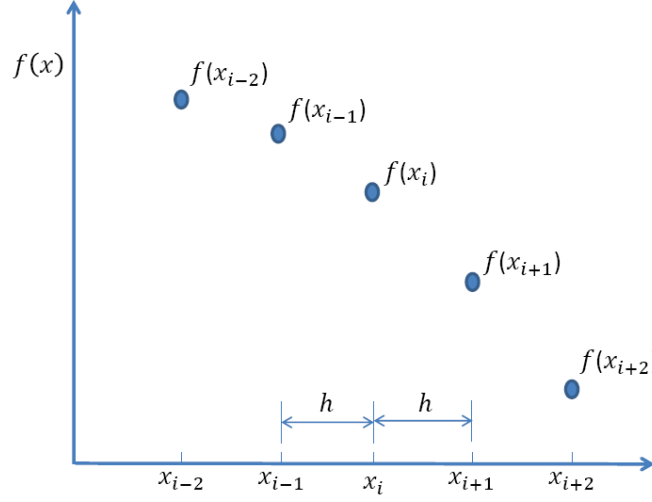
النموذج الرقمي يتضمن حل المعادلات التفاضلية الجزئية (الموديل الرياضي) التي تصف السلوك الفيزيائي للظاهرة المدروسة. بالرجوع إلى الموديل الرياضي لجريان سائل وحيد الطور قليل الانضغاط في وسط مسامي أحادي البعد ($1D$) المصاغ بالمعادلة (20) يتبين أنه عبارة عن معادلة تفاضلية جزئية من الدرجة الثانية بالنسبة للمسافة و من الدرجة الأولى بالنسبة للزمن. و من الصعوبة بمكان إيجاد حل تحليلي

(analytical) دقيق كون الشروط الحدية و البدائية التي تستخدم تكون غالباً غير دقيقة أو غير متوفرة.

يمكن استخدام الطرق الرقمية التقريبية (approximate)، الطريقة الأكثر شيوعاً في مجال هندسة الخزانات النفطية هي طريقة الفروق المنتهية (finite – difference method) التي تستخدم لتقريب المشتقات و حسابها [3].

1.3. مفهوم الفروق المنتهية:

تتميز تطبيقات هندسة المخزون النفطي، بظواهر ذات طبيعة مجزأة أي أن قيم توابع النماذج الرياضية تكون معروفة فقط عند نقاط معينة حيث أنه من خلال القياسات الحقلية تتم قياسات لمؤشرات معينة في نقاط معينة خلال فترات زمنية محددة. و بالتالي فإن هذه المؤشرات تكون معروفة فقط في لحظة ما و مكان محدد (لحظة و مكان القياس). في العديد من التطبيقات نحتاج لمعرفة قيم مشتقات التوابع لحل المشكلة المدروسة حيث تكون قيم التوابع وحدها غير كافية. إن طريقة الفروق المنتهية تمكننا من حساب تقريبي للمشتقات و توابعها عند نقاط محددة. كما هو واضح في الشكل (5) [6].



الشكل (5) النقاط المجزأة المستخدمة في تقريب الفروق المنتهية.

يعطى الفرق المنتهي المتقدم (forward) بالعلاقة التالية:

$$\Delta f(x_i) = f(x_{i+1}) - f(x_i) \quad (26)$$

و الفرق المنتهي المتراجع (backward) بالعلاقة:

$$\nabla f(x_i) = f(x_i) - f(x_{i-1}) \quad (27)$$

و الفرق المنتهي المركزي (central) بالعلاقة:

$$\delta f(x_i) = f(x_{i+1}) - f(x_{i-1}) \quad (28)$$

مجلة جامعة البعث – المجلد 36 – العدد 3 - 2014 د.م. مصطفى المصري م. لى مكاي
 ترتبط معاملات الفروق المنتهية للنقاط المجزأة بمعاملات المشتقات للتتابع المستمرة
 حسب سلسلة تايلور:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{(x - x_0)}{1!} \frac{df}{dx} + \frac{(x - x_0)^2}{2!} \frac{d^2f}{dx^2} + \dots \quad (29)$$

بشكل عام، يمكن صياغة سلسلة تايلور بالشكل التالي:

$$f(x) = f(x_0) + \sum_{i=1}^n \frac{(x - x_0)^i}{i!} \frac{d^i f}{dx^i} \quad (30)$$

يحسب المشتق الأول كما يلي:

$$n = 1 \Rightarrow f(x) = f(x_0) + (x - x_0) \frac{df}{dx} \Rightarrow \frac{df}{dx} = \frac{f(x) - f(x_0)}{(x - x_0)}$$

حسب الشكل (5)، نلاحظ أن: $(x - x_0) = h$.

$$\frac{df}{dx} = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{(x_{i+1} - x_i)} = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h} \quad (31)$$

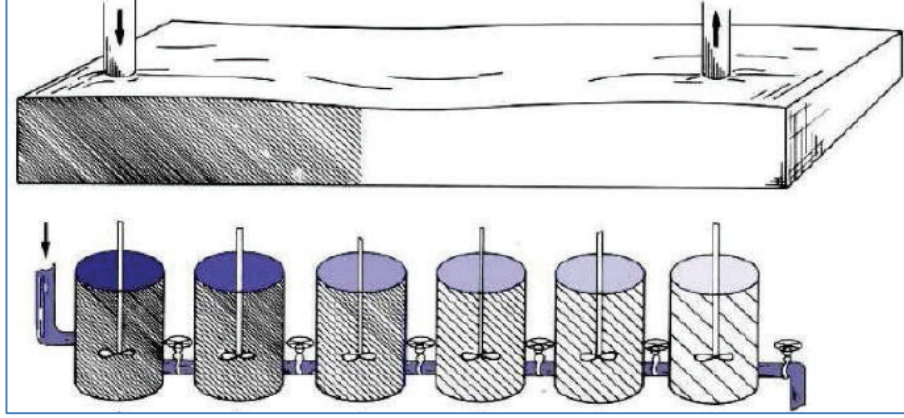
بالمقارنة بين (31) و مفهوم الفروق المنتهية (26) و (27)، نحصل على علاقة رياضية يتم من خلالها ايجاد قيمة المشتق بدلالة الفروق المنتهية.

$$\begin{aligned}\frac{df}{dx} &= \frac{\Delta f(x_i)}{h} \\ &= \frac{\nabla f(x_i)}{h}\end{aligned}\quad (32)$$

2.3. النموذج الرقمي : أول خطوة لصياغة النموذج الرقمي تتضمن إجراء عملية التجزئة باستخدام طريقة الفروق المنتهية، و بما أن دراستنا تتضمن جريان سائل وحيد الطور في وسط مسامي أحادي البعد فإن اختيار شبكة التجزئة أحادية البعد بالإحداثيات الديكارتية ذات النقاط المركزية يناسب الموديل الرياضي المستنتج في المعادلة (20).

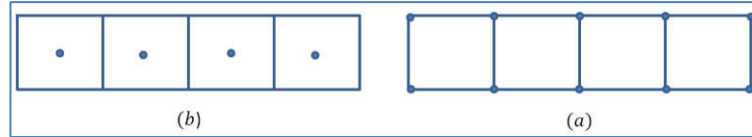
• أنماط شبكات التجزئة المستخدمة في محاكاة الخزانات النفطية (**Grid block**):

يعتبر الممكن مكون من (Discrete Volume Elements) عدة عناصر حجمية مجزأة، و بالتالي يتم حساب التغيرات لكل عنصر حجمي خلال (Dscribe time intervals) مجالات زمنية مجزأة. العناصر الحجمية تمثل ال (Grid blocks) و المجالات الزمنية تسمى (Timesteps). إن تجزئة الممكن هي حالة تصويرية تجريدية، لكن من الناحية النوعية يمكن أن تمثل كل خلية بلوك (block) خزان بجوانب نفوذة، لاستمداد هذا التمثيل يتم إظهار المحتوى بشكل متجانس ضمن كل خلية (بلوك)، ومعدل التدفق من خلية إلى أخرى محكوم بفرق الضغط بين الخلايا المتجاورة، هذا ما يمكن تمثيله في الشكل (6) [6].



الشكل (6) الممكن المجزأ.

يمثل الشكل (7، a) شبكة تجزئة ذات (نقاط زاوية) (Corner Point Grid block)، حيث تكون قيم المؤشرات المدروسة محسوبة عند زوايا الخلية (البلوك). بينما يمثل الشكل (7، b) شبكة تجزئة ذات (نقاط مركزية) (Central Point Grid block)، حيث تكون قيم المؤشرات المدروسة محسوبة في مركز الخلية (البلوك).

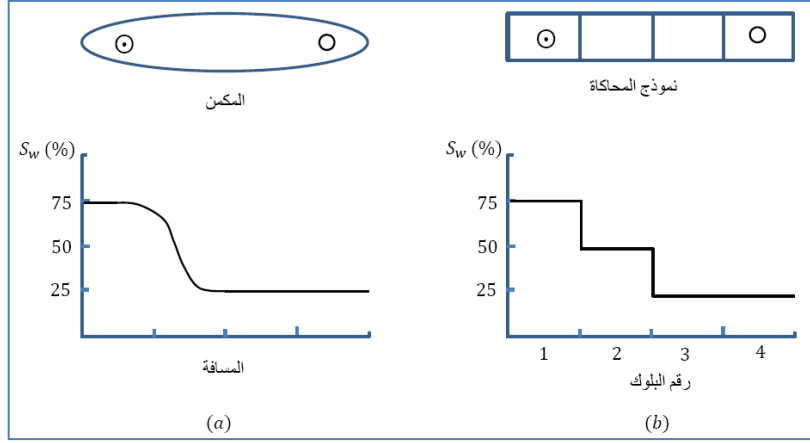


الشكل (7): أنماط شبكة تجزئة الممكن النفطي.

يكون الحل الرقمي بطريقة الفروق المنتهية مجزأ، أي القيم تحسب عند نقاط التجزئة فقط. لإظهار نتائج تجزئة الخزان، نستعرض نموذج لخزان بأربع بلوكات، بيثرين (حقن - انتاج) لمحاكاة عملية الغمر المائي. الشكل (8) يظهر الممكن المجزأ و توزيع درجة التشبع (S_w) في مرحلة مبكرة من الغمر المائي، و مقارنة هذا التوزيع بإجابة برنامج

دراسة رياضية و نمذجة رقمية لجريان سائل وحيد الطور في وسط مسامي أحادي البعد

المحاكاة. لاحظ ان درجة تشبع المكمن تابع مستمر بالنسبة للمسافة. بينما في النموذج نلاحظ تغير حاد لدرجة التشبع بين البلوكات المعنية.



الشكل (8): مقارنة بين الحل المستمر و الحل المجزأ.

3.3. صياغة النموذج الرقمي:

تمثل المعادلة (20) النموذج الرياضي لجريان سائل وحيد الطور في وسط مسامي أحادي البعد غير قابل للانضغاط. باستخدام تقريب الفرق المنتهي المركزي للمشتق الأول:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{A_x}{\mu_l} \frac{K_x}{B_l} \frac{\partial P}{\partial x} \right)_i \\ \cong \frac{1}{\Delta x_i} \left[\left(\frac{A_x}{\mu_l} \frac{K_x}{B_l} \frac{\partial P}{\partial x} \right)_{i+1/2} - \left(\frac{A_x}{\mu_l} \frac{K_x}{B_l} \frac{\partial P}{\partial x} \right)_{i-1/2} \right] \quad (33) \end{aligned}$$

نلاحظ هنا أن المساواة تقريبية، باستخدام المعادلة (33) لتقريب المشتق عند النقطة (i) من شبكة التجزئة للنموذج (20):

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Delta x_i} \left[\left(\frac{A_x}{\mu_l} \frac{K_x}{B_l} \frac{\partial P}{\partial x} \right)_{i+1/2} - \left(\frac{A_x}{\mu_l} \frac{K_x}{B_l} \frac{\partial P}{\partial x} \right)_{i-1/2} \right] \Delta x_i + q_{lsc} \\ & = \left(\frac{V_b \phi C_l}{B_l^\circ} \frac{\partial P}{\partial t} \right)_i \end{aligned} \quad (34)$$

مع العلم أن:

$$\left(\frac{A_x}{\mu_l} \frac{K_x}{B_l} \frac{\partial P}{\partial x} \right)_{i+1/2} = \left(\frac{A_x}{\mu_l} \frac{K_x}{B_l} \right)_{i+1/2} \left(\frac{\partial P}{\partial x} \right)_{i+1/2}$$

باستخدام الفرق المنتهي المركزي مرة أخرى نجد:

$$\left(\frac{\partial P}{\partial x} \right)_{i+1/2} = \frac{P_{i+1} - P_i}{x_{i+1} - x_i} = \frac{P_{i+1} - P_i}{\Delta x_{i+1/2}}$$

$$\left(\frac{\partial P}{\partial x} \right)_{i-1/2} = \frac{P_i - P_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} = \frac{P_i - P_{i-1}}{\Delta x_{i-1/2}}$$

بالتعويض في (34) نجد:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{A_x K_x}{\mu_l B_l \Delta x} \right)_{i+1/2} (P_{i+1} - P_i) - \left(\frac{A_x K_x}{\mu_l B_l \Delta x} \right)_{i-1/2} (P_i - P_{i-1}) \\ & + q_{lsc} \\ & = \left(\frac{V_b \phi C_l}{B_l^\circ} \right)_i \frac{\partial P_i}{\partial t} \end{aligned} \quad (35)$$

و بالتبسيط تصبح المعادلة (35) كما يلي:

$$T_{lx_{i+1/2}}(P_{i+1} - P_i) - T_{lx_{i-1/2}}(P_i - P_{i-1}) + q_{lsc} \\ = \left(\frac{V_b \phi C_l}{B^o_l} \right)_i \frac{\partial P_i}{\partial t}$$

(Porous medium Transmissibility) $(T_{lx_{i-1/2}})$ و $(T_{lx_{i+1/2}})$ تشير الى ناقلية الوسط المسامي و هي احدى خواص الوسط المسامي التي تعبر عن جريان السائل (l) بالاتجاه (x) في المواضع $(i + 1/2)$ و $(i - 1/2)$. من أجل شبكة تجزئة متجانسة بنقاط تجزئة مركزية، المسافة بين نقاط الشبكة تكون متساوية و تكافئ (block dimension) طول البلوك (Δx) . حيث:

$$\Delta x_{i+1/2} = \Delta x_{i-1/2} = \Delta x_i = \Delta x$$

إن حل النموذج الرقمي المتمثل بالمعادلة (35) بالنسبة ل (P_i) ، يفترض أن تكون قيم (P_{i+1}, P_{i-1}) معلومة. فهذا النموذج يجب تطبيقه على كل بلوك من موديل الخزان، و بالنتيجة نحصل على قيم الضغط الرقمية التقريبية كحل للنموذج الرياضي المتمثل بالمعادلة (20) مع الأخذ بعين الإعتبار البلوكات عند حدود الخزان. حيث أن الناقلية تعبر عن قيمة وسطية للبلوكات المتجاورة. القيم (K_x, x) تعتبر ثابتة أو متغيرة حسب طبيعة المكنن المدروس.

أما مشتق الضغط بالنسبة للزمن نحدده باستخدام تقريب الفرق المنتهي المتقدم كما يلي:

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \frac{P(t^{n+1}) - P(t^n)}{\Delta t}$$

بفرض: $P^n = P(t^n)$ ، $P^{n+1} = P(t^{n+1})$. نجد:

$$\frac{\partial P_i}{\partial t} = \frac{P_i^{n+1} - P_i^n}{\Delta t}$$

وبالتالي النموذج (35) يصبح كما يلي بالنسبة لمستوى الزمن (t^{n+1}) :

$$\begin{aligned} & \left(\frac{A_x K_x}{\mu_l B_l \Delta x} \right)_{i+1/2} (P_{i+1}^{n+1} - P_i^{n+1}) \\ & - \left(\frac{A_x K_x}{\mu_l B_l \Delta x} \right)_{i-1/2} (P_i^{n+1} - P_{i-1}^{n+1}) + q_{lsc i} \\ & = \left(\frac{V_b \phi C_l}{B_l^o \Delta t} \right)_i (P_i^{n+1} - P_i^n) \end{aligned} \quad (36)$$

و بالتبسيط يصبح النموذج (36) كما يلي:

$$\begin{aligned} & T_{lx_{i+1/2}} (P_{i+1}^{n+1} - P_i^{n+1}) - T_{lx_{i-1/2}} (P_i^{n+1} - P_{i-1}^{n+1}) + q_{lsc i} \\ & = \left(\frac{V_b \phi C_l}{B_l^o \Delta t} \right)_i (P_i^{n+1} \\ & - P_i^n) \end{aligned} \quad (37)$$

نلاحظ من النموذج (37)، أن الطرف الأيسر يحتوي قيم الضغوط عند مستوى الزمن (t^{n+1}) . و هي قيم غير معلومة و بالتالي سوف نحصل على مجموعة معادلات جبرية غير خطية لحل هذا الموديل الرقمي بسبب اعتماد قيم (μ_l, B_l) على قيمة الضغط. و هنا يتم الحل بشكل ضمني (Implicite) و يجب استخدام طرق التحويل الخطي (Linearization) لتحويل جملة المعادلات الجبرية غير الخطية إلى معادلات خطية، و

دراسة رياضية و نمذجة رقمية لجريان سائل وحيد الطور في وسط مسامي أحادي البعد

بالتالي تزداد نسبة الأخطاء المرتكبة. لذلك سوف نعتمد طريقة الحل الصريح (Explicite) حيث نستخدم الفرق المنتهي المتقدم في تقريب المشتق الزمني و بذلك يأخذ النموذج (36) الشكل التالي:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{A_x K_x}{\mu_l B_l \Delta x} \right)_{i+1/2} (P_{i+1}^n - P_i^n) - \left(\frac{A_x K_x}{\mu_l B_l \Delta x} \right)_{i-1/2} (P_i^n - P_{i-1}^n) \\ & + q_{lsc i} \\ & = \left(\frac{V_b \phi C_l}{B_l^o \Delta t} \right)_i (P_i^{n+1} - P_i^n) \end{aligned} \quad (38)$$

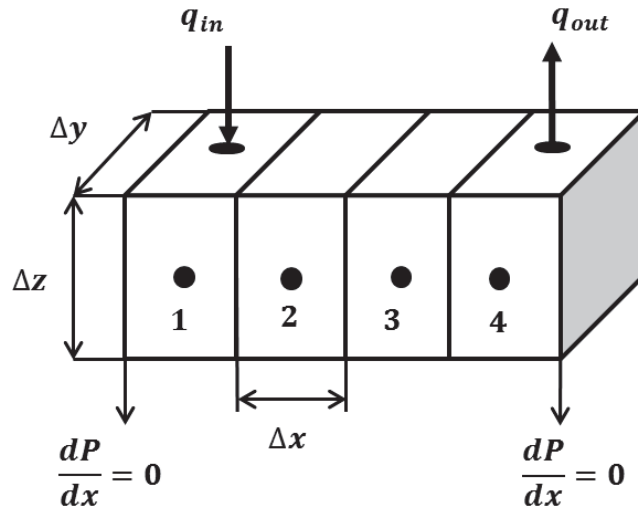
و بالتبسيط يصبح النموذج (38) كما يلي:

$$\begin{aligned} & T_{lx_{i+1/2}} (P_{i+1}^n - P_i^n) - T_{lx_{i-1/2}} (P_i^n - P_{i-1}^n) + q_{lsc i} \\ & = \left(\frac{V_b \phi C_l}{B_l^o \Delta t} \right)_i (P_i^{n+1} - P_i^n) \end{aligned} \quad (39)$$

في النموذج الرقمي (39)، كل القيم معلومة بالنسبة للضغط عند المستوى الزمني (t^n) والمجهول الوحيد هو (P_i^{n+1}) ، وبعد ذلك يتم تضمين هذا الموديل الشروط الحدية والبدائية لحل هذا النموذج الرقمي كما يوضح التطبيق التالي.

4. دراسة الإمكانية التطبيقية للنموذج المدروس:

لتوضيح قدرة النموذج الذي توصلنا إليه، نقوم باستخدامه لمحاكاة المكنن (لدراسة توزيع الضغط في المكنن المدروس بخطوة زمنية (Δt)). تم اعتماد شبكة التجزئة أحادية البعد (1D)، كما في الشكل (9):



الشكل (9) نموذج المكنن المدروس.

نكتب النموذج الرقمي المصاغ بالشكل الصريح (Explicit) المتمثل بالمعادلة (39) بالشكل:

$$P_i^{n+1} = P_i^n + \left(\frac{\Delta t}{V_b \phi C} \right)_i q_{lsci} + \left(\frac{\Delta t}{V_b \phi C} \right)_i \left[T_{x_{i+\frac{1}{2}}} P_{i+1}^n - \left(T_{x_{i+\frac{1}{2}}} + T_{x_{i-\frac{1}{2}}} \right) P_i^n + T_{x_{i-\frac{1}{2}}} P_{i-1}^n \right]$$

$$B = B^0 = \epsilon, \quad T_{i+\frac{1}{2}} = \left(\frac{A_x K_x}{\mu \Delta x} \right)_{i+1/2}, \quad T_{x_{i-\frac{1}{2}}} = \left(\frac{A_x K_x}{\mu \Delta x} \right)_{i-1/2} \quad \text{حيث:}$$

1

المعطيات اللازمة لمحاكاة المكنن المدروس و الموضحة بالجدول (1):

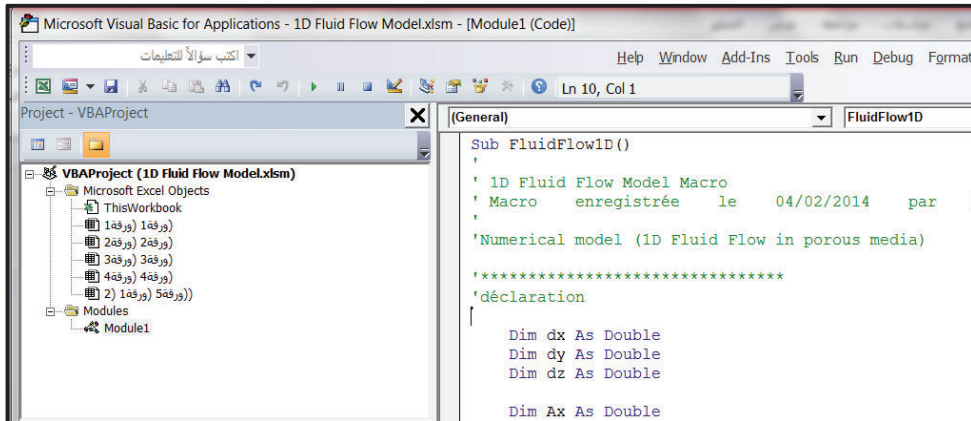
$(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$: أبعاد المكنن مقدرة بالقدم.
 (K_x) : نفوذية المكنن بالميلي دارسي.
 (ϕ) : المسامية.
 (μ) : لزوجة السائل المشبع به المكنن بالسنتي بواز. (C): معامل انضغاطية السائل الطبقي.
 (Δt) : الخطوة الزمنية لحساب تغير الضغط.
 (q_{out}, q_{in}) : كمية السائل المحقونة و المنتجة مقدرة بالبرميل خلال يوم.
 $(P_{initial})$: الضغط البدائي للمكنن (ممثلاً للشروط البدائية).

μ (CP)	K_x (mD)	ϕ	C (1 /PSI)	Δx (ft)	Δy (ft)	Δz (ft)
15	50	0.2	5×10^{-6}	800	800	100

$P_{initial}$ (PSI)	q_{in} (STB/Day)	q_{out} (STB/Day)	Δt (Day)
8000	150	200	15

الجدول (1) مواصفات المكنن المدروس.

نلاحظ من الشكل (9) الشبكة الجيومترية للمكمن المدروس حيث تمت تجزئته الى (4) بلوكات، حيث سيتم حساب قيم الضغط في مركز كل بلوك (Central points). كما نلاحظ أن بئر الحقن تقع في البلوك الأولى (1) بينما البئر المنتجة تقع في البلوك رقم (4). و الشروط الحدية التي تظهر ثبات الضغط عند حدود المكمن $(\frac{dP}{dx} = 0)$. لتسهيل و دقة الحل قمنا ببرمجة النموذج الرقمي وفق ما يتناسب مع شبكة التجزئة المفترضة للمكمن المدروس باستخدام (Microsoft Visual Basic) كما في الشكل (10).



```
Sub FluidFlow1D()  
' 1D Fluid Flow Model Macro  
' Macro enregistrée le 04/02/2014 par  
'  
' Numerical model (1D Fluid Flow in porous media)  
'  
'*****  
'déclaration  
'  
    Dim dx As Double  
    Dim dy As Double  
    Dim dz As Double  
  
    Dim Ax As Double
```

الشكل (10) تطبيق 1D Fluid Flow Model.

و قمنا ببرمجة معطيات الادخال (Input Data) حسب ما تظهره صفحة ادخال المعطيات، الشكل (11)، حيث تم تقسيم المعطيات الى ست مجموعات:

1. معطيات تتعلق بأبعاد المكمن، لحساب مساحة مقطع الارتشاح و حجم الوسط الصخري.
2. معطيات تتعلق بخواص الصخر (مسامية، نفوذية).
3. معطيات تتعلق بخواص السائل (اللزوجة و الانضغاطية).
4. معطيات تتعلق بالضغط البدائي للمكمن.

دراسة رياضية و نمذجة رقمية لجريان سائل وحيد الطور في وسط مسامي أحادي البعد

5. معطيات تتعلق بآبار الحقن و الإنتاج.

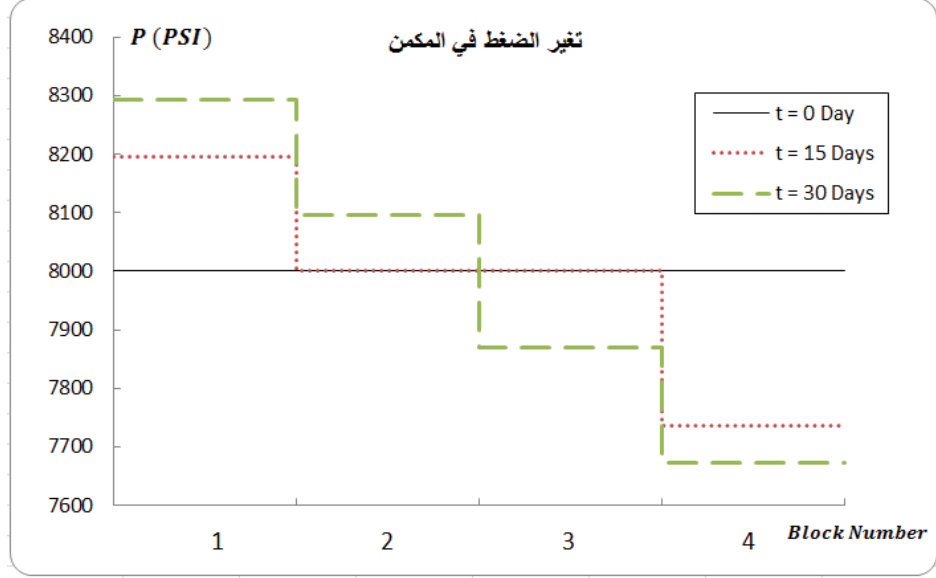
6. معطيات تتعلق بالخطوة الزمنية لحساب تغيرات الضغط.

		قيم الإدخال			
		(Input Data)			
أبعاد المكمن	Δx	(ft)	900	(m)	274.32
	Δy		900		274.32
	Δz		80		24.384
خواص الصخر	K_x	(mD)	40	(m2)	4E-14
	ϕ		0.22		
خواص السائل	μ	(Cp)	12	(Pa s)	0.012
				(Psi . Day)	2.014E-11
	C	(1/Psi)	0.000004		
الضغط الأولي للمكمن	$P_{initial}$	(Psi)	8000		
آبار الحقن و الإنتاج	q_{in}	(STB/Day)	150	Block	1
	q_{out}		200		4
				الخطوة الزمنية (Day)	Δt 15

الشكل (11) صفحة إدخال المعطيات.

• التمثيل البياني (P, x, t) :

أي تغير الضغط على امتداد الطبقة المنتجة (Δx) خلال فترات زمنية محددة (Δt)، و هذا يظهر بالشكل (12) الذي يظهر تغير الضغط (محور العينات) على امتداد بلوكات المكمن (محور السينات) خلال (15، 30) يوم من بدء الحقن و الانتاج.



الشكل (12) تغير الضغط في المكمن بين البئرين في البلوكات الأربع بالعلاقة مع الزمن.

النتائج (Results)				
	(m ³ /Psi.Day)		(Psi.Day/m ³)	
T	4.843E-02		R	9.289422
	Block (1)	Block (2)	Block (3)	Block (4)
t = 0	8000	8000	8000	8000
t = 15	8194.8	8000	8000	7736.96
t = 30	8292.8	8096.8	7869.32	7672.68

الشكل (13) صفحة إظهار النتائج.

نلاحظ من الشكل (12): الضغط قبل البدء بالحقن و الانتاج ($t = 0 \text{ Day}$) ثابت و يساوي للضغط البدائي ($P_{initial} = 8000 \text{ Psi}$) و هذا واضح على الشكل من الخط

المستمر على امتداد البلوكات الأربع. باعتماد الخطوة الزمنية ($\Delta t = 15 \text{ Days}$)، أي بعد خمسة عشر يوماً من بدء الانتاج و الحقن نلاحظ أن الضغط (الخط المنقط) يرتفع الى القيمة (8195 Psi) في البلوك (1) حيث تقع بئر الحقن. في البلوك (2) و البلوك (3) تبقى قيمة الضغط مساوية لقيمة الضغط البدائي للمكمن (8000 Psi) حيث لم تتأثر هذه البلوكات لا بمنطقة الحقن و لا بمنطقة الإنتاج. بينما في البلوك (4) حيث تقع البئر المنتجة نلاحظ انخفاض الضغط الى القيمة (7737 Psi). بعد شهر من بدء الانتاج و الحقن ($\Delta t = 30 \text{ Days}$)، نلاحظ أن الضغط (الخط المتقطع) يرتفع الى القيمة (8293 Psi) في البلوك (1) حيث تقع بئر الحقن، و في البلوك (2) يرتفع الى القيمة (8097 Psi) نتيجة تأثرها بمنطقة ارتفاع الضغط حيث توجد بئر الحقن. بينما نلاحظ انخفاض الضغط في البلوك (3) الى القيمة (7870 Psi) لأن هذه البلوك مجاورة للبئر المنتجة فتأثرت بمنطقة انخفاض الضغط في البلوك (4) إلى القيمة (7673 Psi). و باستمرار الحقن و الانتاج مع الزمن يستمر تغير الضغط (زيادة و نقصان)، و بالتالي نستطيع من خلال النموذج المطبق تحديد كمية السائل المحقونة اللازمة لضبط قيم تغيرات الضغط عند الحدود المرغوبة للحصول على كمية الإنتاج المطلوبة.

5. النتائج و المقترحات:

- من خلال ما تم إنجازه في هذا البحث، نستنتج ما يلي:
1. تم الربط بين المفاهيم الفيزيائية لجريان السائل ضمن الوسط المسامي (قانون دارسي، التوازن المادي، معادلة الحالة)، للحصول على النموذج الرياضي لجريان السائل وحيد الطور في وسط مسامي أحادي البعد.
 2. النموذج الرياضي الذي حصلنا عليه، المتمثل بالمعادلة (20) عبارة عن معادلة تفاضلية جزئية (المشتق من الدرجة الثانية لتغير الضغط بالنسبة للمسافة و من الدرجة الأولى لتغير الضغط بالنسبة للزمن).

3. تحويل النموذج الرياضي إلى نموذج رقمي (المعادلة 39)، تم باستخدام طريقة الفروق المنتهية، التي مكنتنا من إيجاد الحل التقريبي للمشتقات.
4. لدى تعذر حل النموذج الرياضي بطريقة تحليلية، تم الاعتماد على طريقة الفروق المنتهية لإيجاد الحل الرقمي بشكل صريح (Explicite) كون القيمة الوحيدة الغير معلومة هي الضغط و باقي القيم معلومة.
5. الحل الرقمي يكون مجزأ، حيث تكون قيمة الضغط ثابتة على امتداد البلوك المتعلقة بخطوة التجزئة المختارة، و هذا واضح بالشكل (12).
6. النموذج الحاسوبي حصلنا عليه من خلال برمجة النموذج الرقمي باستخدام بيئة البرمجة (Microsoft Visual Basic) وهذا يمكننا من سهولة و سرعة حساب الضغط في أي نقطة من الممكن عند زمن محدد.
7. التطبيق الذي تم من خلاله استخدام النموذج المصاغ رقمياً بطريقة الفروق المنتهية، يعكس قدرة هذا النموذج على إيجاد تغيرات الضغط ضمن الممكن بالعلاقة مع الزمن، وهذا ما نصبو إليه خلال استثمار المكامن النفطية، حيث تكون معرفة توزع الضغط على إمتداد الممكن ضرورية لضبط مؤشرات الانتاج، و إختيار مواقع آبار الحقن و الإنتاج.

بناءً على ما تم استعراضه و الوصول إليه، نقترح تطوير الموديل الرياضي المصاغ و بالتالي الرقمي كي نقرب أكثر من عكس واقع المكامن النفطية.

المراجع العربية:

1. عبدالأحد، ج. نوفل، ع. 1995 - هيدروليك الموائع الجوفية (1). جامعة البعث، كلية الهندسة الكيميائية و البترولية، 190.
2. خضور، غ. 2011 - هيدروليك الموائع الجوفية (2). جامعة البعث، كلية الهندسة الكيميائية و البترولية، 268.

المراجع الأجنبية:

3. ODEH A.S, 1982 - An overview of mathematical modeling of the behavior of hydrocarbon reservoirs. Society of industrial applied mathematics review 24, No.3, 263.
4. MUSKAT M, 1982 - The flow of homogeneous fluids through porous media. International Human resources development Corporation, Boston, 470.
5. BEAR J, 1988 - Dynamics of fluids in porous media. Dover Publication Inc, New York city, 196.
6. Reservoir simulation, 2000 - Heriot-Watt University, Edinburgh, 518.