دراسة عملية لخوارزميات تقريبية لمسألة البيان الجزئي الأصغري الممتد المضاعف الترابط للمجموعة T

رهام منصور اشراف: د.رائد جابري

الملخص

مسألة إيجاد بيان جزئي أصغري ممتد مضاعف الترابط للمجموعة T هي مسألة مهمة في علوم الحاسب نظراً لتطبيقاتها الواسعة وأهميتها في مجال تصميم الطرق وإعادة توجيه حركة المرور في حال وجود نقاط مفصلية قوية او حوادث او مناطق اخلاء.

يمتاز البيان الجزئي الأصغري الممتد المضاعف الترابط للمجموعة T بقدرته على الحفاظ على خواص الاتصال بقوة في حال حدوث عطل في وصلة وفي حال حدوث عطل في عقدة من مجموعة عقد T. وعلى الرغم من كون مسألة إيجاد هذا النوع من البيانات الجزئيّة هو مسألة NP−complete. فإنّ من الممكن إيجاد حلول تقريبيّة من خلال خوارزميات تقريبيّة وفعالة. وهذا ما سنركز عليه خلال هذا البحث.

الكلمات المفتاحية : البيان الموجه، البيان الجزئي، البيان المتصل بقوة، الخوارزميات التقريبية، البيان المضاعف الترابط وصلياً، البيان الأصغري مضاعف الترابط وصلياً ، البيانات مضاعفة الترابط للمجموعة T.

An experimental study of approximation algorithms for minimum 2−T connected spanning subgraph problem

Abstract

The problem of computing a minimum 2−T connected spanning subgraph is an important problem in computer science due to its wide applications and significance in road design and traffic rerouting in the presence of strong articulation points, accidents, or evacuation zone. The minimum 2−T connected spanning subgraph is distinguished by its ability to preserve strong connectivity properties in the event of a edge failure or a vertex failure within the set of vertices T. Although finding this type of subgraphs is NP−complete, approximate solutions can be obtained through efficient approximation algorithms. This will be the main focus of this research.

Keywords: directed graph, subgraph, strongly connected graph, approximation algorithms, 2−edge−connected graph, minimum 2−edge−connected graph, 2−T connected graph.

1. مقدمة :

الكثير من المسائل التي تهم حياتنا اليومية تم حلها من خلال خوارزميات البيان على سبيل المثال مسألة إيجاد طريق بأقل تكلفة ممكنة للوصول إلى مطعم ما ضمن مدينة. وفي حالات حدوث الكوارث الطبيعية وغير الطبيعة يكون من المهم جداً معرفة إمكانية الحفاظ على الاتصال بين العقد في حال فشل وصلة او عقدة ما. ففي قسم البرمجيات ونظم المعلومات في كلية الهندسة

المعلوماتية بجامعة اللاذقية تمت دراسة مسائل تهتم بخاصية الاتصال المضاعف في البيانات الموجهة من قبل الباحث جابري في عمله [10] واحمد دنده[6] وعزام حبيب[15] ونور الكنج [7].

تدعى البيانات الموجهة التي تمتلك ميزة وجود طريق بين أي عقدتين فيها بالبيانات المتصلة بقوة. نقول عن بيان موجه انه مضاعف الترابط وصلياً اذا كان البيان الجزئي المتبقي بعد إزالة أي وصلة من وصلاته هو بيان متصل بقوة. ونقول انه مضاعف الترابط عقدياً اذا كان البيان الجزئي المتبقي بعد إزالة أي عقدة من عقده هو بيان متصل بقوة.

في عام 1979 برهن كيري وجونسون [1] ان مسألة ايجاد بيان جزئي ممتد واصغري يحقق خاصية الترابط المضاعف عقدياً وان مسألة ايجاد بيان جزئي ممتد واصغري يحقق خاصية الترابط المضاعف وصلياً هي مسألة NP−complete. الخوارزميات التقريبية الأولى المعروفة لهذه المسألتين تعتمدان على نتائج مادر[4] وادمونس [23] حيث تم برهان ان عدد وصلات البيان المضاعف الترابط عقدياً أو وصلياً وغير القابل للتخفيض minimal لايتجاوز أربعة اضعاف عدد العقد. في عام 2000 قدم شيريان واخرون [2] خوارزميات تقريبية افضل من المعروفة سابقا لهاتين المسألتين من حيث جودة الحل. و قام جورجيادس واخرون [24,25] في عام 2020 بتحسين النتائج السابقة لمسألة البيان الجزئي الممتد والمضاعف الترابط عقدياً.

من المصطلحات التي تم طرحها في البيان الموجه في عام 2018 من قبل Gevigney وآخرون[3] هو مصطلح البيانات الموجهة المضاعفة الترابط للمجموعة T وهي البيانات التي تحافظ على إمكانية الاتصال بقوة في حال حدوث عطل في وصلة وكما تحافظ على على إمكانية الاتصال بقوة في حال فشل أي عقدة من عقد المجموعة T. فمثلاً في البيان الموجه الموجود في الشكل 2 للجزء الذي يمثل منطقة من حي الوعر في مدينة حمص والموجود في الشكل 1. نلاحظ ان هذا البيان يمتاز بهذه الميزة. اذا كانت T تتضمن العقدتين التاليتين: عقدة لبرج النجاح وعقدة تمثل نقطة تقاطع شارع تشرين مع شارع الفردوس. لاحظ البيان الموجه المرسوم في الشكل 2 إن فشل أي وصلة لا يؤثر على إمكانية الاتصال بقوة وكذلك فشل أي عقدة من العقد الموجودة في المجموعة T لا يؤثر على إمكانية الاتصال بقوة في هذا البيان.

الشكل (1) جزء من حي الوعر في حمص

الشكل(2) بيان موجه يمثل جزء من حي الوعر في حمص

يركز هذا البحث على إيجاد بيان جزئي اصغري ممتد في البيانات مضاعفة الترابط للمجموعة T. هذه المسألة هي مسألة NP−complete ولذلك فإنه من غير المعلوم حتى وقتنا هذا اذا كان بالإمكان حل مثل هذه المسائل بزمن كثير حدود. سنركز في بحثنا على تصميم وتحقيق خوارزميات تقريبية لهذه المسألة.

2. مشكلة البحث :

يمكن تعريف مشكلة البحث كما يلي:

الدخل بيان موجه $G = (V, E)$ حيث G مضاعف الترابط للمجموعة T

المطلوب: حساب مجموعة جزئية من الوصلات E^*باقل عدد ممكن من الوصلات بحيث ان البيان الجزئي الموجه (V, E^*) هو بيان مضاعف الترابط للمجموعة T.

ان هذه المسألة هي مسألة NP−complete وذلك لان مسألة إيجاد البيان الجزئي الاصغري الممتد المضاعف الترابط عقديا هي حالة خاصة من مسألتنا عندما تكونT=V. سنركز في بحثنا على تصميم وتحقيق خوارزميات تقريبية بزمن كثير حدود لهذه المسألة.

3. أهمية البحث وأهدافه ومبرراته:

إن البيانات الموجهة مضاعفة الترابط للمجموعة T تمتاز بالقدرة على المحافظة على إمكانية الاتصال بين العقد في حال حدوث عطل او فشل في أي عقدة من عقد المجموعة T وفي حال حدوث أي عطل او فشل في أي وصلة من وصلاتها. وهذا الميزة مفيدة جدا في حال حدوث الأعطال والكوارث ضمن المدن. في هذا البحث نهتم بمسألة حساب بيان جزئي ممتد مضاعف الترابط للمجموعة T بحيث يكون عدد وصلات هذا البيان الجزئي اقل ما يمكن. وهذه المسألة هي مسألة NP−complete.

إن الخوارزميات التقريبية التي تم دراستها في بحث احمد دنده [6] وفي الخوارزميات المدروسة في بحث نور الكنج [7] غير قادره على ايجاد حلول تقريبية لهذه المسألة. كما ان الحلول الناتجه

عن الخوارزميات المدروسة من قبل شيريان واخرون [2] وجورجيادس واخرون [24,25] لا تشكل حلولاً لمسألة البحث. ,لذلك لابد من العمل على تصميم خوارزميات جديدة.

نهدف في هذا البحث الى تصميم خوارزميات لايجاد حلول تقريبية لمسألة البيان الجزئي الأصغري الممتد والمضاعف الترابط للمجموعة T بزمن كثير حدود ثم تحقيق هذه الخوارزميات والمقارنة بينها من حيث عدد الوصلات وزمن التنفيذ. ثم سندرس إمكانية الإجابة على السؤال التالي: هل يمكن تحديد عامل التقريب للخوارزميات المحققة في الحالة العامة ؟

4. مواد وطرق البحث :

قمنا في هذا البحث بدراسة مجموعة من المفاهيم الأساسية المتعلقة بخصائص الاتصال في البيانات الموجهة وهي: البيانات المتصلة بقوة [5,13]، البيانات المضاعفة الترابط عقدياً [8]، البيانات المضاعفة الترابط وصلياً [2] والبيانات المضاعفة الترابط للمجموعة T [3]. ان الخوارزميات التقريبية التي تمت دراستها وتحقيقها في [6] لإيجاد حلول تقريبية لمسألة البيان الجزئي الاصغري الممتد والمضاعف الترابط عقدياً غير قادرة على إيجاد حلول لمسألة بحثنا لان بيان الدخل ليس بالضرورة ان يكون مضاعف الترابط عقدياً. كما ان الخوارزميات التقريبية لمسألة البيان الجزئي الممتد والمضاعف الترابط وصليا التي تمت دراستها في [7] غير قادرة على إيجاد حلول لمسألة بحثنا لان خرج هذه الخوارزميات لا يحقق بالضرورة خاصية الترابط المضاعف للمجموعة T. بالإضافة الى ذلك فان جميع الخوارزميات التقريبية التي تعتمد على الدراسات المرجعية [2,4,23,24,25] وغيرها من المسائل المشابهة تفشل في إيجاد حلول لمسألة بحثنا. لذلك قمنا بتصميم خوارزميات تقريبية تعتمد على مفهوم البيان مضاعف الترابط للمجموعة T غير قابل للتخفيض[3] . وقمنا بتحقيق هذه الخوارزميات بلغة Java وقمنا بتجريبها على حاسب يمتلك المواصفات التالية :

Processor: AMD A6-9200 RADEON R4, 5 COMPUTE CORES 2C+3G 2.00 GHz

RAM: 8GB

Operating system: Windows 10

System type : 64-bit operating system with an x64-based processor

و قارنا بين هذه الخوارزميات من حيث زمن التنفيذ ومن حيث جودة الحل. وبرهنا عامل تقريب هذه الخوارزميات في الحالة التي يكون عدد العقد ضمن T مساوياً 4.

البيان الموجه المتصل بقوة strongly connected graph [5,13] : نقول عن بيان موجه G=(V,E) أنه متصل بقوة strongly connected اذا كان يحقق ما يلي: من أجل كل عقدتين v,w ∈ V يوجد طريق من v الى w وطريق من w الى v في البيان G

البيان مضاعف الترابط عقدياً 2−vertex connected graph [8]: نقول عن بيان متصل بقوة G=(V,E) أنه مضاعف الترابط عقدياً 2−vertex connected اذا كان يحقق :من اجل كل عقدة v ∈ V يكون البيان الجزئي G\{v} متصل بقوة.

البيان مضاعف الترابط وصلياً 2−edge connected graph [2]: ليكن G=(V,E) بيان متصل بقوة نقول عن G انه مضاعف الترابط وصلياً
2−edge connected اذا كان يحقق ما يلي : من اجل اي وصلة e ∈E يكون البيان الجزئي G\{e} متصل بقوة.

البيانات الموجهة المضاعفة الترابط للمجموعة T [3]:

ليكن G=(V,E) بيان متصل بقوة ، من أجل T ⊆ V
نقول عن G أنه مضاعف الترابط للمجموعة T (2−T connected graph)
اذا كان يحقق الشرطين التاليين :

- ✓ Gمضاعف الترابط وصلياً 2−edge connected
- ✓ من اجل اي عقدة v Є T فإن البيان G\{v} متصل بقوة

خوارزميات تقريبية لحل مسألة البيان الجزئي الموجه الأصغري والمترابط من الدرجة الثانية [6]: البيانات الموجهة مضاعفة الترابط عقدياً هي البيانات الموجهة المتصلة بقوة التي تخلو من عقد يؤدي حذفها الى المساس بخاصية الاتصال بقوة.

في العمل [6]، تم إعداد دراسة مفصلة وتجريبية لخوارزميات تقريبية للمسالة التالية:
الدخل : بيان مضاعف الترابط عقديا 2−vertex connected G=(V,E)
المطلوب : ايجاد مجموعة جزئية $E^* \subseteq E$ حجمها اقل ما يمكن بحيث يكون البيان (V, E^*) هو بيان مضاعف الترابط عقدياً
هذه المسألة هي مسألة[1] NP−Complete. لكن جميع الخوارزميات التي تمت دراستها في [6] لا تناسب مسألة بحثنا لان هذه الخوارزميات تتطلبا دخلاً مضاعف الترابط عقدياً.

خوارزميات تقريبية لحساب بيان جزئي موجه ومضاعف الترابط وصلياً بحجم أصغري[7]

:عندما يكون البيان الموجه متصلاً بقوة ولا يتضمن أي وصلة يؤدي حذفها الى فقدان خاصية الاتصال بقوة ، فإننا نسمي هذا النوع من البيانات بيانات مضاعفة الترابط وصلياً.

في العمل [7] تمت دراسة عدة خوارزميات تقريبية لإيجاد حلول تقريبية للمسألة التالية:
الدخل : بيان مضاعف الترابط وصلياً 2−edge connected
G=(V,E)
المطلوب : ايجاد مجموعة جزئية $E^* \subseteq E$ حجمها اقل ما يمكن
بحيث أن البيان الجزئي (V, E^*) هو بيان مضاعف الترابط وصلياً
هذه المسألة هي مسألة [1] Np_complete
الخوارزميات التي تم دراستها في [7] غير قادرة على إيجاد حلول تقريبية لمسألة بحثنا.

البيانات المضاعفة الترابط وصلياً غير القابلة للتخفيض [4] :

وفقاً للنتائج التي تم التوصل اليها في [4,23] فإن البيانات المضاعفة الترابط وصلياً وغير القابلة للتخفيض لا يمكن ان تمتلك اكثر من أربعة اضعاف عدد عقدها. وبالتالي يمكن

الحصول على خوارزميات تقريبية عامل تقريبها 2 للمسألة المدروسة في [7]. أي ان خرج هذه الخوارزميات يتضمن عدداً من الوصلات لا يتجاوز ضعفي الحل المثالي.

البيان مضاعف الترابط للمجموعة T غير قابل للتخفيض[3] :

نقول عن بيان$G=(V,E)$ مضاعف الترابط للمجموعة T أنه غير قابل للتخفيض اذا حقق مايلي :

- ✓ G مضاعف الترابط للمجموعة T
- ✓ من اجل أي وصلة e فإن البيان $G\backslash\{e\}$ هو بيان لا يحقق 2−T connected

تمكن الباحث في [3] من برهان أن: البيانات من هذا النوع تتضمن عقدة على الأقل بحيث

indegree = outdegree =2

ولكن لا توجد أي دراسة مرجعية تحدد الحد الاعظمي لعدد الوصلات لهذا النوع من البيانات وبالتالي يبقى السؤال هل بالإمكان الاستفادة من نتائج العمل [3] في تصميم خوارزمية تقريبية لمسألة بحثنا.

فحص خاصية مضاعف الترابط وصلياً وخاصية مضاعف الترابط عقدياً

نستعرض في هذه الفقرة خوارزمية بسيطة للتحقق من ان بيان الدخل مضاعف الترابط وصلياً والتي تعتمد على أمرين أساسين هما: ان بيان الدخل يجب ان يكون محققاً لخاصية الاتصال بقوة. وان البيان الناتج عن إزالة أي وصلة من بيان الدخل لايزال بيان متصل بقوة، يوضح الشكل (3) الخطوات التفصيلية لهذه الخوارزمية:

```
1  Algorithm Test_2edge_connected
2  Input: a directed graph G = (V, E)
3  if G is not strongly connected graph then
4        return false
5  for each edge (i, j) ∈ E do
6     if the subgraph (V, E\{(i, j)}) is not strongly connected then
7           return false
8  return true
```

الشكل (3) خوارزمية لفحص اذا كان بيان الدخل مضاعف الترابط وصليا"

ايضاً خوارزمية للتحقق من ان بيان الدخل مضاعف الترابط عقدياً والتي تعتمد على امرين اساسين هما: ان بيان الدخل يجب ان يكون محققا لخاصية الاتصال بقوة. وان البيان الناتج عن إزالة أي عقدة من بيان الدخل لايزال بيان متصل بقوة. الخوارزمية Test_2vertex _connected تعمل كما يلي: في البداية نقوم بالتحقق من ان بيان الدخل بالفعل متصل بقوة. لأننا نعلم ان البيان في حال لم يكن متصل بقوة فانه لا يمكن ان يكون مضاعف الترابط عقدياً. بعد ان نتأكد من امتلاك بيان الدخل لخاصية الاتصال بقوة. نقوم بالتحقق من ان البيان لايزال متصل بقوة بعد حذف أي عقدة من عقد البيان. فاذا كان البيان بعد حذف عقدة ما ليس متصل بقوة فانه ليس مضاعف الترابط عقدياً.

يوضح الشكل (4) الخطوات التفصيلية لهذه الخوارزمية.

```
1  Algorithm Test_2vertex _connected
2  Input: a directed graph G = (V, E)
3  if G is not strongly connected graph then
4        return false
5  for each vertex v ∈ V do
6     if the subgraph (V\{v}, E) is not strongly connected then
7           return false
8  return true
```

الشكل (4) خوارزمية لفحص اذا كان بيان الدخل مضاعف الترابط عقدياً

إيجاد بيان جزئي محقق لخاصية 2−T−connected غير قابل للتخفيض

نستعرض في هذه الفقرة خوارزمية لإيجاد بيان جزئي محقق لخاصية 2−T−connected والتي تشكل حلاً مقبولاً ولكن ليس بالضرورة ان يكون مثالياً لمسألة البحث. تعتمد هذه الخوارزمية على مفهوم البيانات من النوع 2−T−connected غير القابلة للتخفيض 2−T− Minimal[3] connected graph والتي هي تعد تعميما لمفهوم البيانات غير القابلة للتخفيض المضاعفة الترابط عقديا و وصليا والتي تم دراستها من قبل مادر [4] وادمونس [23].

ليكن $G = (V, E)$ بيانا موجها محققا لخاصية 2−T−connected. نقول عن البيان G انه غير قابل للتخفيض اذا كان هذا البيان يفقد خاصية 2−T−connected عند حذف أي وصلة من وصلاته. يبين الشكل (5) خوارزمية بيان جزئي محقق لخاصية 2−T−connected غير قابل للتخفيض زمن تنفيذها كثير حدود.

```
1 | Algorithm Find_ minimal 2-T-connected subgraph
2 | Input: a directed graph G = (V, E)
3 | for each edge (i, j) ∈ E do
4 |     delete the edge (i, j) from E
5 |     if the subgraph (V, E\{(i, j)}) is not 2-T-connected then
6 |         add the edge (i, j) to E
7 | output the subgraph (V, E) and the number of its edges
```

الشكل (5) خوارزمية إيجاد بيان جزئي محقق لخاصية 2−T−connected غير قابل للتخفيض

ان الخوارزمية السابقة لايجاد بيان جزئي محقق لخاصية 2−T−connected غير قابل للتخفيض لا تراعي أي ترتيب للوصلات عند إزالة الوصلات غير الضرورية للمحافظة على خاصية 2− T−connected.

لقد قمنا بتصميم خوارزميات معدلة لايجاد بيان جزئي محقق لخاصية 2−T−connected حيث تتضمن هذه الخوارزميات اكثر من مرحلة والهدف من هذه المراحل دراسة تأثير هذه المرحلة على

شكل البيان الناتج وعدد وصلاته. لا شك ان وجود هذه المراحل سينعكس سلباً على زمن التنفيذ والفائدة الحقيقة هي تخفيض عدد وصلات الخرج، إن تعقيد جميع الخوارزميات التي حققناها هو زمن كثير حدود وهذه الخوارزميات التي صممناها هي :

- **خوارزمية معدلة للحصول على بيان جزئي محقق لخاصية 2−T−connected تعتمد على ثلاث مراحل.**

في المرحلة الأولى يتم إيجاد وصلات بيان جزئي محقق لخاصية 2−T−connected غير قابل للتخفيض وفي المرحلة الثانية ندرس الوصلات الناتجه عن المرحلة الأولى ونقوم بإزالة الوصلات غير الضرورية للحفاظ على خاصية 2−T−connected ثم في المرحلة الثالثة نقوم بدراسة الوصلات المتبقية وإزالة منها ما هو غير ضروري من الوصلات للحفاظ على خاصية 2−T−connected. هذه الخوارزمية تحتاج الى زمن $O(m^2(m+n))$.

```
1  Algorithm Three_phases_minimal 2-T-connected subgraph
2  Input: a 2-T-connected directed graph G = (V, E)
3  Phase 1
4  Find a minimal 2-T-connected subgraph of G and let I be its edge set.
5  Phase 2
6  for each edge (i, j) ∈ I do
7      delete the edge (i, j) from E
8      if the subgraph (V, E\{(i, j)}) is not 2-T-connected then
9              add the edge (i, j) to E
10 Phase 3
11 for each edge (i, j) ∈ E\I do
12     delete the edge (i, j) from E
13     if the subgraph (V, E\{(i, j)}) is not 2-T-connected then
14             add the edge (i, j) to E
15 output the subgraph (V, E) and the number of its edges
```

الشكل (6) خوارزمية معدلة للحصول على بيان جزئي محقق
لخاصية 2−T−connected غير قابل للتخفيض على ثلاث مراحل

- **خوارزمية معدلة للحصول على بيان جزئي محقق لخاصية 2−T−connected تعتمد على اربعة مراحل:**

نقدم في هذه الفقرة خوارزمية تعتمد على أربعة مراحل. في المرحلة الأولى يتم إيجاد وصلات بيان جزئي غير قابل للتخفيض يحقق خاصية 2−T−connected ويتم تنفيذ خوارزمية البحث بالعمق على بيان الدخل وفي المرحلة الثانية ندرس الوصلات الناتجة عن المرحلة الأولى والتي لا تشكل وصلات شجرية ونقوم بإزالة الوصلات غير الضرورية للحفاظ على خاصية 2−T−connected ثم في المرحلة الثالثة نقوم بدراسة الوصلات المتبقية من البيان من الوصلات غير

الشجرية وإزالة منها ما هو غير ضروري من الوصلات للحفاظ على خاصية ثم يتم في المرحلة النهائية اختبار الوصلات الشجرية وإزالة الوصلات غير الضرورية منها.

```
1  Algorithm four_phases_minimal_2Tconnected_graph
2  Input: a 2-T-connected directed graph G = (V, E)
3  Phase 1
4  Find a minimal 2-T-connected subgraph of G and let I be its edge set.
5  Run dfs on G and classify edge
6  Phase 2
7  for each edge (i, j) ∈ I do
8    if (i, j) is not tree edge then
9      delete the edge (i, j) from E
10     if the subgraph (V, E\{(i, j)}) is not 2-T-connected then
11           add the edge (i, j) to E
12 Phase 3
13  for each edge (i, j) ∈ E\I do
14   if (i, j) is not tree edge then
15     delete the edge (i, j) from E
16     if the subgraph (V, E\{(i, j)}) is not 2-T-connected then
17           add the edge (i, j) to E
18 phase 4
19 for each tree edge (i, j) do
20     delete the edge (i, j) from E
21     if the subgraph (V, E\{(i, j)}) is not 2-T-connected then
22           add the edge (i, j) to E
23 output the subgraph (V, E) and the number of its edges
```

الشكل (7) خوارزمية معدلة للحصول على بيان جزئي محقق
لخاصية 2−T−connected غير قابل للتخفيض على أربعة مراحل

- **خوارزمية معدلة للحصول على بيان جزئي محقق لخاصية 2−T−connected مؤلفة من خمسة مراحل:**

نقدم في هذه الفقرة خوارزمية من خمسة مراحل. في المرحلة الأولى يتم إيجاد وصلات بيان جزئي محقق لخاصية 2−T−connected وفي المرحلة الثانية يتم فحص الوصلات التي حصلنا عليها في المرحلة الأولى ونقوم بحذف الوصلات غير الضرورية منها للحفاظ على خاصية 2−T− connected ثم في المرحلة الثالثة نقوم باختبار الوصلات المتبقية وحذف الوصلات غير الضرورية للحفاظ على خاصية 2−T−connected. وفي المرحلة الرابعة يتم فحص الوصلات شكلت خرج المرحلة الأولى والثالثة وصلة تلوى الأخرى ويتم حذف منها الوصلات التي لا تفيدنا في الحفاظ على خاصية 2−T−connected. ثم يتم في المرحلة الخامسة والأخيرة اختبار الوصلات التي لا تنتمي الى خرج المرحلة الأولى والثالثة لإزالة الوصلات غير الضرورية منها. الخطوات التفصيلية لهذه الخوارزمية:

Algorithm Five_phases minimal 2−T−connected subgraph

Input: a 2−T−connected directed graph $G = (V, E)$

Phase 1

calculate a minimal 2−T−connected subgraph of G and let I be its edge set.

Phase 2

for each edge $(i, j) \in I$ do

remove the edge (i, j) from E

if the subgraph $(V, E\backslash\{(i, j)\})$ is not 2−T−connected then

add the edge (i, j) to E

Phase 3

for each edge $(i, j) \in E\backslash I$ do

remove the edge (i, j) from E

if the subgraph $(V, E\backslash\{(i, j)\})$ is not 2−T−connected then

add the edge (i, j) to E

Phase 4

For each edge e in E do

Add e to I

Let E be the edge set of the input graph

for each edge $(i,j) \in I$ do

remove the edge (i,j) from E

if the subgraph $(V, E\backslash\{(i,j)\})$ is not 2−T−connected then

add the edge (i,j) to E

Phase 5

for each edge $(i,j) \in E\backslash I$ do

remove the edge (i,j) from E

if the subgraph $(V, E\backslash\{(i,j)\})$ is not 2−T−connected then

add the edge (i,j) to E

Output the subgraph (V,E) and the number of its edges

نلاحظ ان هذه الخوارزمية تحتاج الى زمن $O(m^2(m+n))$.

- **خوارزمية لايجاد بيان جزئي محقق لخاصية 2−T−connected غير قابل للتخفيض باستخدام شجرة بحث بالعمق**

ندرس في هذه الفقرة خوارزمية لايجاد بيان جزئي محقق لخاصية 2−T−connected غير قابل للتخفيض تراعي ترتيبا معينا للوصلات عند إزالة الوصلات غير الضرورية للمحافظة على خاصية 2−T−connected وذلك من خلال إيجاد شجرة بحث بالعمق ومن ثم دراسة الوصلات التي لاتنتمي الى هذه الشجرة ومن ثم بعد ذلك يتم اختبار وصلات الشجرة وصلة تلوى الأخرى واستبعاد ما هو غير ضروري منها.

Algorithm minimal_2Tconnected_graph_first_tree

Input: a 2−T−connected directed graph $G = (V, E)$

Phase 1

Run dfs starting from vertex 0 and classify edges

Note that tree edges form a tree called dfs tree

Phase 2

for each edge (i, j) which is not tree edge do

delete the edge (i, j) from E

if the subgraph $(V, E\backslash\{(i, j)\})$ is not 2−T−connected then

add the edge (i, j) to E

Phase 3

for each edge (i, j) which is tree edge do

delete the edge (i, j) from E

if the subgraph $(V, E\backslash\{(i, j)\})$ is not 2−T−connected then

add the edge (i, j) to E

output the subgraph (V, E) and the number of its edges

- **خوارزمية لايجاد بيان جزئي محقق لخاصية 2−T−connected غير قابل للتخفيض باستخدام شجرتين**

نقدم في هذه الفقرة خوارزمية معدلة عن الخوارزمية السابقة وذلك بإيجاد شجرتين مختلفتين بدلا من شجرة واحدة وذلك من خلال تنفيذ خوارزمية البحث في العمق وتصنيف الوصلات مرتين متتاليتين ثم يتم استبعاد الوصلات غير الضرورية بفحص الوصلات التي لا تنتمي الى هاتين

الشجرتين. وفي النهاية يتم فحص وصلات الشجرتين لكي يتم حذف الوصلات غير الضرورية منهما

Algorithm minimal_2Tconnected_graph_double_trees

Input: a 2−T−connected directed graph $G = (V, E)$

Phase 1

Run dfs on G and classify edge, and let I be the set of tree edges

Run dfs on G\I and classify edge, and add the tree edges to I.

Phase 2

for each edge (i, j) which is not in I do

delete the edge (i, j) from E

if the subgraph $(V, E\backslash\{(i, j)\})$ is not 2−T−connected then

add the edge (i, j) to E

Phase 3

for each edge (i, j) which is in I do

delete the edge (i, j) from E

if the subgraph $(V, E\backslash\{(i, j)\})$ is not 2−T−connected then

add the edge (i, j) to E

output the subgraph (V, E) and the number of its edges

- **خوارزمية لايجاد بيان جزئي محقق لخاصية 2−T−connected غير قابل للتخفيض باستخدام شجرتين والبيان المعكوس**

نقدم في هذه الفقرة خوارزمية تختلف عن سابقتها بانه بعد إيجاد شجرتين مختلفتين في بيان الدخل يتم إيجاد البيان المعكوس ومن ثم تنفيذ خوارزمية البحث بالعمق على البيان المعكوس فتتشكل لدينا شجرة ثالثة. وبعد ذلك يتم استبعاد الوصلات غير الضرورية بفحص الوصلات التي لا تنتمي الى الأشجار الناتجة. وفي النهاية يتم فحص وصلات الأشجار الثلاثة لكي يتم حذف الوصلات غير الضرورية منها.

Algorithm minimal_2Tconnected_graph_double_trees_refined

Input: a 2−T−connected directed graph $G = (V, E)$

Phase 1

Run dfs on G and classify edge, and let I be the set of tree edges

Run dfs on G\I and classify edge, and add the tree edges to I.

Find transport graph

Run dfs on the transport graph and for each tree edge (v,w) add (w,v) to I

Phase 2

for each edge (i, j) which is not in I do

delete the edge (i, j) from E

if the subgraph $(V, E\backslash\{(i, j)\})$ is not 2−T−connected then

add the edge (i, j) to E

Phase 3

for each edge (i, j) which is in I do

delete the edge (i, j) from E

if the subgraph $(V, E\backslash\{(i, j)\})$ is not 2−T−connected then

add the edge (i, j) to E

output the subgraph $(\boldsymbol{V}, \boldsymbol{E})$ and the number of its edges

5. النتائج ومناقشتها :

في البداية نوضح خرج كل خوارزمية على بيان مكون من 10 عقد 82 وصلة عندما تكون |T|=4 ثم نقوم بتجريب الخوارزميات على مجموعة من البيانات ونقارن بين هذه الخوارزميات من حيث زمن التنفيذ وعدد وصلات الخرج .

من أجل تحليل ومقارنة الخوارزميات المحققة تم توليد البيانات بشكل عشوائي من خلال إجراء تم تسميته generate_2T−connected_graph سنوضّحهُ في الفقرة التالية:

- **توليد الدخل :**

قمنا بتصميم الإجراء generate_2T−connected_graph لتوليد بيان موجّه مجموعة عُقَده هي المجموعة $\{0,1,\dots,number_of_vertices-1\}$ يحقق خاصية 2−T− connected حيث ان number_of_vertices هو عدد عقد البيان.

في البداية يتم تحديد عدد بدائي للوصلات num_edges_before_satisfying_2Tc

إنّ عدد الوصلات num_edges_before_satisfying_2Tc قد لا يكون كافياً لتوليد بيان يحقق خاصية 2−T−connected . لذلك يتم توليد وصلات بشكل عشوائي حيث أن عدد هذه الوصلات يساوي num_edges_before_satisfying_2Tc ويتم إضافة هذه الوصلات إلى البيان. وفي حال كان البيان الناتج لا يحقق خاصية 2−T−connected تقوم الحلقة بإضافة عدد من الوصلات بشكل عشوائي حتى نحصل على بيان يحقق خاصية 2−T− connected ويكون عدد الوصلات النهائي هو num_edges_after_satisfying_2Tc .

Algorithm generate_2T_connected_graph

Input: number_of_vertices **and** num_edges_before_satisfying_2Tc

Output: a 2-T-connected graph (V, E) and the number of edges in this graph

$E \leftarrow \emptyset$

$V \leftarrow \{0,1,\dots,number_of_vertices-1\}$

$p \leftarrow 0$

while (p < num_edges_before_satisfying_2Tc) **do**

$u \leftarrow$ random integer between 0 and number_of_vertices − 1

do

$v \leftarrow$ random integer between 0 and number_of_vertices – 1

while $u = v$

if (u, v) is not an edge in E **then**

add (u, v) to E

$p \leftarrow p + 1$

num_edges_after_satisfying_2Tc← num_edges_before_satisfying_2Tc

while (V, E) **is** not 2-T-connected **do**

$u \leftarrow$ random integer between 0 and number_of_vertices − 1

do

v← random integer between 0 and number_of_vertices – 1

while $u = v$

if (u, v) is not an edge in E **then**

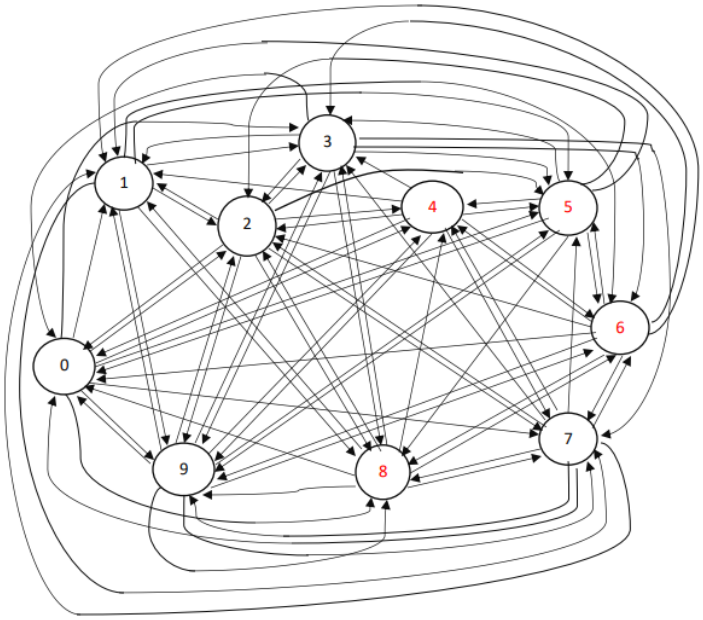
add (u, v) to E

num_edges_after_satisfying_2Tc ← num_edges_after_satisfying_2Tc + 1

return num_edges_after_satisfying_2Tc

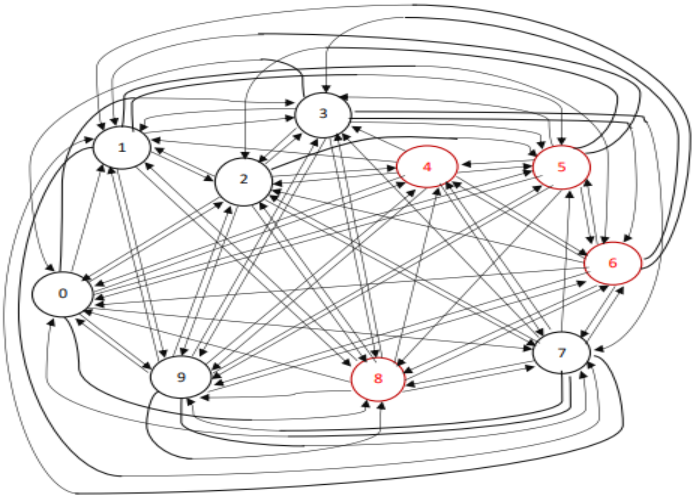
- **مثال يوضح خرج الخوارزميات المحققة:**

قمنا بتوليد بيان موجه يحقق خاصية 2−T−connected مكون من 10 عقد و 82 وصلة وقمنا برسمه في الشكل 8.



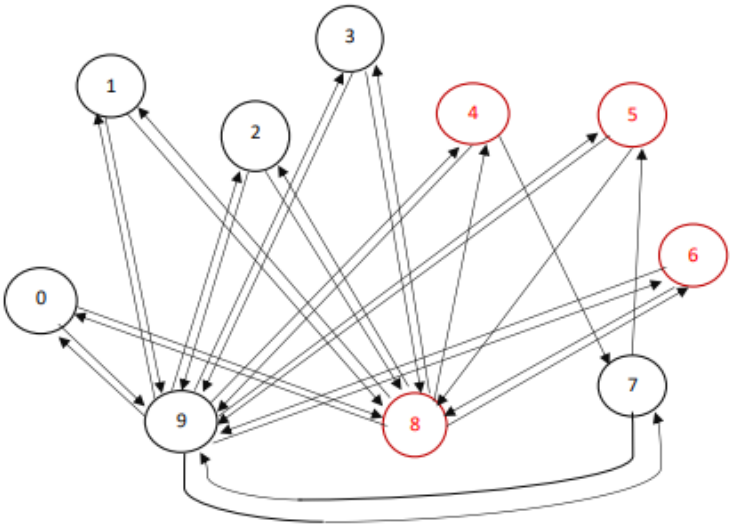
الشكل (8) بيان مضاعف الترابط للمجموعة T مكون من 10 عقد و82 وصلة

المجموعة T تتضمن 4 عقد تم تحديدها عشوائيا وفي هذا المثال كانت T={4,5,6,8} كما هو موضح في الشكل 9.



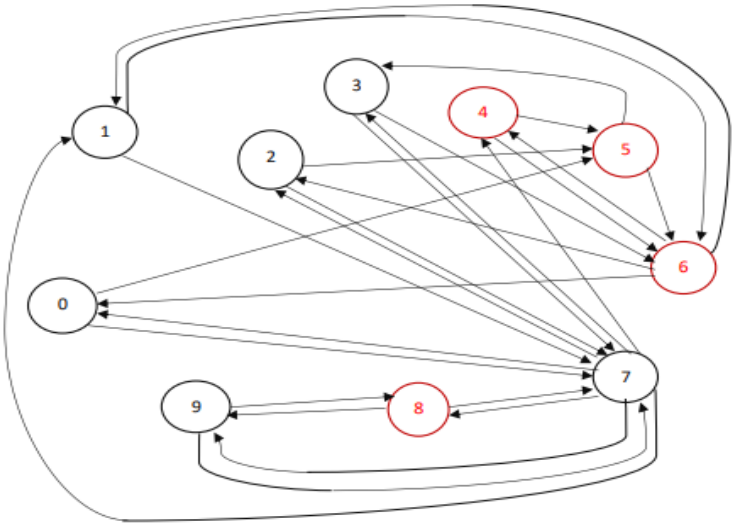
الشكل (9) المجموعة T={4,5,6,8}

عند تنفيذ الخوارزمية Find_ minimal 2−T−connected subgraph اصبح عدد وصلات النهائي للخرج هو 30 وشكل البيان كم هو موضح في الشكل (10):



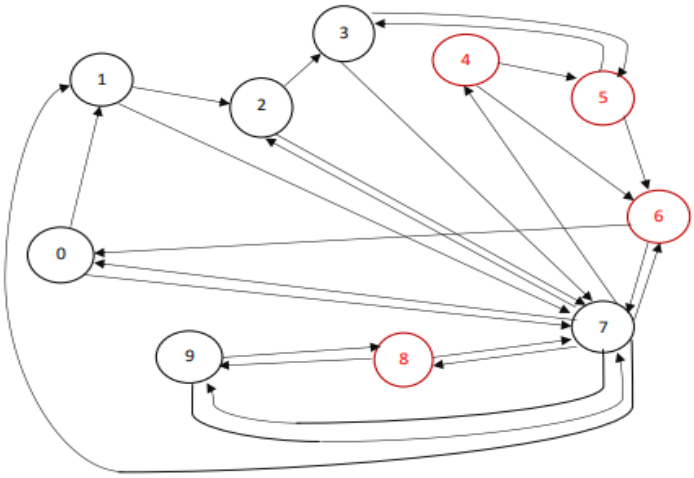
الشكل (10) بيان ناتج عن تطبيق خوارزمية Find_ minimal 2-T-connected subgraph

وعند تنفيذ الخوارزمية Three_phases_ minimal 2-T-connected subgraph على بيان الدخل كان البيان الناتج كما هو موضح في الشكل (11)
وعدد وصلات الخرج هو 27



الشكل (11) بيان ناتج عن تطبيق خوارزمية Three_phases_ minimal 2-T- connected subgraph

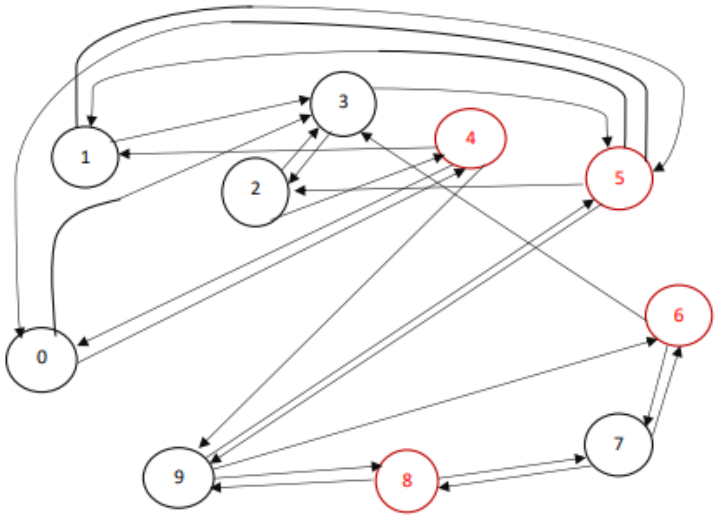
وفي الشكل التالي نلاحظ أن عدد وصلات الخرج النهائي عند تنفيذ خوارزمية four_phases_minimal_2Tconnected_graph هو 25



الشكل (12) بيان ناتج عن تطبيق خوارزمية

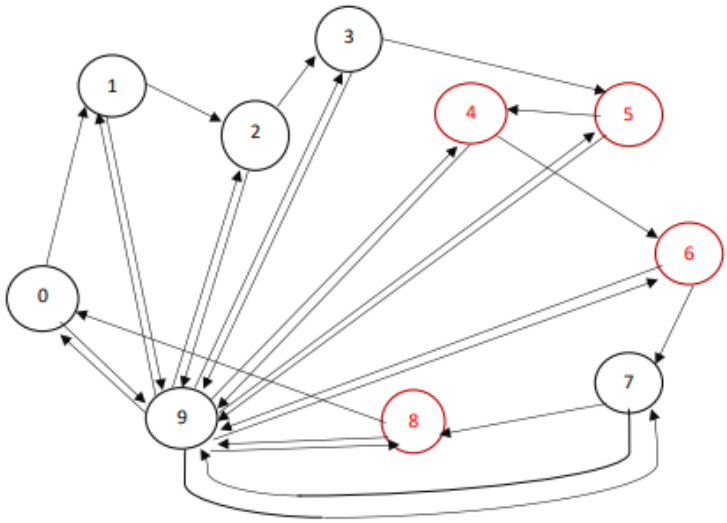
four_phases_minimal_2Tconnected_graph

وعند تنفيذ الخوارزمية Five_phases minimal 2−T−connected subgraph نلاحظ ان عدد وصلات الخرج النهائي هو24 كما هو واضح في الشكل (13) :



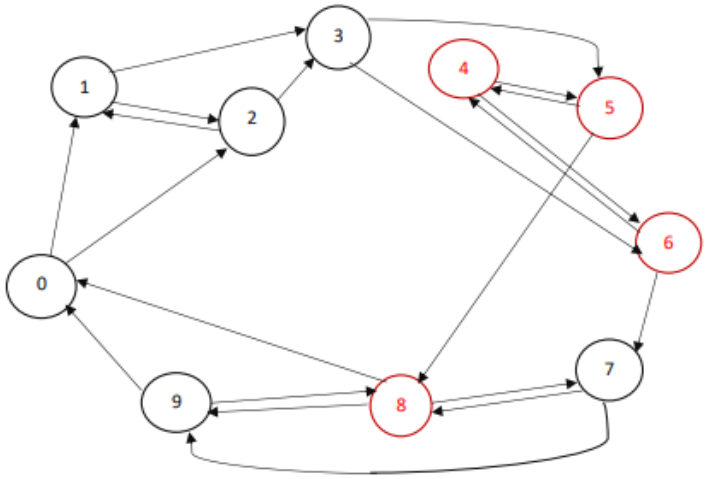
الشكل (13) بيان ناتج عن تطبيق خوارزمية Five_phases minimal 2-T-connected subgraph

عند تنفيذ الخوارزمية minimal_2Tconnected_graph_first_tree نلاحظ ان عدد وصلات الخرج النهائي 27 :



الشكل (14) بيان ناتج عن تطبيق خوارزمية
minimal_2Tconnected_graph_first_tree

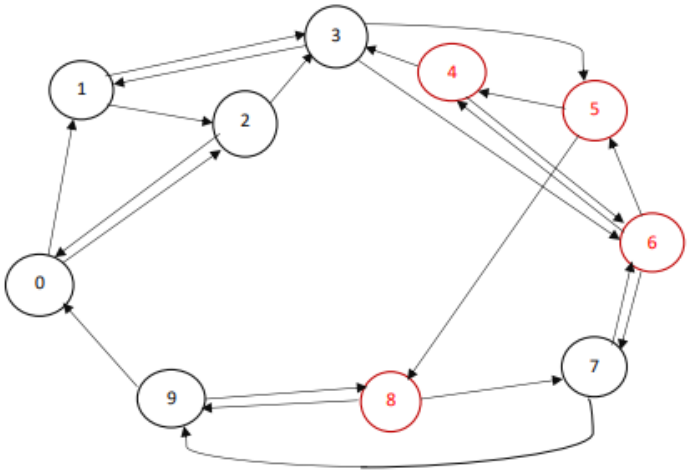
نلاحظ عند تنفيذ الخوارزمية minimal_2Tconnected_graph_double_trees عدد وصلات الخرج النهائي 21 :



الشكل (15) بيان ناتج عن تطبيق خوارزمية
minimal_2Tconnected_graph_double_trees

عند تنفيذ الخوارزميةminimal_2Tconnected_graph_double_trees_refined

نلاحظ ان عدد وصلات الخرج النهائي 22 :



الشكل (16) بيان ناتج عن تطبيق خوارزمية

minimal_2Tconnected_graph_double_trees_refined

تبين النتائج العملية للخوارزميات ان كل بيان جزئي محقق لخاصية 2−T−connected غير قابل للتخفيض يتضمن عدة عقد تحقق درجة دخولها ودرجة خروجها يساوي 2 . لاحظ ان الباحث Gevigney [3] قد برهن رياضيا انه يوجد عقدة على الأقل في كل بيان جزئي محقق لخاصية 2−T−connected غير قابل للتخفيض تحقق درجة دخولها يساوي درجة خروجها يساوي 2.

في المثال الذي قمنا بعرضه نلاحظ انه ليس فقط عقدة وانما العديد من العقد التي تحقق درجة دخولها يساوي درجة خروجها تساوي 2.

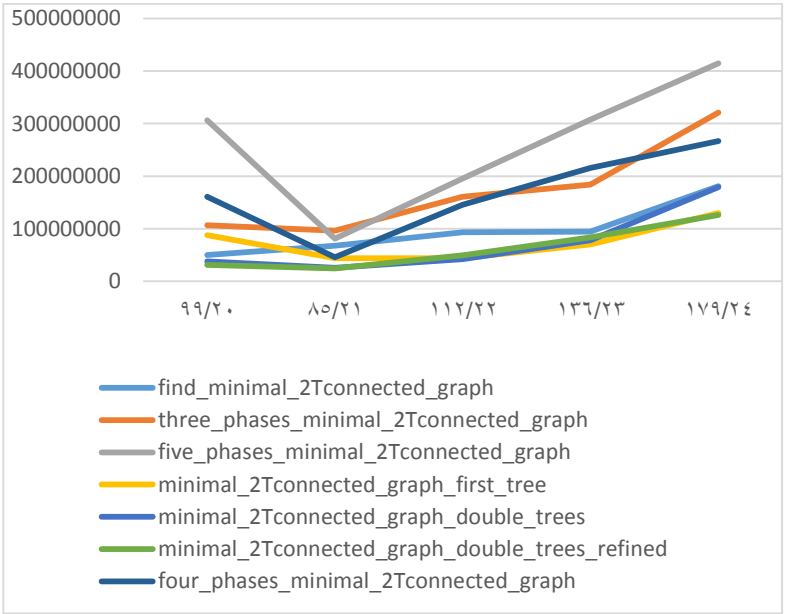
كما ان سبب انخفاض عدد الوصلات في خرج بعض الخوارزميات عن غيرها يعود الى ان الخرج يتضمن عقدة ذات درجة دخول او خروج اكبر من 2 ولكن الوصلات التي تتصل بهذه العقدة هي الوصلات الضرورية فقط للحفاظ على خاصية 2−T−connected ونلاحظ ان العقد التي تحقق هذه الميزة قد اختلفت من خوارزمية الى أخرى وان الخوارزميات التي انتجت اقل عدد من

الوصلات هي الخوارزميات التي نتج عنها عقد درجة دخولها او خروجها اكبر من 2 ولكن مجموع درجة الدخول والخروج لهذه العقد كان اقل من غيرها.

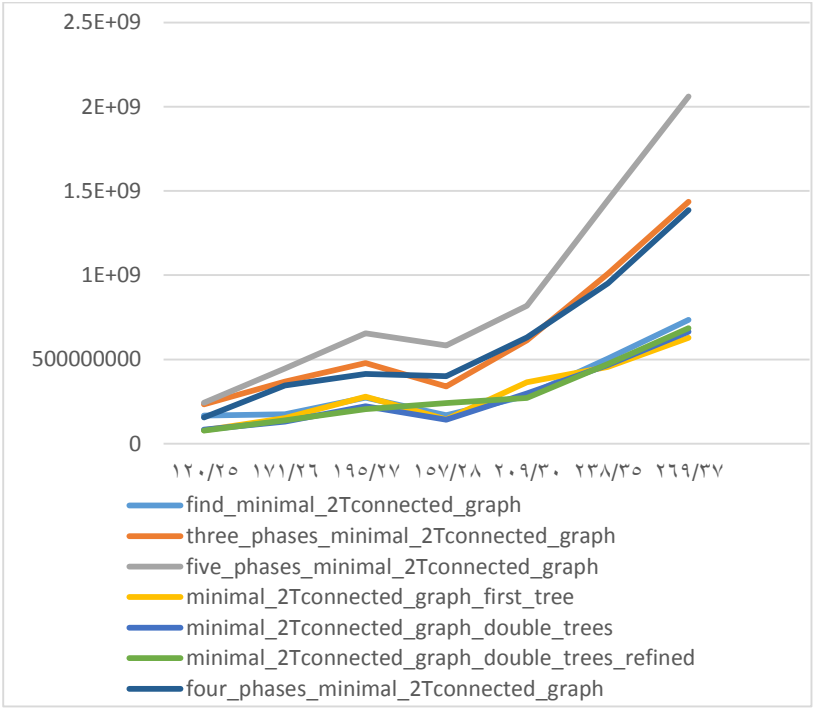
- **مقارنة الخوارزميات المحققة :**

_ **المقارنة من حيث زمن التنفيذ :**

تبين المخططات الموضحة من الشكل 17 وحتى الشكل 23 زمن تنفيذ الخوارزميات التي تم تحقيقها في هذا البحث. حيث ان المحور y يمثل زمن التنفيذ مقدراً ب nanosecond والمحور x يمثل $\frac{m}{n}=\frac{\text{عدد الوصلات}}{\text{عدد العقد}}$ وان جميع البيانات المذكورة في الشكلين قد تم توليدها عشوائيا وان المجموعة T قد تم توليدها عشوائيا أيضا لتتضمن أربعة عقد فقط.

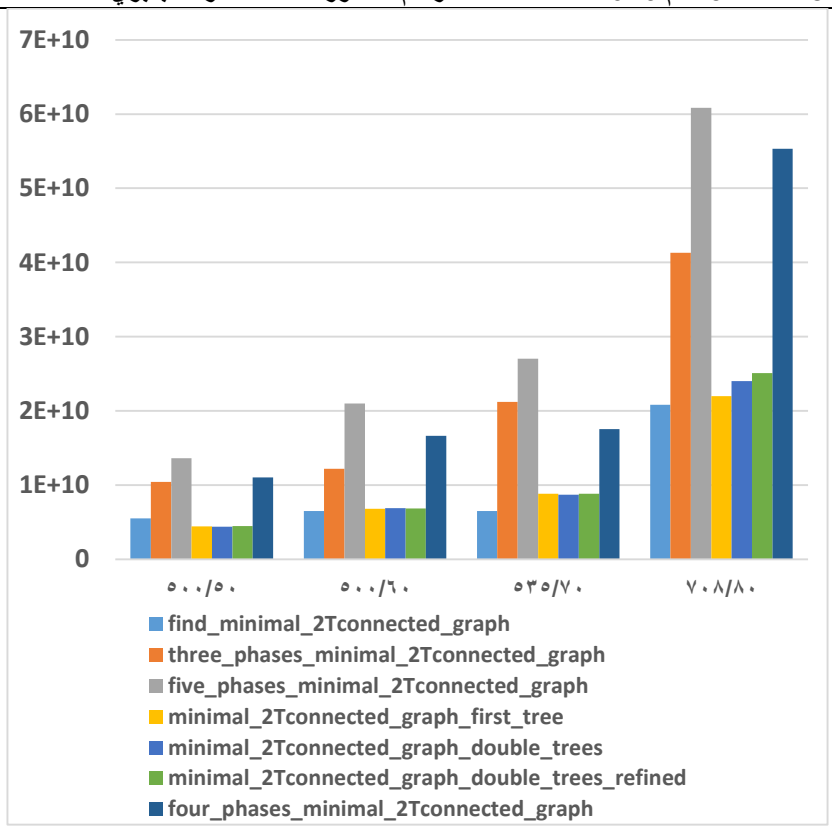


الشكل (17) زمن تنفيذ جميع الخوارزميات التي تم تحقيقها وذلك من اجل مجال عقد يتراوح بين 20 و25 ومن اجل |T|=4

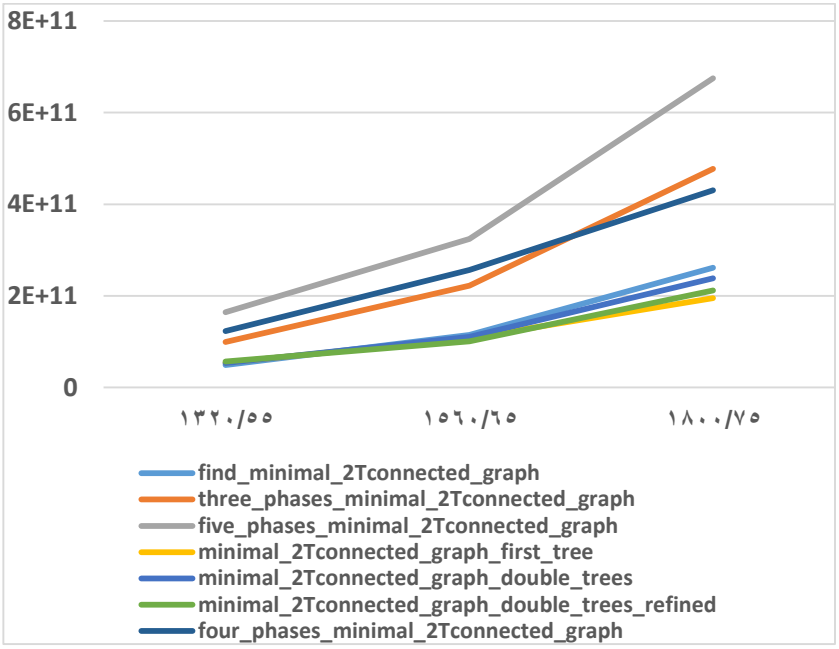


الشكل (18) زمن تنفيذ جميع الخوارزميات التي تم تحقيقها من اجل مجال عقد يتراوح بين 25 و40 ومن اجل |T|=4

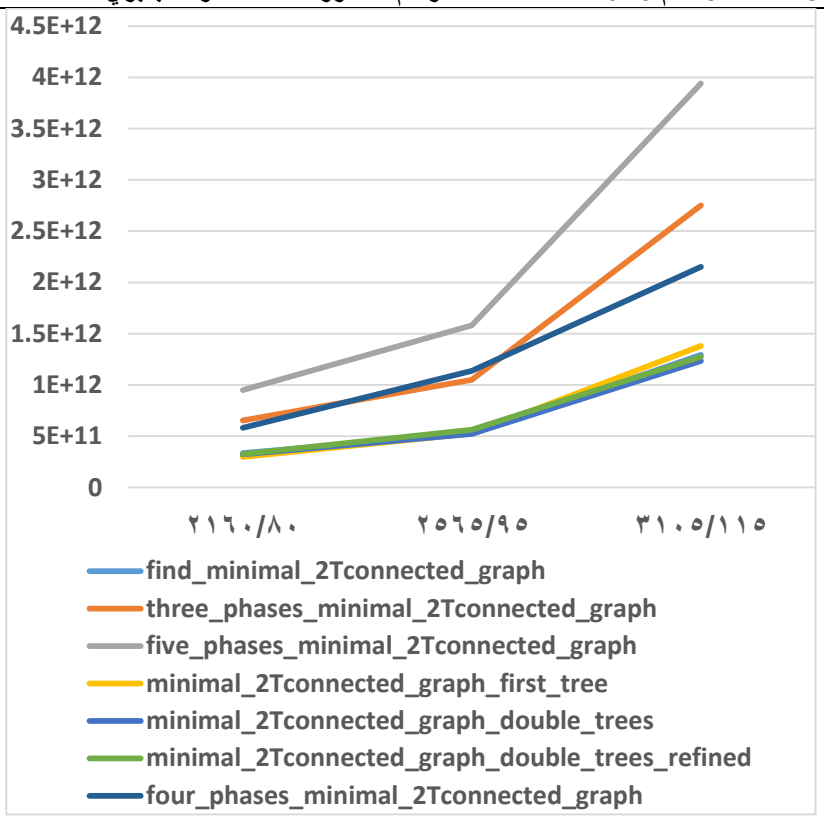
إن المخططات التالية تبين تجارب على عينات تصل حتى 200 عقدة ومن اجل قيم مختلفة لعدد الوصلات.



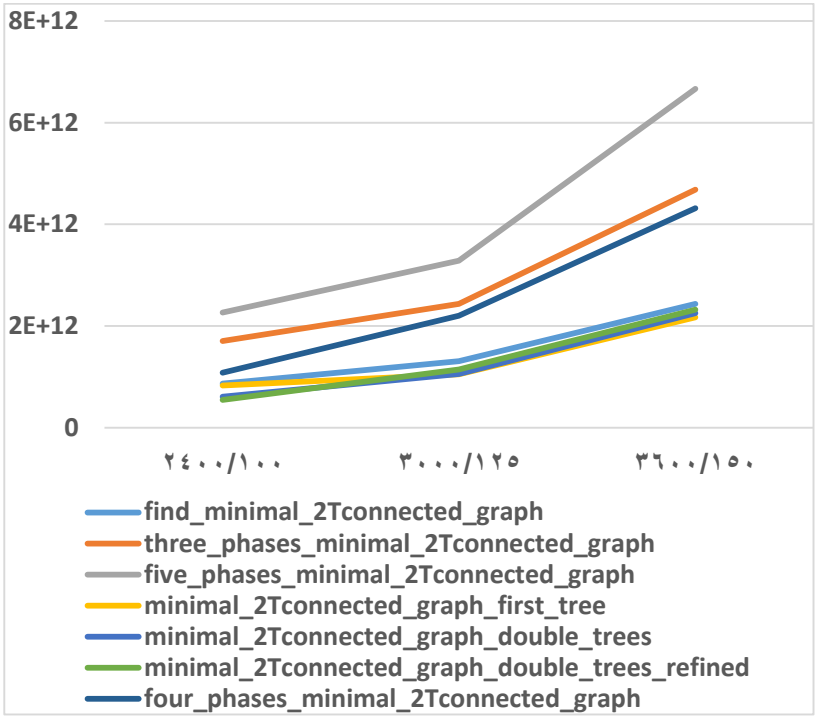
الشكل (19) زمن تنفيذ جميع الخوارزميات التي تم تحقيقها من اجل مجال عقد يتراوح بين 50 و80 ومن أجل |T|=4 و int init_number_edges = 500



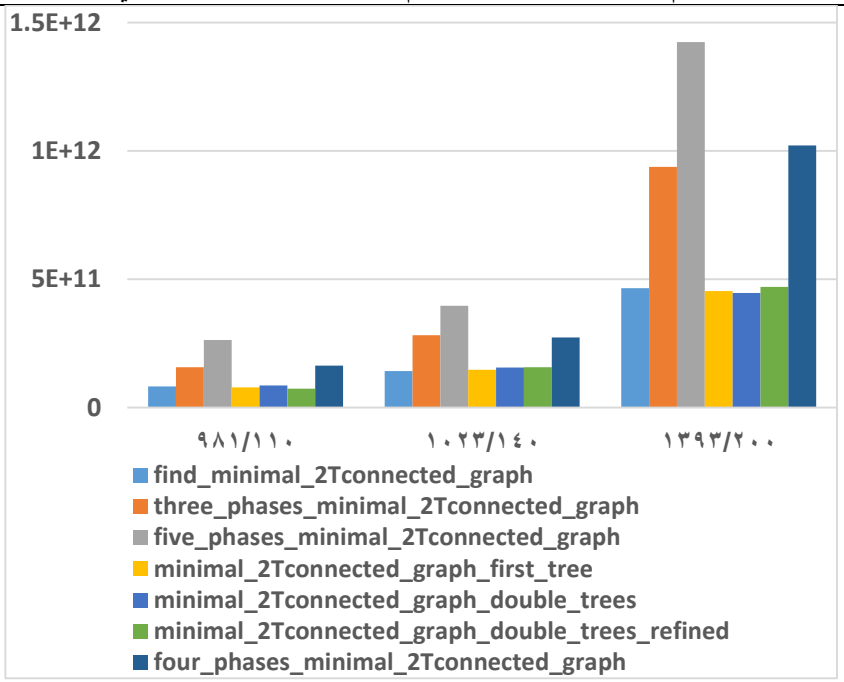
الشكل (20) زمن تنفيذ جميع الخوارزميات التي تم تحقيقها من اجل مجال عقد يتراوح بين 55 و75 ومن اجل |T|=4 و int init_number_edges = number_vertices * 24



الشكل (21) زمن تنفيذ جميع الخوارزميات التي تم تحقيقها من اجل مجال عقد يتراوح بين 80 و115 ومن اجل |T|=4 و int init_number_edges = number_vertices * 27



الشكل (22) زمن تنفيذ جميع الخوارزميات التي تم تحقيقها من اجل مجال عقد يتراوح بين 100 و150 ومن اجل |T|=4 و int init_number_edges = number_vertices * 24



الشكل (23) زمن تنفيذ جميع الخوارزميات التي تم تحقيقها من اجل مجال عقد يتراوح بين 110 و200 ومن اجل |T|=4 و int init_number_edges = 500

عند تجريب الخوارزميات المحققة على مجال عقد أكبر نلاحظ أن الفروقات بين الخوارزميات قد اتضحت أكثر حيث نلاحظ من المخططات السابقة تفوق واضح للخوارزميات:

minimal_2Tconnected_graph_first_tree ,

minimal_2Tconnected_graph_double_trees,

minimal_2Tconnected_graph_double_trees_refined

على بقية الخوارزميات من حيث زمن التنفيذ حيث ان الزمن الذي تطلبته لانجاز المهام كان اقل ، ونلاحظ أن خوارزمية five_phases_minimal_2Tconnected_graph تطلبت زمن تنفيذ أكثر من باقي الخوارزميات .

_ **المقارنة من حيث عدد وصلات الخرج:**

من اجل البيانات السابقة التي تم توليدها عشوائيا نوضح فيما يلي جودة الخوارزميات المحققة وذلك من خلال معرفة عدد وصلات خرج كل خوارزمية على كل بيان تم التجريب عليه.

four_phases_minimal_2Tconnected_graph	minimal_2Tconnected_graph_double_trees_refined	minimal_2Tconnected_graph_double_trees	minimal_2Tconnected_graph_first_tree	five_phases_minimal_2Tconnected_graph	three_phases_minimal_2Tconnected_graph	find_minimal_2Tconnected_graph	M	init_number_edges	N
42	42	43	43	45	44	44	99	76	20
47	45	45	44	45	47	46	85	84	21
46	47	49	49	49	49	53	112	92	22
50	49	49	51	51	50	54	136	101	23
55	52	52	58	54	58	66	179	110	24

الشكل (24) يبين عدد وصلات الخرج لكل خوارزمية

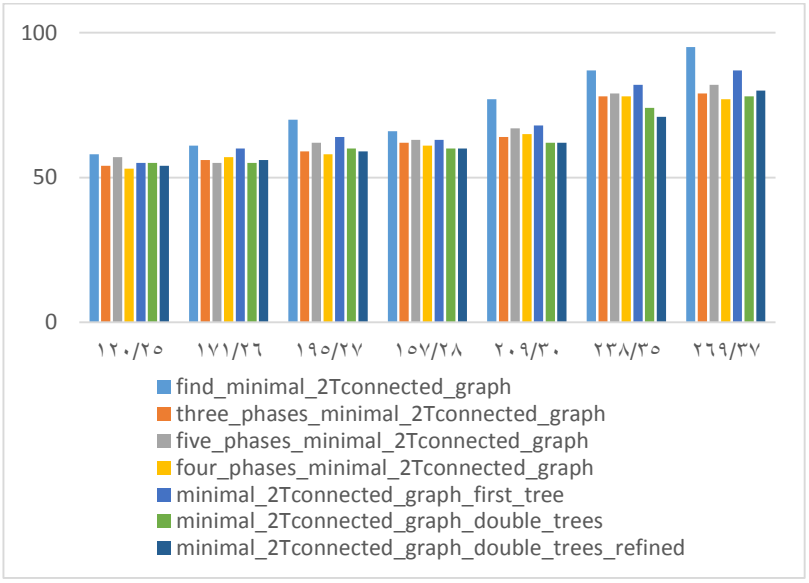
حيث 5/ (1 − number_vertices) * number_vertices = init_number_edges

نلاحظ من الشكل 24 ان عدد وصلات الخرج في جميع الخوارزميات المحققة لا يتجاوز ثلاثة اضعاف عدد العقد.

المخطط الموضح في الشكل 25 يبين عدد وصلات الخرج في الخوارزميات التي تم تحقيقها من اجل مجال عقد يتراوح بين 25و 40 ومن اجل |T|=4

init_number_edges = number_vertices * (number_vertices − 1) /5

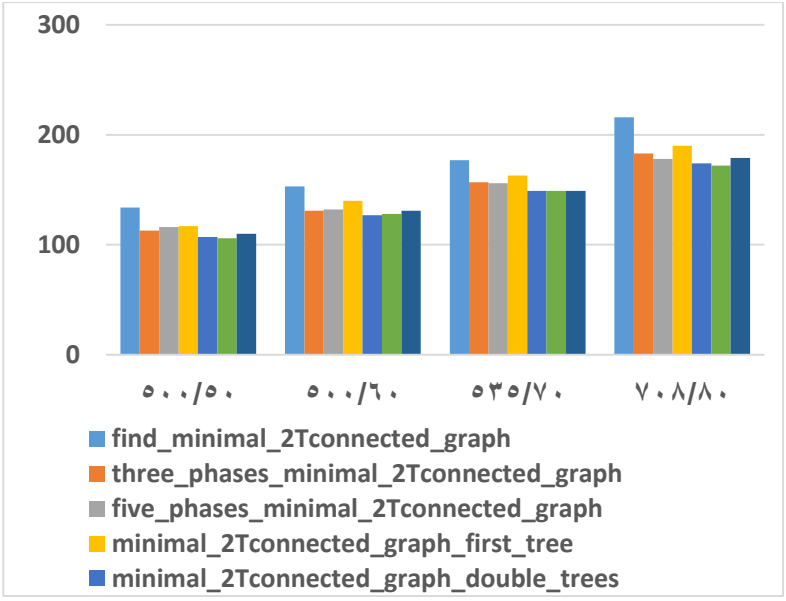
والمحور x يمثل $\frac{m}{n}$ =$\frac{\text{عدد الوصلات}}{\text{عدد العقد}}$



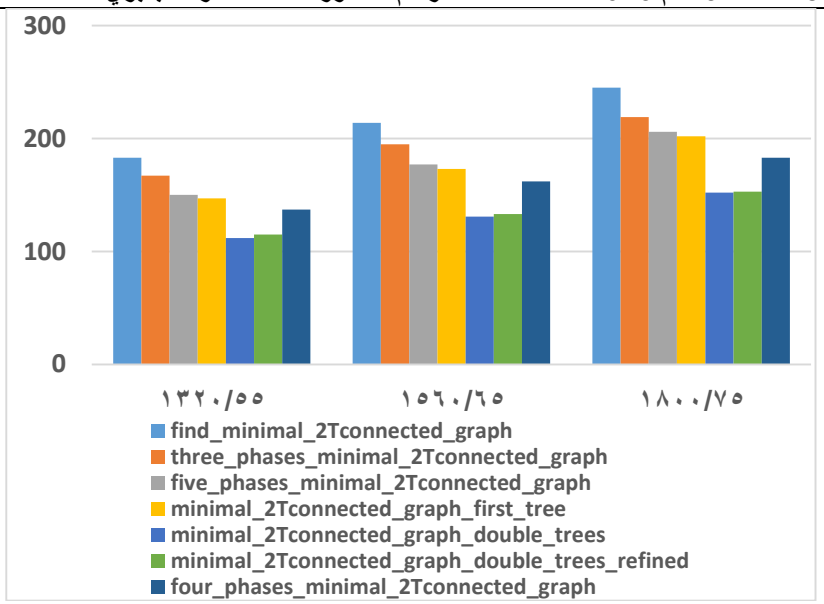
الشكل (25) عدد وصلات الخرج في الخوارزميات التي تم تحقيقها من اجل مجال عقد يتراوح بين 25 و 40

ومن اجل |T|=4

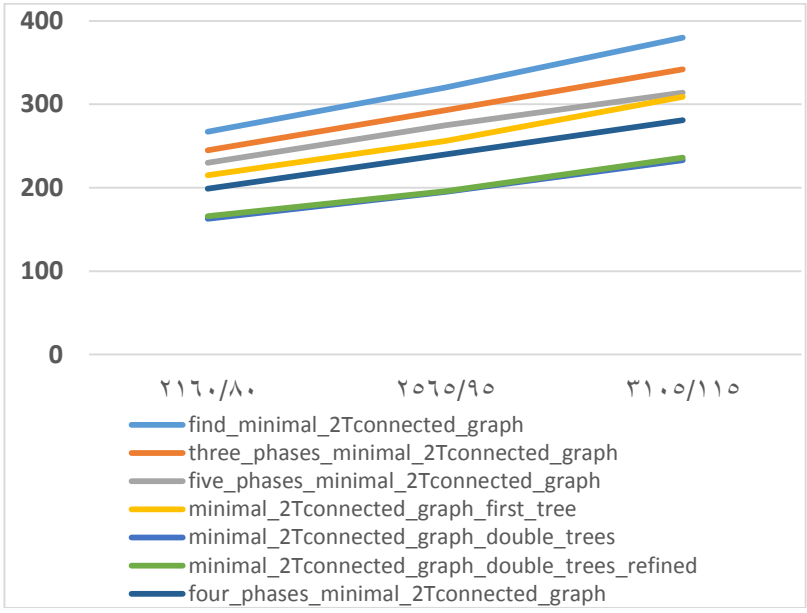
إن المخططات التالية تبين تجارب على عينات تصل حتى 200 عقدة ومن اجل قيم مختلفة لعدد الوصلات.



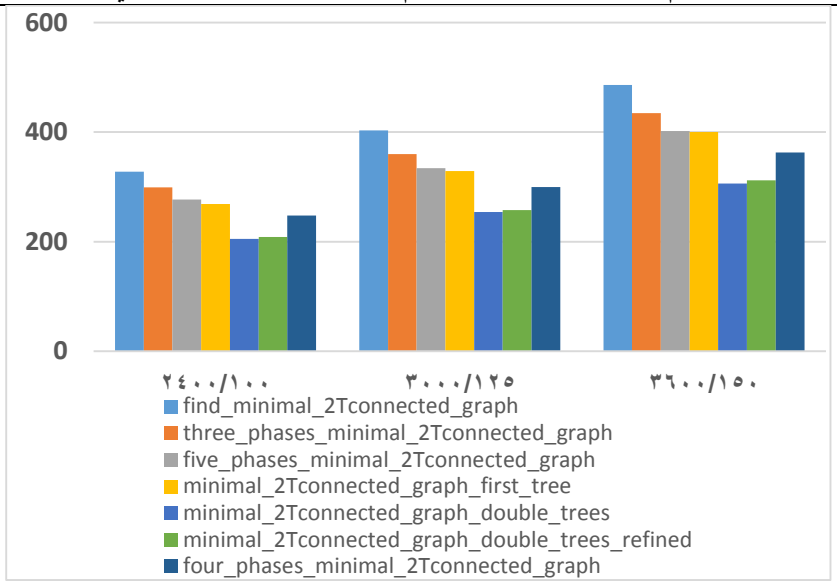
الشكل (26) عدد وصلات خرج جميع الخوارزميات التي تم تحقيقها من اجل مجال عقد يتراوح بين 50 و80 ومن اجل |T|=4 و int init_number_edges = 500



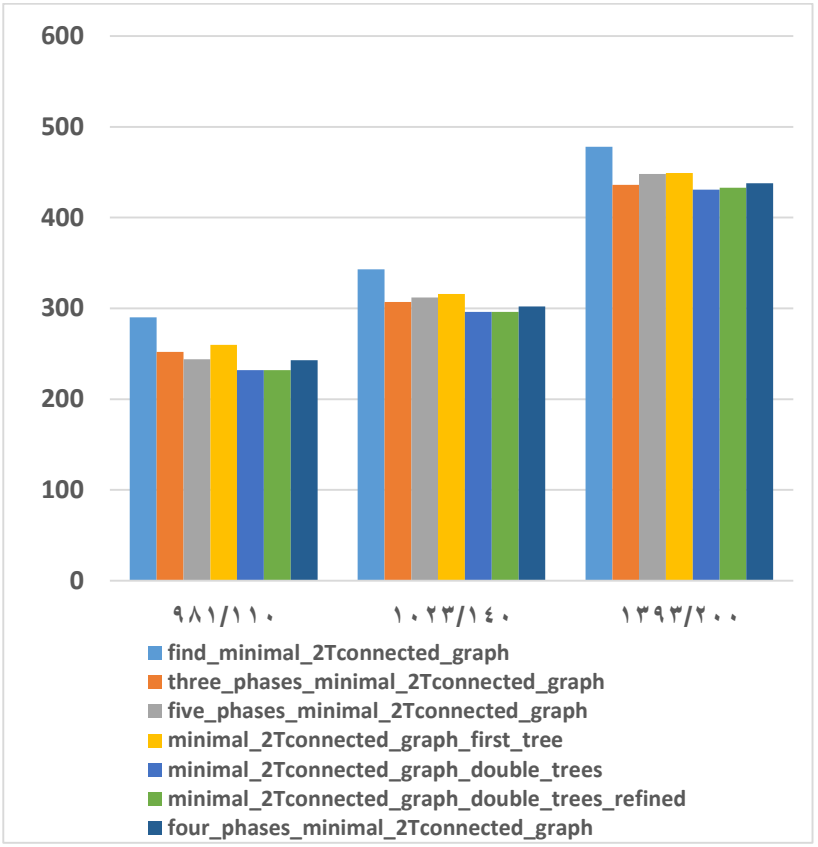
الشكل (27) عدد وصلات خرج جميع الخوارزميات التي تم تحقيقها من اجل مجال عقد يتراوح بين 55 و75 ومن اجل |T|=4 و int init_number_edges = number_vertices * 24



الشكل (28) عدد وصلات خرج جميع الخوارزميات التي تم تحقيقها من اجل مجال عقد يتراوح بين 80 و115 ومن اجل |T|=4 و int init_number_edges = number_vertices * 27



الشكل (29) عدد وصلات خرج جميع الخوارزميات التي تم تحقيقها من اجل مجال عقد يتراوح بين 100 و150 ومن اجل |T|=4 و int init_number_edges = number_vertices * 24



الشكل (30) عدد وصلات خرج جميع الخوارزميات التي تم تحقيقها من اجل مجال عقد يتراوح بين 110 و200 ومن اجل |T|=4 و int init_number_edges = 500

عند تجريب الخوارزميات المحققة على مجال عقد أكبر نلاحظ أن الفروقات بين الخوارزميات قد اتضحت أكثر حيث نجد ان الخوارزميتين

minimal_2Tconnected_graph_double_trees ,

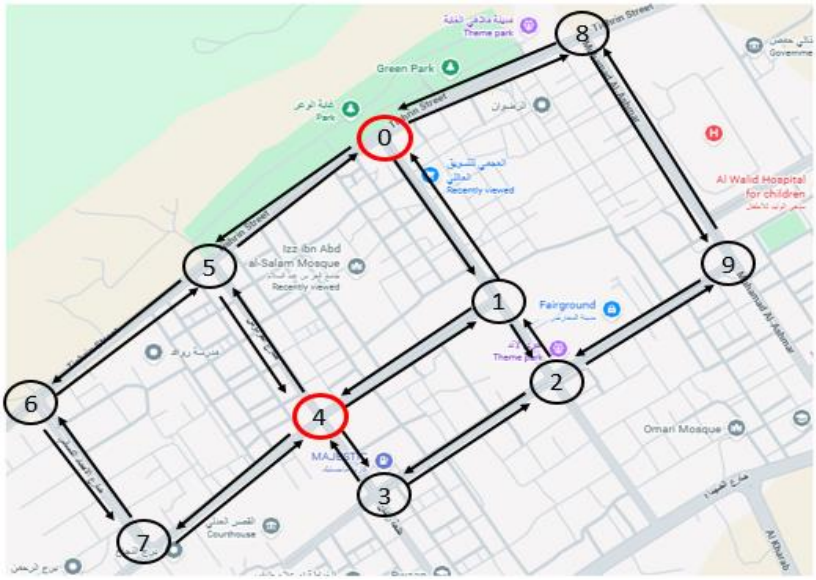
minimal_2Tconnected_graph_double_trees_refined

بمعظم الأحيان تعطي خرج افضل من غيرها من حيث عدد وصلات الخرج .

- **تجريب الخوارزميات على دخل حقيقي :**

إن البيان الموجّه الموضح في الشكل (31) الذي يمثل جزء من حي الوعر في حمص يحقق خاصية 2−T connected graph لأنه يحافظ على إمكانية الاتصال بقوة في حال حدوث عطل في وصلة وكما يحافظ على إمكانية الاتصال بقوة في حال فشل أي عقدة من عُقَد المجموعة T حيث T={0,4}. سنقوم باستخدام هذا البيان كبيان دخل لاختبار الخوارزميات التي صممناها حيث سيكون خرج هذه الخوارزميات هو بيان يحقق خاصية 2−T connected graph بأقل عدد ممكن من الوصلات .

إنّ البيانات الموجّهة في الأشكال (32) حتى (38) تمثل الخرج الناتج عن تطبيق الخوارزميات المحققة على بيان الدخل الموجود في الشكل (31).

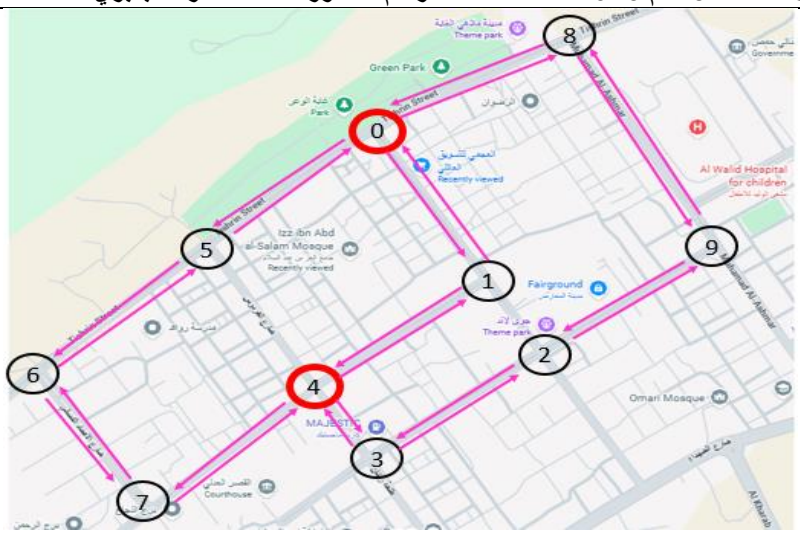


الشكل(31) بيان موجّه يمثل بيان دخل حقيقي

عند تنفيذ خوارزمية Find_ minimal 2−T−connected subgraph أصبح عدد الوصلات النهائي للخرج هو 22 وتطلبت زمن تنفيذ (11828600 nanosecond) والبيان الناتج موضّح في الشكل(32) .

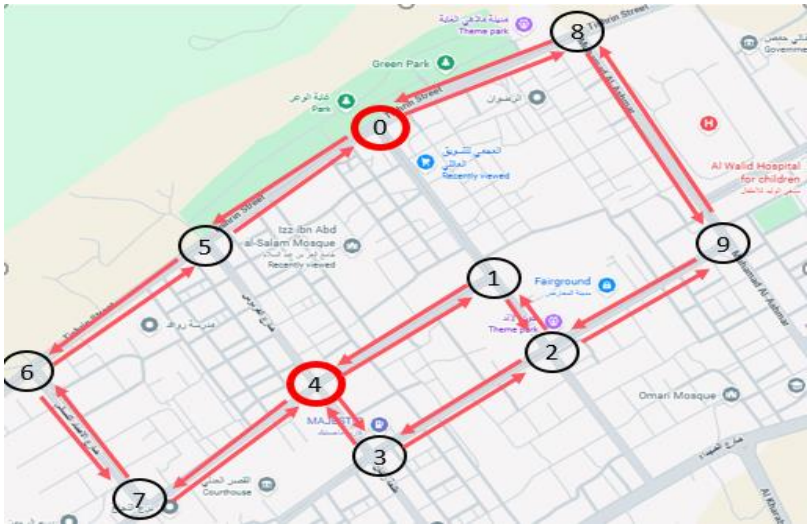
الشكل (32) بيان ناتج عن تطبيق خوارزمية Find_ minimal 2−T−connected subgraph

عند تنفيذ الخوارزمية Three_phases_ minimal 2−T−connected subgraph على بيان الدخل كان شكل البيان الناتج كما هو موضح في الشكل (33) وعدد وصلات الخرج هو 22 وزمن تنفيذ الخوارزمية هو (48336400 nanosecond).



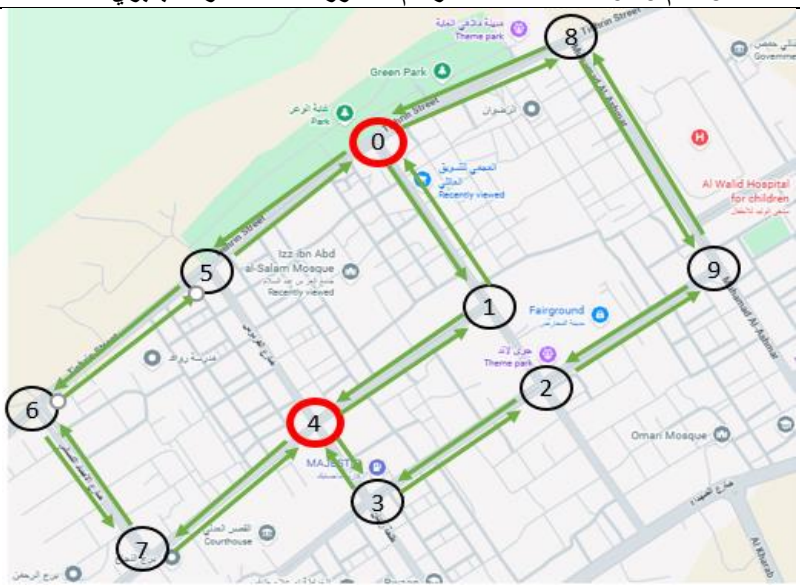
الشكل(33) بيان ناتج عن تطبيق خوارزمية Three_phases_ minimal 2-T- connected subgraph

وعند تنفيذ الخوارزمية Five_phases minimal 2-T-connected subgraph نلاحظ أن عدد وصلات الخرج النهائي هو 22 والبيان الناتج موضّح في الشكل (34) تطلبت زمن تنفيذ (58093300 nanosecond).



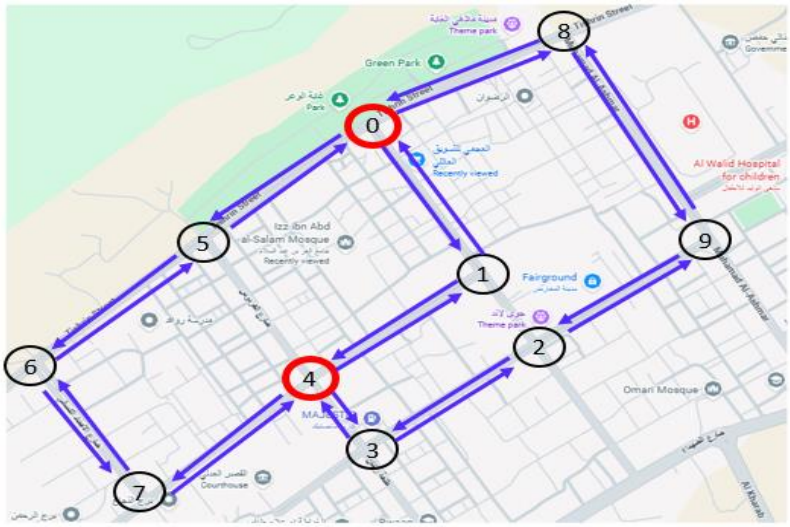
الشكل(34) بيان ناتج عن تطبيق خوارزمية Five_phases minimal 2-T- connected subgraph

عند تنفيذ الخوارزمية minimal_2Tconnected_graph_first_tree على بيان الدخل تطلبت زمن تنفيذ (14877100 nanosecond) وكان عدد وصلات الخرج النهائي هو 22 إن البيان الناتج موضّح في الشكل (35) .



الشكل(35) بيان ناتج عن تطبيق خوارزمية minimal_2Tconnected_graph_first_tree

يبين الشكل (36) خرج الخوارزمية minimal_2Tconnected_graph_double_trees وعدد وصلات الخرج النهائي هو22 وبزمن تنفيذ (5305300 nanosecond) .



الشكل(36) بيان ناتج عن تطبيق خوارزمية
minimal_2Tconnected_graph_double_trees

يبين الشكل (37) خرج خوارزمية
minimal_2Tconnected_graph_double_trees_refined ونلاحظ أن عدد وصلات الخرج النهائي هو22 وتطلبت زمن تنفيذ قدره (802300 nanosecond).

الشكل(37) بيان ناتج عن تطبيق
خوارزمية minimal_2Tconnected_graph_double_trees_refined

عند تنفيذ خوارزمية four_phases_minimal_2Tconnected_graph تطلبت زمن تنفيذ قدره (23971600 nanosecond) والبيان الناتج موضح في الشكل (38) وعدد وصلات الخرج النهائي هو 22 .

الشكل(38) بيان ناتج عن تطبيق خوارزمية
four_phases_minimal_2Tconnected_graph

6. الاستنتاجات والتوصيات :

قمنا بتصميم خوارزميات قادرة على إيجاد حلول تقريبية وخوارزميات معدلة لايجاد بيان جزئي محقق لخاصية 2−T−connected حيث تتضمن هذه الخوارزميات اكثر من مرحلة والهدف من هذه المراحل دراسة تأثير هذه المرحلة على شكل البيان الناتج وعدد وصلاته. لا شك ان وجود هذه المراحل سينعكس سلبا على زمن التنفيذ والفائدة الحقيقة هي تخفيض عدد وصلات الخرج وان تعقيد جميع الخوارزميات التي حققناها هو زمن كثير حدود. تبين النتائج العملية ان عدد وصلات الخرج هي اقل من أربعة اضعاف عدد العقد

برهنا رياضياً ان أي بيان غير قابل للتخفيض يحقق خاصية 2−T−connected يتضمن على الأكثر 12n وصلة عندما تكون |T|=4 كما يلي :

نظرية 1:

ليكن $G = (V, E)$ بيان يحقق خاصية 2−T−connected من اجل T حيث $|T| = 4$. عندئذ يوجد بيان جزئي (V, E_T) من هذا البيان بحيث ان هذا البيان الجزئي يحقق الشرطين التاليين :

1_ البيان الجزئي (V, E_T) يحقق خاصية 2−T−connected

2_ عدد وصلات E_T لا يتجاوز 12n

البرهان :

لتكن E_1 مجموعة من الوصلات ضمن البيان $G = (V, E)$ بحيث يحقق ما يلي :

(V, E_1) بيان قابل للتخفيض مضاعف الترابط وصلياً. ,لقد برهن ادمونس [23] ومادر [4] ان كل بيان مضاعف الترابط وصليا وغير قابل للتخفيض لا يمكن ان يتضمن اكثر من 4n وصلة . وبالتالي $|E_1| \leq 4n$

الآن سنقوم بتشكيل بيان جزئي متصل بقوة بعد حذف كل عقدة من العقد الموجودة في T

أي من اجل $T = \{ V_0, V_1, V_2, V_3 \}$

نشكل E_{V_0} بيان متصل بقوة بعد حذف العقدة V_0

E_{V_1} بيان متصل بقوة بعد حذف العقدة V_1

E_{V_2} بيان متصل بقوة بعد حذف العقدة V_2

E_{V_3} بيان متصل بقوة بعد حذف العقدة V_3

لاحظ انه يمكننا القيام بذلك من خلال DFS

وبالتالي

$$|E_{V_0}| \leq 2n - 2$$
$$|E_{V_1}| \leq 2n - 2$$
$$|E_{V_2}| \leq 2n - 2$$
$$|E_{V_3}| \leq 2n - 2$$

كما ان البيان الجزئي $(V,\ E_T \cup E_{V_0} \cup E_{V_1} \cup E_{V_2} \cup E_{V_3})$

هو بيان متصل يحقق خاصية 2−T−connected

أي البيان الجزئي الذي تتكون وصلاته من المجموعات E_T ,E_{V_0} , E_{V_1} , E_{V_2} , E_{V_3}

وبالتالي

$$| E_T \cup E_{V_0} \cup E_{V_1} \cup E_{V_2} \cup E_{V_3} | = |E_T| + |E_{V_0}| + |E_{V_1}| + |E_{V_2}| + |E_{V_3}| \leq 4n + 2n - 2 + 2n - 2 + 2n - 2 + 2n - 2 < 4n + 8n = 12n$$

وفقاً للنظرية السابقة اذا كان لدينا بيان غير قابل للتخفيض يحقق خاصية 2−T−connected فإنه يمكننا الحصول على بيان حزئي منه يحقق خاصية 2−T−connected بحيث ان عدد وصلاته لا يتجاوز 12n

ولكن لاحظ ان هذا البيان الجزئي يحقق شروط البيان الجزئي المضاعف الترابط للمجموعة T وغير قابل للتخفيض . وبالتالي نلاحظ انه يتطابق معه وعليه فإن عدد وصلات أي بيان غير قابل للتخفيض لا يمكن ان يتجاوز 12n .

نستنتج مما سبق أنه اذا كان $G = (V, E)$ بياناً يحقق خاصية 2−T−connected من أجل T حيث $|T| = 2$. عندئذ يوجد بيان جزئي (V, E_T) من هذا البيان بحيث إن هذا البيان الجزئي يحقق الشرطين الآتيين :

1_ البيان الجزئي (V, E_T) يحقق خاصية 2−T−connected

2_ عدد وصلات E_T لا يتجاوز 8n.

نظرية 2:

ان الخوارزميات التي تنتج بيان جزئي غير قابل للتخفيض ويحقق خاصية 2−T−connected هي خوارزميات قادرة على إيجاد حل تقريبي لا يتجاوز ستة اضعاف الحل المثالي عندما تكون |T|=4 (أي ان عامل تقريبها 6)

البرهان :

وفقاً للنظرية 1 ان خرج هذه الخوارزميات هو بيان جزئي لا يمكن ان يتضمن اكثر من 12n وصلة .

كما ان أي حل مثالي يتضمن على الأقل 2n وصلة لان كل عقدة لها indegree و outdegree لا يقل عن 2 لان درجة دخول كل عقدة يجب الا تقل عن 2 لان البيان مضاعف الترابط وصليا.

وبالتالي فان عامل التقريب هو :

$$\frac{\text{عدد وصلات بيان غير قابل للتخفيض يحقق } 2-\mathrm{T}-\text{connected}}{\text{عدد وصلات الحل المثالي}} = \frac{12n}{2n} = 6$$

نستنتج أيضاً أن الخوارزميات التي تنتج بياناً جزئياً غير قابل للتخفيض ويحقق خاصية 2−T− connected هي خوارزميات قادرة على إيجاد حل تقريبي لا يتجاوز أربعة أضعاف الحل المثالي عندما تكون |T|=2 (أي أن عامل تقريبها 4)

يمكن تعميم البرهان السابق لبرهان أن عامل التقريب في الحالة العامة مهما يكن عدد عقد T هو |T|+2 لأن البيان الغير قابل للتخفيض والمضاعف الترابط للمجموعة T يتضمن على الأكثر 2|T|+4 وصلة.

لاحظ ان النتائج العملية للخوارزميات تشير الى عامل تقريب افضل من 6 (أي اقل من العدد 6)

نظرية 3 :

ليكن (V, E) بياناً موجّهاً يحقق خاصية 2−T−connected من أجل مجموعة عقد $T \subseteq V$. عندئذٍ يوجد بيان جزئي (V, E_T) من هذا البيان بحيث أن هذا البيان الجزئي يحقق خاصية 2−T−connected وبحيث أن $|E_T| \leq 12n$

البرهان :

لقد أثبت جابري في [27] أنه يمكن تشكيل بيان جزئي (V, E_1) من البيان (V, E) بحيث أن (V, E_1) متصل بقوة والعقد المفصلية القوية في البيان الجزئي (V, E_1) تتطابق مع العقد المفصلية القوية للبيان (V, E) وأن عدد الوصلات $|E_1|$ لا يتجاوز 8n حيث اننا نقول عن عقدة انها عقدة مفصلية قوية اذا كان حذفها يؤدي إلى فقدان خاصية الاتصال بقوة للبيان (V, E).
لاحظ أن المجموعة T لا يمكن أن تتضمن أي عقدة مفصلية قوية لأن حذف أي عقدة منها لا يؤثر على خاصية الاتصال بقوة .

نعلم أيضاً من نتائج مادر [4] وأدمونس [23] أنه يوجد مجموعة جزئية $E_2 \subseteq E$ بحيث أن البيان الجزئي (V, E_2) مضاعف الترابط وصلياً (2−edge−connected) وغير قابل للتخفيض وبحيث أن $|E_2| \leq 4n$.

لاحظْ أن البيان الجزئي $(V, E_1 \cup E_2)$هو بيان متصل بقوة ويحقق ما يأتي:

1− من أجل أي وصلة $e \in (E_1 \cup E_2)$ فإن البيان الجزئي $(V, (E_1 \cup E_2) \backslash \{e\})$ هو بيان متصل بقوة .

2− العقد المفصلية القوية في البيان الجزئي$(V, E_1 \cup E_2)$ تتطابق مع العقد المفصلية القوية للبيان (V, E) .

وبما أن T لا يمكن أن تتضمن أي عقدة مفصلية قوية وبالتالي فإن البيان الجزئي $(V, E_1 \cup E_2)$ يحقق خاصية 2−T−connected كما أن عدد وصلات هذا البيان الجزئي هو

$$|E_1 \cup E_2| \leq |E_1| + |E_2| \leq 8n + 4n = 12n$$

من النظرية السابقة نستنتج أن جميع الخوارزميات التقريبية المقترحة في هذا البحث بعامل تقريب 6 في الحالة العامة مهما كان عدد العقد ضمن المجموعة T.

انطلاقاً من النتائج الجيدة التي تم الحصول عليها في هذا البحث يمكننا اقتراح مجموعة من النقاط مثل تصميم وتطوير خوارزميات معدلة أخرى للحصول على نتائج جيدة ايضاً يمكن الاستفادة من البرهان الرياضي المطروح لما له من قدرة على دعم بناء استنتاجات جديدة.

7. المراجع:

[1] Garey, M. R., & Johnson, D. S. (1979). Computers and intractability: A guide to the theory of NP-completeness. San Francisco, CA: W. H. Freeman.

[2] Cheriyan, J., Thurimella, R. 2000, Approximating minimum-size k-connected spanning subgraphs via matching, SIAM J. Comput., 30(2), 528-560.

[3] Durand de Gevigney, O., & Szigeti, Z. (2018). On minimally 2-T-connected directed graphs. Discrete Applied Mathematics, 250, 183-185.

[4] Mader, W. (1985). Minimal n-fach zusammenhängenden Digraphen. Journal of Combinatorial Theory, Series B, 38(1), 102-117.

[5] Cormen, T. H., Leiserson, C. E., Rivest, R. L., & Stein, C. (2022). Introduction to algorithms (4th ed.). MIT Press.

[6] Dandeh, A. (2021). Minimum 2-vertex strongly connected spanning subgraph problem (Master's thesis, Tishreen University, Syria).

[7] Alkinj, N. (2023). Approximation algorithms for calculating a 2-edge-connected directed subgraph of minimum size (Master's thesis, Tishreen University, Syria).

[8] Georgiadis, L., Italiano, G. F., & Karanasiou, A. (2020). Approximating the smallest 2-vertex connected spanning subgraph of a directed graph. Theoretical Computer Science, 807, 185–200. https://doi.org/10.1016/j.tcs.2019.09.028

[9] Firmani, D., Georgiadis, L., Italiano, G. F., Laura, L., & Santaroni, F. (2016). Strong articulation points and strong bridges in large scale graphs. Algorithmica, 74(3), 1123–1147.

[10] Jaberi, R. (2021). Minimum 2-vertex strongly biconnected spanning directed subgraph problem. Discrete Mathematics Letters, 7, 40–43.

[11] Wu, Z., & Grumbach, S. (2010). Feasibility of motion planning on acyclic and strongly connected directed graphs. Discrete Applied Mathematics, 158(9), 1017–1028. https://doi.org/10.1016/j.dam.2009.12.011

[12] Mader, W. (2002). On vertices of outdegree n in minimally n-connected digraphs. Journal of Graph Theory, 39(2), 129–144. [13] Tarjan, R. E. (1972). Depth-first search and linear graph algorithms. SIAM Journal on Computing, 1(2), 146–160.

[14] Hörsch, F., & Szigeti, Z. (2023). The complexity of 2-vertex-connected orientation in mixed graphs. Discrete Optimization, 48(1), 100774.

[15] Habib, A. (2023). An experimental study of approximation algorithms for minimum 2-vertex strongly biconnected spanning directed subgraph problem (Master's thesis, Tishreen University, Syria).

[16] Nuutila, E., & Soisalon-Soininen, E. (1994). On finding the strongly connected components in a directed graph. Information Processing Letters, 49(1), 9–14.

[17] Gabow, H. N. (2000). Path-based depth-first search for strong and biconnected components. Information Processing Letters, 74(3–4), 107–114.

[18] Tarjan, R. E. (1972). Depth-first search and linear graph algorithms. SIAM Journal on Computing, 1(2), 146–160. https://doi.org/10.1137/0201010

[19] Mehlhorn, K., Näher, S., & Sanders, P. (2017). Engineering DFS-based graph algorithms. arXiv preprint arXiv:1703.10023.

[20] Sanders, P., Mehlhorn, K., Dietzfelbinger, M., & Dementiev, R. (2019). Sequential and parallel algorithms and data structures (1st ed.).

Cham: Springer Nature Switzerland AG. https://doi.org/10.1007/978-3-030-25209-0

[21] Italiano, G. F., Laura, L., & Santaroni, F. (2012). Finding strong bridges and strong articulation points in linear time. Theoretical Computer Science, 447, 74–84.

[22] Georgiadis, L. (2010). Testing 2-vertex connectivity and computing pairs of vertex-disjoint s-t paths in digraphs. In S. Abramsky, C. Gavoille, C. Kirchner, F. M. auf der Heide, & P. Spirakis (Eds.), Proceedings of the 37th International Colloquium on Automata, Languages and Programming (ICALP 2010) (pp. 433–442). Berlin, Heidelberg: Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-642-14165-2_37

[23] Edmonds, J. (1972). Edge-disjoint branchings. In R. Rustin (Ed.), Proceedings of the Conference on Combinatorial Algorithms (pp. 91–96). New York: Algorithmics Press.

[24] Georgiadis, L. (2011). Approximating the smallest 2-vertex connected spanning subgraph of a directed graph.In C. Demetrescu & M. Halldórsson (Eds.), Proceedings of the 19th Annual European Symposium on Algorithms (ESA 2011) (pp. 13–24). Berlin, Heidelberg: Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-642-23719-5_2

[25] Georgiadis, L., Italiano, G. F., & Karanasiou, A. (2020). Approximating the smallest 2-vertex connected spanning subgraph of a directed graph. Theoretical Computer Science, 807, 185–200. https://doi.org/10.1016/j.tcs.2019.09.028

[26] Menger, K. (1927). Zur allgemeinen Kurventheorie. *Fundamenta Mathematicae, 10*, 96–115.

[27] Jaberi, R. (2015). Computing the 2-blocks of directed graphs. *RAIRO - Theoretical Informatics and Applications, 49*(2), 93–119.