تقييم أداء شيفرة HAPPY/Steane الكمومية الهولوغرافية تحت أخطاء باولي النقية (X,Z,Y) وخطأ إزالة الاستقطاب (Depolarizing Error)

طالب الماجستير: مجد واصل سالم
جامعة حمص – كلية الهندسة الميكانيكية والكهربائية –قسم هندسة الالكترونيات والاتصالات
إشراف الدكتور: اسبر نسيم ابراهيم

الملخص

تعد الشيفرات الكمومية الهولوغرافية من أبرز المقاربات الحديثة لربط مفاهيم تصحيح الأخطاء الكمومية بمبدأ الهولوغرافيا ومراسلات الحافة والحجم (bulk-boundary) بوصفها نموذجاً بسيطاً وقابلاً للتحليل، من بين هذه الشيفرات، تبرز شيفرة Happy مبنية باستخدام تنسورات مثالية، مرتبة على شكل هرمي وقادرة على تمثيل الترميز الكمومي الهولوغرافي بطريقة هندسية واضحة. في هذا العمل، نقوم ببناء شيفرة HAPPY/Steane بمعدل صفري، وهي عبارة عن شيفرة يتم فيها دمج شيفرتين وهما شيفرة Happy وشيفرة Steane وتقييم أداءها تحت أخطاء باولي النقية (X,Y,Z) وخطأ إزالة الاستقطاب وذلك ضمن نموذج ضجيج مستقل على الكيوبتات الفيزيائية. نعتمد في تحليلنا علىInteger Optimisation Decoder. نقوم بدراسة معدلات الاسترجاع

بوصفها دالة في احتمال الخطأ الفيزيائي، مع مقارنة سلوك الشيفرة تحت أخطاء الانقلاب البتّي (X) وأخطاء الانقلاب الطوري (Z) وأخطاء من النوع (Y) وخطأ إزالة الاستقطاب (Depolarizing Error). تظهر النتائج ان شيفرة HAPPY/Steane تمتلك عتبة تصحيح تصل تقريباً الى 15% لكل من الأنواع الأربعة من الأخطاء مع اختلاف بمعدلات الاسترجاع لكل نوع من الأخطاء. كما تظهر النتائج ان معدلات الاسترجاع تزداد بزيادة عدد طبقات الشيفرة (R). تمت عملية المحاكاة باستخدام البيئة البرمجية Google Colabوتم من خلالها دراسة أداء الشيفرة.

كلمات مفتاحية: شيفرة Happy، شيفرة Steane، أخطاء باولي، خطأ إزالة الاستقطاب، Integer Optimisation Decoder

Performance Evaluation of the Holographic Quantum Happy/Steane Code under Pure Pauli Errors (X, Z, Y) and Depolarizing Error

Abstract

Holographic quantum codes represent one of the most prominent modern approaches for connecting the concepts of quantum error correction with the holographic principle and the bulk–boundary correspondence, offering a simple and analytically tractable model. Among these codes, the Happy code stands out as it is constructed using perfect tensors arranged in a hierarchical structure, enabling a clear geometric realization of holographic quantum encoding.In this work, we construct a zero-rate Happy/Steane code by integrating the Happy and Steane codes, and we evaluate its performance under pure Pauli errors of types (X, Y, Z) as well as depolarizing noise within an independent noise model acting on the physical qubits. Our analysis employs an Integer Optimisation Decoder. We study the logical recovery rates as a function of the physical error probability and compare the code's behavior under bit-flip (X), phase-flip (Z), Y-type Pauli errors, and depolarizing errors.The results show that the Happy/Steane code exhibits an error-correction threshold of approximately 15% for all four error types, with variations in recovery performance depending on the specific error model. Furthermore, the recovery rates improve as the number of code layers (R) increases. Simulations were performed using the Google Colab computational environment to evaluate the code's performance.

Keywords: Integer Optimisation Decoder, Happy Code Steane Code, Pauli

مقدمة

يُعد تصحيح الأخطاء الكمومية حجر الأساس لتحقيق الحوسبة الكمومية واسعة النطاق، نظرًا للهشاشة الشديدة للحالات الكمومية أمام الضجيج والتفاعلات البيئية. وقد طُوّرت خلال

العقود الماضية عائلات متعددة من الشيفرات الكمومية، مثل شيفرات السطح Surface) (Codesوالشيفرات التوافقية(Concatenated Codes) ، والتي أثبتت كفاءة عالية في نماذج ضجيج معينة، ولكن تتطلب مخططات تصحيح الأخطاء الكمومية لهذه الشيفرات آلاف الكيوبتات الفيزيائية لكل كيوبت منطقي. على سبيل المثال، تعد الشفرات السطحية (surface codes)من أكثر الأساليب الواعدة، حيث تتطلب($O(d^2)$ كيوبتات فيزيائية لمسافة الشيفرة d، مع عبء يتوسع بمقدار $O(n)$ كيوبت فيزيائي لكل كيوبت منطقي لتحقيق معدلات خطأ منطقية بمقدار ($O(e^{-a\sqrt{n}})$. ومع ذلك، على الرغم من التقدم الكبير في السنوات الأخيرة، بما في ذلك العروض التجريبية لتحقيق ميزة حسابية كمومية، لا تزال العديد من التحديات الأساسية تعيق تطوير حواسيب كمومية عملية. تدفع هذه القيود المستمرة إلى استكشاف نموذج الحوسبة الكمومية الهولوغرافية، وهو منظور جديد يهدف إلى مواجهة هذه التحديات من خلال الاستفادة من الرؤى المستقاة من المبدأ الهولوغرافي ومطابقة ADS/CFT. يقترح المبدأ الهولوغرافي، الذي اقترحه هوفْت وساسكيند أن محتوى المعلومات في منطقة من الفضاء يمكن وصفه بواسطة نظرية تعمل على حدود هذه المنطقة. يتحدى هذا المبدأ فهمنا التقليدي لكيفية تخزين المعلومات في الأنظمة الفيزيائية، ويقترح وجود صلة عميقة بين المعلومات وهندسة الزمكان. مراسلة (ADS/CFT)، التي اقترحها مالداسينا، توفر تحقيقًا ملموسًا لمبدأ الهولوغرافيا. إنها تفترض وجود ازدواجية (تكافؤ) بين نظرية الجاذبية في فضاء Anti-de Sitter ذي الأبعاد (d + 1) ونظرية المجال المتوافق (CFT)الموجودة على الحدود ذات الأبعاد(d) لهذا الفضاء. وقد أظهرت أعمال حديثة أن هذا المبدأ يمكن تفسيره بلغة تصحيح الأخطاء الكمومية، حيث يمكن النظر إلى الحجم (bulk)بوصفه معلومات منطقية مشفّرة بطريقة غير محلية في درجات حرية الحافة. أدى هذا الإدراك إلى ظهور فئة جديدة تُعرف بالشيفرات الكمومية الهولوغرافية. تُعد شيفرةHappy التي قُدمت لأول مرة بواسطةPastawski وآخرين، نموذجًا أوليًا لهذه الشيفرات، حيث تُبنى باستخدام تنسورات مثالية(Perfect Tensors) مرتبة في شبكة هرمية تمثل هندسة فراغية

سالبة الانحناء. إلى جانب شيفرةHappy، تم تطوير العديد من شيفرات تصحيح الأخطاء الكمومية الهولوغرافية الأخرى، حيث يُعد اختيار بُنى التنسورات عاملاً حاسماً في هذه التصاميم. ومن بين هذه البُنى شيفرة ستين الهولوغرافية، التي تعتمد على تنسور شيفرة ستين. وتُعد شيفرة ستين نفسها من شيفرات تصحيح الأخطاء الكمومية الراسخة والمعروفة بامتلاكها خصائص مميزة عديدة، مما يجعلها مرشحاً طبيعياً لبناء نسخة هولوغرافية منها. وبالنظر إلى متانتها وقدرتها على تصحيح الأخطاء بكفاءة، يمكن توقّع أن ترث شيفرة ستين الهولوغرافية مزايا مهمة تعزز من أدائها في تطبيقات الجاذبية الكمومية والمعلومات الكمومية. لقد تمت دراسة خصائص شيفرة HAPPY و شيفرة ستين وقدرتها على تصحيح أخطاء محو الكيوبتات بالإضافة الى أخطاء باولي النقية و Depolarizing Error كما تمت دراسة خصائص شيفرة Happy/Steane تحت أخطاء محو الكيوبتات، ولكن في دراستنا سنركز على بناء وتقييم أداء شيفرة Happy/Steane تحت أخطاء باولي النقية وخطأ إزالة الاستقطاب (Depolarizing Error).

تنظيم البحث:

تم تنظيم البحث وفق الترتيب التالي: تم البدء بمقدمة عن العمل المنجز ثم تم ذكر الهدف من البحث وطرائقه، وبعدها تم إجراء دراسة مرجعية في الفقرة 1، ثم تم في الفقرة2 شرح وتصميم الشيفرة وأخيراً تم مناقشة النتائج التي تم الحصول عليها في الفقرة3.

هدف البحث:

يهدف البحث الى بناء وتقييم أداء شيفرة Happy/Steane الكمومية الهولوغرافية واختبار قدرتها على تصحيح أخطاء باولي النقية وهي أخطاء الانقلاب البتّي (X) وأخطاء الانقلاب الطوري (Z) وأخطاء باولي من النوع (Y) وخطأ إزالة الاستقطاب.

مواد وطرق البحث:

يعتمد البحث على الطرق التجريبية والتسنيد المرجعي وتمت المحاكاة باستخدام برنامج Google Colab لبناء واختبار الشيفرة وذلك على حاسب بمواصفات RAM 12 GB CPU 2.00 GH ونظام تشغيل Windows10.

1 دراسة مرجعية

تمت الدراسات الشيفرات الهولوغرافية في عدد من الأبحاث، حيث قام (2015, Fernando Pastawski et al) في [9] بتقديم عائلة من النماذج الاختبارية القابلة للحل بدقة تامة لتمثيل مراسلة (ADS/CFT)، وذلك بالاستناد إلى بناء مبتكر لشفرة تصحيح أخطاء كمومية ذات بنية قائمة على شبكات الموترات. حيث وجدو أن شيفرة البنتاغون تفشل في تحقيق شرط امتلاك عتبة محو، ولكن قاموا بتعديل الشيفرة عن طريق وضع بنتاغون في المركز، ثم إضافة طبقات متناوبة من سداسيات من دون أدلة bulk متدلّية وبنتاغونات لكل منها دليل bulk واحد ووجدوا أن المحو يمكن تصحيحه بواسطة الخوارزمية الشجعة greedy) algorithm) باحتمال نجاح عالٍ عندما يكون $p \leq p_c^{greedy} \approx 0.26$. وتمت دراسة الشيفرة المعدلة عن طريق وضع دليل منطقي واحد في المركز ووجدوا أن عتبة المحو قريبة جدًا من $p_c=1/2$ وقد تم التحليل باستخدام greedy algorithm. وفي [6] قام (2020,Robert J. Harris et al) بدراسة شيفرةHappy بمعدل اعظمي ومعدل صفري وشيفرة ستين وشيفرة SCF تحت قناة إزالة الاستقطاب وقد تمت الدراسة باستخدام Integer Optimization Decode ووجدوا ان كل من شيفرة Happy وSteane بمعدل صفري تملك عتبة تصل الى 15%. وفي الدراسة [4] قام (2024, J. Fan et al) بدراسة مجموعة من الشيفرات الهولوغرافية مثل شيفرةSteane, SCF HAPPY و[6, 1, 3] ووجدوا أنها

تملك عتبات مختلفة تحت أخطاء باولي المختلفة وتمت الدراسة باستخدام tensor-network decoder ويمكن تلخيص النتائج في الجدول التالي.

الجدول1: نقاط بيانات عتبة الاسترجاع p_{th} لعددٍ من حالات الضجيج النقي (pure noise)

وضجيج باولي المنحاز (2-Pauli biases)

Noise Bias (r_X, r_Y, r_Z)	Hashing (%)	HaPPY (%)	Steane (%)	SCF (%)	$[\![6,1,3]\!]$ (%)
Depolarizing $(1/3, 1/3, 1/3)$	18.929	17.9 ± 0.81	18.98 ± 0.36	18.83 ± 0.13	18.46 ± 0.36
Pure X $(1, 0, 0)$	50.00	49.92 ± 0.096	10.79 ± 0.18	11.42 ± 0.52	33.56 ± 1.08
Pure Y $(0, 1, 0)$	50.00	49.91 ± 0.11	10.8 ± 0.19	44.66 ± 2.82	33.56 ± 1.08
Pure Z $(0, 0, 1)$	50.00	49.91 ± 0.11	10.8 ± 0.19	11.42 ± 0.52	22.99 ± 1.39
Pure XZ $(1/2, 0, 1/2)$	22.709	21.45 ± 0.68	22.1 ± 0.16	24.027 ± 1.08	22.08 ± 0.04
Pure XY $(1/2, 1/2, 0)$	22.709	21.45 ± 0.69	22.1 ± 0.17	21.77 ± 0.51	22.58 ± 0.17
Pure YZ $(0, 1/2, 1/2)$	22.709	21.45 ± 0.68	22.1 ± 0.17	21.77 ± 0.51	22.08 ± 0.04

وفي [10] قام (2025,M. Steinberg et al) بدراسة كل من شيفرات QRMو Steane و Happy.أيضاً تمت دراسة شيفرة (Happy Plus Steane) وذلك تحت قناة المحو ووجدوا أن العتبة العددية لكل من (Steane, Happy)هي 50% اما بالنسبة لشيفرة QRM قيمتها 19.2% أما عتبة Happy Plus Steane تصل الى 50%.

2 الشيفرة الكمومية الهولوغرافية [Holographic Quantum Code]

تُعرف الشيفرة الكمومية الهولوغرافية عبر خريطة ترميز ايزومترية

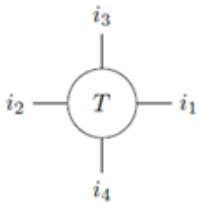
$$V: H_{bulk} \rightarrow H_{boundary} \quad (1)$$

التي تقوم بربط فضاء هيلبرت في الحجم (bulk) بفضاء هيلبرت على الحد.

يتم بناء الشيفرات الكمومية الهولوغرافية باستخدام شبكات التنسور التي تحاكي هندسة فضاء ADS. المكونات الأساسية لهذا البناء هي التنسورات المثالية (Perfect Tensors) والتبليطات الزائدية (Hyperbolic Tessellations).

2.1 التنسور [Tensor]

التنسور (Tensor): هو كائن رياضي ذو عدة أدلة (indices)، يمثل كل دليل درجة حرية محددة.



شكل1: التمثيل الرسومي للتنسور

في التمثيل الرسومي:

العقد (Nodes) تمثل التنسورات (tensors).

الحواف (Edges) تمثل عمليات الربط (Contractions) بين العقد، وهي عمليات جمع على الأدلة المشتركة بين التنسورات.

الرتبة (Rank): عدد الحواف المتصلة بالعقدة يمثل رتبة الموتر (عدد الأدلة). تمثل الحواف المفتوحة الأدلة الحرة.

2.2 التنسور المثالي [Perfect Tensor]

2.2.1 التنسور الايزومتري [Isometries Tensor]

إذا كانHA و HB فضاءان من فضاءات هيلبرت(Hilbert spaces) ، ليس بالضرورة أن يمتلكا البُعد نفسه. يُقال إن التحويل

$$T: HA \rightarrow HB \quad (2)$$

هو تحويل متساوي القياس (isometry) إذا كان تحويلًا خطيًا (linear map) يحافظ على الجداء الداخلي.

إذا كان HA و HB محدودي البُعد، فإن ذلك يعني مباشرةً أن مثل هذا التحويل T لا يمكن أن يوجد إلا إذا كان بُعداهما يحققان:

$$\dim(A) \leq \dim(B) \qquad (3)$$

وفي الحالة الخاصة التي يكون فيها:

$$\dim(A) = \dim(B) \qquad (4)$$

فإن T يكون ببساطة تحويلًا وحدوياً. ومن الواضح أن تركيب تحويلين متساويي القياس يعطي أيضًا تحويلًا متساوي القياس.

إذا كان

$$T: HA \rightarrow HB \qquad (5)$$

يمكننا تمثيل التحويل T على شكل تنسور ذي دليلين (two-index tensor) يعمل على الشكل التالي:

$$T: |a\rangle \longrightarrow \sum_b |b\rangle T_{ba} \qquad (6)$$

حيث أن المجموعة $\{|ai\rangle\}$ تمثّل أساسًا متعامدًا متكاملاً لفضاء HA، وتمثّل المجموعة $\{|bi\rangle\}$ أساسًا متعامدًا متكاملاً لفضاء HB عندئذٍ يكون T تحويلًا متساوي القياس (isometry) إذا وفقط إذا تحقق الشرط:

$$\sum T^{\dagger}_{a'b} T_{ba} = \delta a' a \qquad (7)$$

حيث δ هي دلتا كرونيكر و $\dagger$ هو المنقول.

2.2.2 التنسور المثالي

يكون التنسور ذو 2n فهرسًا

Ta1a2…a2n

تنسور مثالي (perfect tensor) إذا كان، لأي تقسيم ثنائي (bipartition) لأدلته إلى مجموعة A ومجموعة مكمّلة A^c بحيث

$$|A| \leq |A^c|$$

فإنT يكون متناسبًا مع تنسور ايزومتري (isometric tensor) من A إلى A^c.

2.3 التبليطات الزائدية(Hyperbolic Tilings)

سيُعطى نموذج الشيفرة الكمومية لتصحيح الأخطاء لدينا بواسطة شبكة تنسورات (tensor network) نضعها داخل قرص بوانكاريه (Poincaré disc) وسنفعل ذلك من خلال اختيار تبليط زائدي منتظم للمستوي.

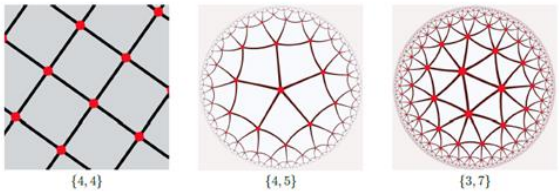
يُعرَّف التبليط الزائدي المنتظم على أنّه تغطية (covering) للمستوي الزائدي (hyperbolic plane) بواسطة مضلعات منتظمة (regular polygons) بحيث لا تتقاطع فيما بينها ولا تترك فجوات. إحدى الطرق الممكنة لوصف هذه التبليطات أو الفسيفساء (tessellations) هي باستخدام رمز شلافلي

{p;q}، حيث:

- p : عدد الحواف (أو الأضلاع) التي تلتقي عند كل رأس.
- q : عدد الحواف لكل مضلع في التبليط.

يكون التبليط المنتظم ثنائي ذي رمز شلافلي زائدياً(hyperbolic) إذا وفقط إذا كان:

$$q > \frac{2p}{p-2} \qquad (8)$$



شكل 2: بعض التبليطات المنتظمة ثنائية الأبعاد

مع رمز شلافلي (Schläfli symbols). لاحظ أنّ الأول منها ينتمي إلى الهندسة الإقليدية(Euclidean) ، بينما الاثنان الآخران ينتميان إلى الهندسة الزائدية (hyperbolic).

2.4 شيفرة Happy

يتم بناء شيفرة Happy على النحو التالي:

1. البناء الأساسي:(Base Construction)

- يبدأ البناء بشيفرة مثالية[[5, 1, 3]] ، تقوم بترميز كيوبت منطقي واحد في خمسة كيوبتات فيزيائية، مع مسافة شيفرة d=3.
- تتكون مجموعة المثبّتات (Stabilizer Group) لهذه الشيفرة المثالية من 4 مولدات، يُرمز إليها بـ ⟨S1,S2,S3,S4⟩=S والمولدات هي كما يلي:

$$S_1 = X \otimes Z \otimes Z \otimes X \otimes I$$
$$S_2 = I \otimes X \otimes Z \otimes Z \otimes X$$
$$S_1 = X \otimes I \otimes X \otimes Z \otimes Z$$
$$S_1 = Z \otimes X \otimes I \otimes X \otimes Z$$

شكل 3: مجموعة المثبّتات لشيفرةHappy حيث تشير ⊗ الى الضرب التنسوري.

- المؤثرات المنطقيةX_L وZ_L لهذه الشيفرة المثالية هي:

$$X_L = X \otimes X \otimes X \otimes X \otimes I$$
$$Z_L = Z \otimes Z \otimes Z \otimes Z \otimes Z$$

شكل 4: المؤثرات المنطقية لشيفرة Happy

2.تغطية قرص بوانكاريه:(Tiling the Poincaré Disk)

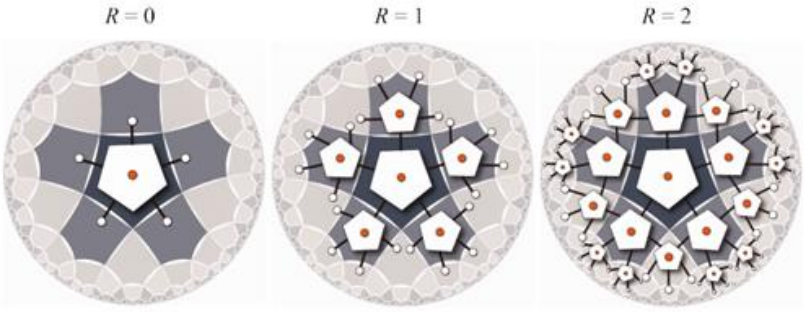
- تُوضع شيفرة مثالية [[5, 1, 3]] في مركز قرص بوانكاريه ذو انحناء سلبي.
- يتم بعد ذلك بناء شيفرةHappy باستخدام طريقة التجزئة

[5,4] = [p,q] مع استخدام تضخيم الحواف لتوسيع الشيفرة من R=0إلى R=2.

i. R=0 : توضع الشيفرة المثالية [[5, 1, 3]] في مركز قرص بوانكاريه.

ii. R=1 : تُكدّس طبقة جديدة من شيفرات [[5, 1, 3]] المثالية هولوغرافيًا فوق طبقة R=0، وفق قواعد تضخيم الحواف(Edge Inflation) .

iii. R=2 : تُكدّس طبقة أخرى، مما يوسّع شيفرة Happy بشكل أكبر.



شكل 5: عملية النمو لشيفرة Happy من R = 0 إلى R = 2، باتباع قواعد تضخم الحواف. ضع الشيفرة المثالية [[5، 1، 3]] على قرص بوانكاريه ذي انحناء سالب. هذا يشكل شيفرة Happy بنصف قطر R = 0. ثم، باستخدام وضع تضخم الحواف، قم بتكديس هولوغرافي لطبقة جديدة من الشيفرة المثالية

[[5، 1، 3]] على شيفرة Happy بنصف قطر R = 0 مع [p,q] = [5,4] مما ينتج عنه شيفرة Happy بنصف قطر R = 1. من خلال الاستمرار في التكديس الهولوغرافي لطبقة من الشيفرة المثالية [[5، 1، 3]] على شيفرة Happy بنصف قطر R = 1 مع [p,q] = [5,4] يمكن الحصول على شيفرة Happy بنصف قطر R = 2.

2.4.1 تضخيم الرؤوس (Vertex Inflation):

عند إضافة طبقة جديدة من التنسورات، يجب أن يشترك كل موتر في حافة مع موتر من الطبقة السابقة، كما يجب أن يتصل بالموترات الأخرى ضمن نفس الطبقة.

2.4.2 تضخيم الحواف (Edge Inflation):

بالمقابل، يتطلب تضخيم الحواف فقط أن تُضاف الموترات الجديدة عن طريق التمدد من حافة موتر في الطبقة السابقة. على عكس تضخيم الرؤوس، لا يوجد شرط صارم بأن تكون جميع الرؤوس مشتركة بين عدد محدد من المضلعات q.

2.5 معدل شيفرةHappy

يُعطى معدل الشيفرة الكمومية [[n, k, d]] بالعبارة k/n، حيث k هو عدد الكيوبتات المنطقية و nهو عدد الكيوبتات الفيزيائية و d مسافة الشيفرة. يمكن بناء شيفرة Happy بمعدلات مختلفة، اعتمادًا على كثافة ترميز الكيوبتات المنطقية داخل شبكة التنسورات.

2.6 شيفرة Steane

تستخدم شيفرة ستين الهولوغرافية تنسور شيفرة ستين. كنوع من شيفرات تصحيح الأخطاء الكمومية، تحتوي شيفرة ستين على العديد من الميزات البارزة، مما يعطينا سببًا لنتوقع أن شيفرة ستين الهولوغرافية ستحمل خصائص مرغوبة.

عند فحص تنسور شيفرة ستين، نأمل بشكل طبيعي أن يكون تنسوراً مثاليًا، مشابهًا للتنسور [[5، 1، 3]] المستخدم في شيفرة Happy، لكن هذا ليس الحال. ومع ذلك، الخبر السار هو أن التنسور المقابل لشيفرة ستين يمكن أن يشكل تطبيقاً إيزومترياً تحت بعض التقسيمات الثنائية المحدودة، والتي نشير إليها باسم تنسورات مثالية كتلية. حيث تُعرَّف التنسورات المثالية الكتلية بأنها التنسورات التي تحقق شرط الإيزومترية، ولكن ليس لجميع ترتيبات الأدلة، بل فقط بالنسبة لفئة محددة منها، وهي التبديلات الدورية لمجموعة الأدلة.

وبصورة أدق، يُقال إن التنسور يكون كتليًا مثاليًا إذا ظل يمثل تحويلًا متساوي القياس تحت جميع الإزاحات الدورية σ المطبَّقة على مجموعة الأدلة J . بحيث:

2.6.1 بناء شيفرة ستين الهولوغرافية

لبناء شيفرة ستين الهولوغرافية، دعونا أولاً ننظر إلى التنسور الأساسي الذي نستخدمه: تنسور ستين.

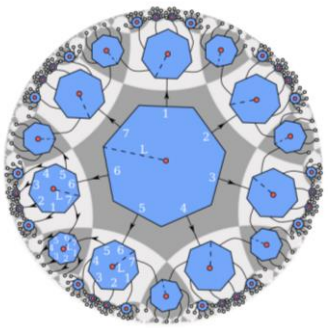
أدناه مولدات مجموعة المثبتات والمشغلات المنطقية لتنسور ستين:

Index label:	1	2	3	4	5	6	L	7
S_1	X	X	I	I	I	X	I	X
S_2	I	X	X	X	I	I	I	X
S_3	I	I	I	X	X	X	I	X
S_4	Z	Z	I	I	I	Z	I	Z
S_5	I	Z	Z	Z	I	I	I	Z
S_6	I	I	I	Z	Z	Z	I	Z
$S_{\bar{X}}$	X	X	X	X	X	X	X	X
$S_{\bar{Z}}$	Z	Z	Z	Z	Z	Z	Z	Z

شكل 6: مجموعة المثبتات والمشغلات المنطقية لتنسور ستين

تنسور ستين ليس تنسوراً مثاليًا لأنه لا يمكن أن يضمن تشكيل تطبيق إيزومتري تحت جميع التبديلات. ومع ذلك، طالما أن أدلة "المدخل" لتنسور ستين متجاورة تسلسليًا، على سبيل المثال، 7، L، 6، مع اعتبار الأدلة المتبقية ك ."مخرج"، يمكن التحقق من أن تنسور ستين سيوفر تطبيقاً إيزومترياً تحت هذه الشروط.

باستخدام تنسور ستين كتنسور بذري واستخدام طريقة تبليط [7,4] = [p,q] على قرص بوانكاريه، يمكن أن يشكل تبليط هولوغرافي لتنسورات ستين شيفرة ستين الهولوغرافية. كما هو موضح في الشكل.



شكل7: تبليط البذرة السباعية (heptagonal seed) ضمن تمثيل شبكة تنسورية أكبر ذات نصف قطر R=3 لشيفرة سباعية(heptagon code) .

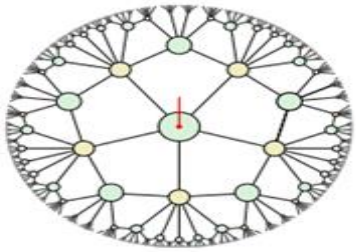
يمكن بناء شيفرة Steane بمعدلات مختلفة، اعتمادًا على كثافة ترميز الكيوبتات المنطقية داخل شبكة التنسورات.

2.7. شيفرة HAPPY/ Steane

شكل8:Happy+Steane

في هذه الشيفرة الهولوغرافية غير المتجانسة، قمنا بوضع شيفرة Happy في الطبقات الزوجية، وشيفرة ستين في الطبقات الفردية، مُشكِّلين بذلك شيفرة هولوغرافية غير متجانسة من النوعHappy+Steane. استخدام شيفرة هولوغرافية غير متجانسةHappy/Steane بدلًا من الشيفرة المتجانسة يؤدي الى مساحة أقل مقارنة بالشيفرة الهولوغرافية المتجانسةSteane، كما يتضح من طريقة بناء الشيفرة.

يمكن بناء شيفرة Happy+Steane بمعدلات مختلفة، اعتمادًا على كثافة ترميز الكيوبتات المنطقية داخل شبكة التنسورات وفي هذا البحث سنعمل على شيفرة Happy+Steane بمعدل صفري أي ترميز كيوبت منطقي واحد كما هو موضح بالشكل.



شكل9: شيفرة Happy/Steane حيث تتناوب طبقات الشبكة بين تنسوراتHappy وتنسوراتSteane، مع تمثيل تنسورات Steane في الشكل باللون الأصفر الفاتح لتمييزها بصريًا داخل البنية التنسورية.

3.النتائج

تمت محاكاة الشيفرة الموضحة بالشكل حيث تم، حيث تم بناء الشيفرة باستخدام لغة البرمجة بايثون وتم بناء طبقتين فقط من الشيفرة R0,R1 وتمت المحاكاة على البيئة البرمجية Google Colab وتم استخدام Decoder من نوع Integer Optimization Decode.

تم اختبار الشيفرة تحت أخطاء باولي النقية وخطأ إزالة الاستقطاب.

أخذنا مصفوفات باولي الشهيرة التالية، والتي تمثل عمليات الخطأ على الكيوبتات:

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (9)$$

$$Bit\ Flip:\ X|0\rangle = |1\rangle, X|1\rangle = |0\rangle \quad (10)$$

$$Phase\ Flip:\ Z|0\rangle = +1|0\rangle, Z|1\rangle = -1|1\rangle \quad (11)$$

$$Y = X + Z \quad (12)$$

3.1 خطأ باولي النقي من النوع X.

حيث

$$X = 1 , Y = 0 , Z = 0$$

أي أن الكيوبتات تتعرض فقط لخطأ انقلاب البت.

يوضح الجدول التالي نتائج المحاكاة التي تم فيها اختبار الشيفرة تحت خطأ X بالنسبة للطبقة R0.

الجدول 2: احتمالية الخطأ مقابل معدل الاسترجاع لخطأX للطبقة R0

Recovery Rate	Probability
0.998	0.01
0.994	0.02
0.992	0.03
0.994	0.04
0.978	0.05
0.988	0.060000000000000005
0.944	0.06999999999999999
0.936	0.08
0.948	0.09
0.932	0.09999999999999999
0.896	0.11
0.906	0.12
0.832	0.13
0.868	0.14
0.86	0.15000000000000002
0.826	0.16
0.822	0.17
0.768	0.18000000000000002
0.75	0.19
0.75	0.2
0.674	0.21000000000000002

0.712	0.22
0.69	0.23
0.676	0.24000000000000002
0.634	0.25
0.63	0.26
0.536	0.27
0.596	0.28
0.564	0.29000000000000004
0.538	0.3

الأرقام الموضحة في العمود الأول تدل على احتمالية الخطأ اما العمود فهو معدل الاسترجاع المنطقي المقابل لكل احتمالية خطأ.

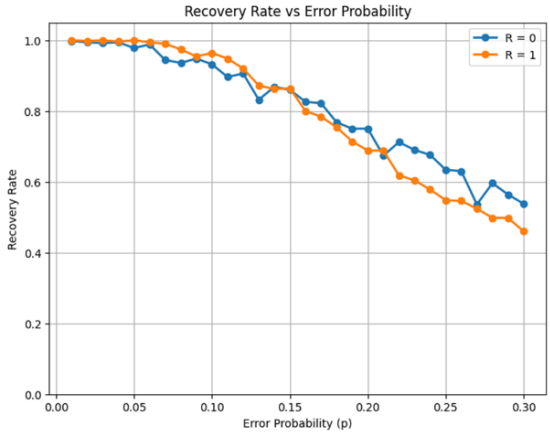
أما بالنسبة للطبقة R1 فالنتائج موضحة بالجدول التالي.

الجدول 3: احتمالية الخطأ مقابل معدل الاسترجاع لخطأX للطبقة R1

Recovery Rate	Probability
1.0	0.01
0.998	0.02
1.0	0.03
0.996	0.04
1.0	0.05
0.994	0.060000000000000005
0.99	0.06999999999999999
0.974	0.08

0.954	0.09
0.964	0.09999999999999999
0.948	0.11
0.92	0.12
0.872	0.13
0.862	0.14
0.864	0.15000000000000002
0.8	0.16
0.784	0.17
0.754	0.18000000000000002
0.714	0.19
0.688	0.2
0.688	0.21000000000000002
0.618	0.22
0.604	0.23
0.578	0.24000000000000002
0.548	0.25
0.546	0.26
0.524	0.27
0.498	0.28
0.498	0.29000000000000004
0.46	0.3

نقوم بتلخيص النتائج بالشكل التالي للطبقتين R0,R1.



شكل 10: منحنى معدل الاسترجاع (Recovery Rate Curve) للشيفرة Happy/Steane ذات المعدّل الصفري (Zero-Rate) تحت ضجيج باولي النقي من النوع X، مع عتبة تصحيح تقارب 15%~.

3.2 خطأ باولي النقي من النوع Y.

حيث

$$X = 0\,, Y = 1\,, Z = 0$$

يوضح الجدول التالي نتائج المحاكاة التي تم فيها اختبار الشيفرة تحت خطأ Y بالنسبة للطبقة R0.

الجدول 4: احتمالية الخطأ مقابل معدل الاسترجاع لخطأY للطبقة R0

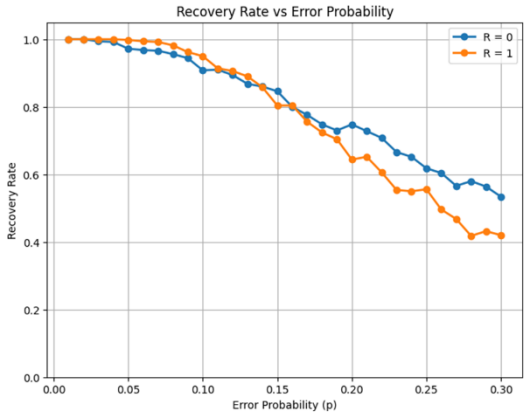
Recovery Rate	Probability
1.0	0.01
1.0	0.02
0.994	0.03
0.992	0.04
0.972	0.05
0.968	0.060000000000000005
0.966	0.06999999999999999
0.956	0.08
0.944	0.09
0.908	0.09999999999999999
0.91	0.11
0.894	0.12
0.868	0.13
0.86	0.14
0.846	0.15000000000000002
0.8	0.16
0.776	0.17
0.748	0.18000000000000002
0.73	0.19
0.748	0.2
0.728	0.21000000000000002
0.708	0.22
0.666	0.23
0.652	0.24000000000000002
0.618	0.25
0.604	0.26
0.566	0.27
0.58	0.28
0.564	0.29000000000000004
0.534	0.3

أما بالنسبة للطبقة R1 فالنتائج موضحة بالجدول التالي.

الجدول 5: احتمالية الخطأ مقابل معدل الاسترجاع لخطأY للطبقة R1

Recovery Rate	Probability
1.0	0.01
1.0	0.02
1.0	0.03
1.0	0.04
0.998	0.05
0.994	0.060000000000000005
0.992	0.06999999999999999
0.982	0.08
0.962	0.09
0.95	0.09999999999999999
0.914	0.11
0.906	0.12
0.89	0.13
0.858	0.14
0.804	0.15000000000000002
0.804	0.16
0.756	0.17
0.724	0.18000000000000002
0.704	0.19
0.644	0.2
0.652	0.21000000000000002
0.606	0.22
0.554	0.23
0.55	0.24000000000000002
0.556	0.25
0.496	0.26
0.468	0.27
0.418	0.28
0.432	0.29000000000000004

0.42	0.3



شكل 11: منحنى معدل الاسترجاع (Recovery Rate Curve)

للشيفرةHappy/Steane ذات المعدّل الصفري (Zero-Rate) تحت ضجيج باولي النقي من النوع Y، مع عتبة تصحيح تقارب 15%~.

3.3 خطأ باولي النقي من النوع Z.

حيث

$$X = 0\,, Y = 0\,, Z = 1$$

يوضح الجدول التالي نتائج المحاكاة التي تم فيها اختبار الشيفرة تحت خطأ Z بالنسبة للطبقة R0.

الجدول 6: احتمالية الخطأ مقابل معدل الاسترجاع لخطأZ للطبقة R0

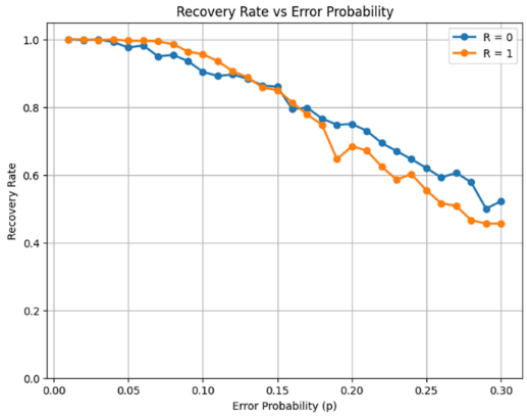
Recovery Rate	Probability
1.0	0.01
0.998	0.02
1.0	0.03
0.992	0.04
0.976	0.05
0.982	0.060000000000000005
0.95	0.06999999999999999
0.954	0.08
0.936	0.09
0.904	0.09999999999999999
0.892	0.11
0.896	0.12
0.884	0.13
0.864	0.14
0.86	0.15000000000000002
0.794	0.16
0.798	0.17
0.766	0.18000000000000002
0.748	0.19
0.75	0.2
0.73	0.21000000000000002
0.694	0.22
0.67	0.23
0.646	0.24000000000000002
0.62	0.25
0.592	0.26
0.606	0.27
0.578	0.28
0.5	0.29000000000000004
0.522	0.3

أما بالنسبة للطبقة R1 فالنتائج موضحة بالجدول التالي.

الجدول 7: احتمالية الخطأ مقابل معدل الاسترجاع لخطأZ للطبقة R1

Recovery Rate	Probability
1.0	0.01
1.0	0.02
0.998	0.03
1.0	0.04
0.996	0.05
0.996	0.060000000000000005
0.994	0.06999999999999999
0.986	0.08
0.964	0.09
0.956	0.09999999999999999
0.936	0.11
0.906	0.12
0.888	0.13
0.858	0.14
0.85	0.15000000000000002
0.814	0.16
0.778	0.17
0.748	0.18000000000000002
0.646	0.19
0.684	0.2
0.672	0.21000000000000002
0.624	0.22
0.586	0.23
0.602	0.24000000000000002
0.554	0.25

0.516	0.26
0.508	0.27
0.466	0.28
0.456	0.29000000000000004
0.456	0.3



شكل12: منحنى معدل الاسترجاع

(Recovery Rate Curve) للشيفرة ذات المعدّل الصفري (Zero-Rate) تحت ضجيج باولي النقي من النوع Z، مع عتبة تصحيح تقارب 15%~.

3.4 خطأ إزالة الاستقطاب (Depolarizing Error)

في هذا النوع من الأخطاء تؤثر أخطاء باولي جميعها بنسب متساوية حيث.

$$X = Y = Z = \frac{1}{3}$$

كما يمكننا تغيير النسبة 1/3 ولكن نحصل على معدلات خطا بنسب مختلفة. الجدول التالي نتائج المحاكاة التي تم فيها اختبار الشيفرة تحت خطأ إزالة الاستقطاب بالنسبة للطبقة R0.

الجدول 8: احتمالية الخطأ مقابل معدل الاسترجاع لخطأ Depolarizing للطبقة R0

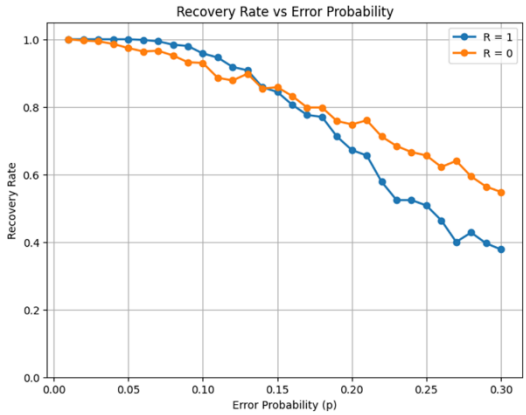
Recovery Rate	Probability
1.0	0.01
0.996	0.02
0.994	0.03
0.986	0.04
0.974	0.05
0.964	0.060000000000000005
0.966	0.06999999999999999
0.952	0.08
0.932	0.09
0.93	0.09999999999999999
0.886	0.11
0.878	0.12
0.898	0.13
0.854	0.14
0.858	0.15000000000000002
0.832	0.16
0.798	0.17
0.798	0.18000000000000002
0.758	0.19
0.748	0.2
0.76	0.21000000000000002
0.712	0.22
0.684	0.23
0.666	0.24000000000000002
0.656	0.25
0.622	0.26
0.64	0.27
0.594	0.28
0.564	0.29000000000000004
0.548	0.3

أما بالنسبة للطبقة R1 فالنتائج موضحة بالجدول التالي

الجدول 9: احتمالية الخطأ مقابل معدل الاسترجاع لخطأ Depolarizing للطبقة R1

Recovery Rate	Probability
1.0	0.01
1.0	0.02
1.0	0.03
1.0	0.04
1.0	0.05
0.998	0.060000000000000005
0.994	0.06999999999999999
0.984	0.08
0.98	0.09
0.958	0.09999999999999999
0.946	0.11
0.918	0.12
0.908	0.13
0.858	0.14
0.844	0.15000000000000002
0.806	0.16
0.776	0.17
0.77	0.18000000000000002
0.712	0.19
0.672	0.2
0.656	0.21000000000000002
0.578	0.22
0.524	0.23
0.524	0.24000000000000002
0.508	0.25
0.464	0.26

0.4	0.27
0.428	0.28
0.396	0.29000000000000004
0.378	0.3



شكل13: منحنى معدل الاسترجاع (Recovery Rate Curve)
للشيفرة Happy/Steane ذات المعدّل الصفري (Zero-Rate) تحت ضجيج depolarizingمع عتبة تصحيح تقارب 15%~.

3.5 ملخص النتائج

من خلال استخدام Integer Optimisation Decoder وتطبيقه على الشيفرة نلاحظ ان أخطاء باولي النقية وخطا إزالة الاستقطاب تختلف فيما بينها اختلاف بسيط بالنسبة لمعدلات الاسترجاع المنطقي المقابلة لاحتمالية الخطأ، وكذلك نلاحظ انه بالنسبة لجميع الأخطاء تملك الشيفرة عتبة قدرها *15%*، وتم ملاحظة ان معدلات الاسترجاع المنطقي تكون أكبر بالنسبة للطبقة R1 وذلك قبل ان تنهار الشيفرة عند العتبة 15%.

لقد تم اختبار الشيفرة تحت أخطاء محو الكيوبتات في الدراسة [10] وتم الحصول على عتبة قدرها 50%.

4. خاتمة

تم تصميم شيفرة Happy Plus Steane الكمومية الهلوغرافية، حيث تم دمج كل من الشفرتين في شيفرة واحدة حيث وضعنا التنسور المركزي من نوع شيفرة Happy أما الطبقة الأولى من التنسورات فكانت من نوع شيفرة Steane، ثم قمنا باختبار الشيفرة تحت أخطاء باولي النقية (X,Y,Z)، وخطأ إزالة الاستقطاب وذلك باستخدام Integer Optimization Decode، وذلك بالنسبة للطبقتين R0,R1 وحصلنا على عتبة خطأ تساوي تقريباً 15% وحصلنا على معدل الاسترجاع المنطقي مقابل كل احتمال خطأ معين. حيث أن عملية الدمج هذه بين الشيفرات لها فوائد عديدة في دعم الحوسبة الكمومية المتحملة للأخطاء وكذلك عملية الدمج تحقق امكانية الاستفادة من ميزات كل شيفرة ضمن بنية موحدة، بالإضافة الى تقليل عدد الكيوبتات الفيزيائية وبالتالي توفير كبير في الموارد، وأيضاً يمكّن الدمج من ضبط معدل الشيفرة والمسافة. ففي الشيفرة المدروسة في البحث حققنا انخفاضاً بعدد الكيوبتات بنسبة 28.6% تقريباً وذلك بالنسبة لشيفرة ستين مع الحفاظ على كفاءة التصحيح بالنسبة لخطأ إزالة الاستقطاب وزيادتها بالنسبة لأخطاء باولي النقية.

5. المراجع

[1] El Morsalani, M. (2025). *Encoding spacetime: A comprehensive review of holographic quantum codes* (Preprint). https://doi.org/10.13140/RG.2.2.34220.99205

[2] Fan, J. (2024). *Biased-noise threshold studies for holographic quantum error-correcting codes* (Master's thesis, Delft University of Technology, QuTech, Netherlands).

[3] Fan, J., Steinberg, M., Jahn, A., Cao, C., Feld, S., & Sarkar, A. (2024). *LEGO HQEC: A software tool for analyzing holographic quantum codes*. arXiv. https://arxiv.org/abs/2410.22861

[4] Fan, J., Steinberg, M., Jahn, A., Cao, C., & Feld, S. (2024). *Overcoming the zero-rate hashing bound with holographic quantum error correction*. arXiv. https://arxiv.org/abs/2408.06232

[5] Franco Rubio, A. (2016). *Holographic quantum error correcting codes* (Bachelor's thesis, Universidad de Zaragoza, Spain).

[6] Harris, R. J., Coupe, E., McMahon, N. A., Brennen, G. K., & Stace, T. M. (2020). *Decoding holographic codes with an integer optimisation decoder*. arXiv. https://arxiv.org/abs/2008.10206

[7] Nye, L. (2024). *Holographic quantum computation*. Carnegie Mellon University, School of Computer Science. https://doi.org/10.13140/RG.2.2.12587.66083

[8] Nye, L. (2025). Foundations of holographic quantum computation. *Journal of Applied Mathematics and Physics, 13*(1), 11–60.

[9] Pastawski, F., Yoshida, B., Harlow, D., & Preskill, J. (2015). Holographic quantum error-correcting codes: Toy models for the bulk/boundary correspondence. *Journal of High Energy Physics, 2015*(6), 149. https://doi.org/10.1007/JHEP06(2015)149

[10] Steinberg, M., Fan, J., Eisert, J., Feld, S., Jahn, A., & Cao, C. (2025). *Universal fault-tolerant logic with heterogeneous holographic codes*. arXiv. https://arxiv.org/abs/2504.10386