

تحسين خوارزمية النهج التكراري للتحكم الأمثل في النظم الخطية غير المحددة جزئياً باستخدام القدم القائم على الحدث

م. إلياذة الإبراهيم

د.م. جمانا دياب

ملخص

تزايد الاهتمام مؤخراً بدراسة أنظمة التحكم من منظور عملي، أخذاً بعين الاعتبار تأثير البيئة المحيطة والاضطرابات الخارجية. في هذا السياق، برز مفهوم النظم غير المحددة (Uncertainty Systems) كمقابل للحالة المثالية التي تفترض أن جميع بارامترات النظام معلومة بشكل كامل. يعتبر التحكم الأمثل من أهم تقنيات التحكم، حيث يوفر إطاراً رياضياً منظماً للحصول على إشارة التحكم المثلى التي تحقق أفضل أداء ممكن للنظام وفق معيار محدد مسبقاً.

تقدم هذه الورقة منهجية مطورة للتحكم الأمثل في الأنظمة الخطية غير المحددة جزئياً، من خلال دمج خوارزمية النهج التكراري (Policy Iterative PI) مع آلية القذف القائم على الحدث (Event-Triggered ET). فرغم تحقيق خوارزمية PI للتوازن بين الأداء والدقة والعبء الحسابي، واعتمادها كأساس لتطوير العديد من التقنيات في حل مسائل التحكم الأمثل دون الحاجة إلى معرفة كاملة بالنظام، إلا أنها بقيت تعاني من التحديثات التكرارية المستمرة، مما يؤدي إلى زمن تنفيذ كبير واستهلاك متزايد للموارد.

ولمعالجة هذه المشكلة، تم دمج (ET) للتحكم في تنفيذ خطوات الخوارزمية التكرارية نفسها، وليس فقط لحظات أخذ العينات أو تحديث إشارة التحكم كما هو متبع في الأساليب التقليدية. كما تم اشتقاق شرط قذف ديناميكي وفق تحليل استقرار ليابونوف، مما يضمن استقرار النظام ويقلل التحديثات غير الضرورية.

أظهرت النتائج أن الطريقة المقترحة تقلل بشكل ملحوظ عدد التكرارات والعبء الحسابي دون التأثير على أداء النظام. وتم التحقق من فعالية المنهجية من خلال تطبيقها على نظام نواس مقلوب غير محدد جزئياً، حيث بينت النتائج تحقيق تقارب أسرع، وتقليل في زمن التنفيذ، وتحسين في استقرار النظام مقارنة بخوارزمية PI الكلاسيكية.

الكلمات المفتاحية: خوارزمية النهج التكراري – القوائم على الحدث – التحكم الأمثل – النظم الخطية غير المحددة جزئياً – عتبة قذح ديناميكية

Enhanced Policy Iterative optimal control for partially uncertainty linear systems by using Event-Triggered mechanism

Abstract

Recently, there has been growing interest in practical control systems considering environmental effects and external disturbances. In this context, uncertainty systems have emerged as a counterpart to the ideal case assuming full knowledge of system parameters. Optimal control is a technique providing a mathematical framework for obtaining control signals that achieve optimal system performance according to a predefined criterion.

This paper presents an enhanced methodology for optimal control of partially uncertainty linear systems by integrating the Policy Iterative (PI) algorithm with an Event-Triggered (ET) mechanism. Although PI provides a trade-off between performance, and computational cost and is widely used for solving optimal control problems without full system knowledge, it suffers from continuous updates that increase execution time and resource consumption. To address this issue, an ET mechanism is incorporated to regulate the execution of the PI algorithm itself. Unlike conventional approaches where ET is used for sampling or control updates, the proposed method applies it to the iterative process. A Lyapunov-based dynamic triggering condition is derived to ensure system stability while reducing unnecessary updates. Results show the proposed method reduces iterations and computational burden without degrading performance. Its effectiveness is validated on a partially uncertain

inverted pendulum system, showing faster convergence, reduced execution time, and improved stability compared to classical PI.

Keywords:

Policy Iterative Algorithm – Event-Triggered Control – Optimal Control – Partially Uncertainty linear Systems – Dynamic Triggering Threshold

I. مقدمة

الأمثلة هو مفهوم عام موجود في الكثير من العلوم مثل الهندسة والجيولوجيا والاقتصاد ويعني الحصول على الأفضل وفق معايير محددة. يشير التحكم الأمثل إلى صنف من التقنيات الرياضية، تتيح لنا إيجاد أفضل طريقة ممكنة للتحكم بالنظام، من خلال ضبط إشارة التحكم للحصول على القيمة الصغرى أو العظمى لمؤشر أداء محدد بشكل مسبق تبعا للحالة المطلوبة (تقليل خطأ أو تقليل استهلاك طاقة أو زيادة سرعة الاستجابة).

منذ أواخر ستينيات القرن الماضي، حظيت نظرية التحكم الأمثل باهتمام واسع. ركزت الدراسات المبكرة على النظم ذات البارامترات المعلومة كلياً [1-8]، لسهولة التصميم في غياب الاضطرابات البيئية. لكن للتغلب على قيود هذا الإطار النظري والتوجه نحو التطبيقات العملية، برزت الحاجة للتعامل مع الأنظمة التي تخضع لتأثيرات البيئة المحيطة، حيث تغدو المعلومات الدقيقة عن البارامترات غير متوفرة، مما يؤدي إلى حالة من عدم اليقين (Uncertainty). من هنا ظهرت فئة النظم غير المحددة، وهي النظم التي نمتلك عنها معلومات أولية غير دقيقة أو ثابتة، تحول دون تطبيق طرق الأمثلة التقليدية عليها مباشرة. ونتيجة لذلك، تحولت الجهود البحثية من النهج التقليدي القائم على الحل المسبق (Offline) إلى تطوير خوارزميات قادرة على حل مسألة الأمثلة بشكل آني (Online) بالاعتماد على قياسات النظام أثناء تشغيله، وهو النهج الذي يتبناه هذا البحث.

II. هدف البحث

تم في هذه الورقة إجراء دراسة تحليلية لأبرز طرق التحكم الأمثل في النظم الخطية غير المحددة جزئياً، واختيار خوارزمية PI كأساس للتطوير نظراً لتوازنها بين الأداء والعبء الحسابي. ورغم اعتمادها كأساس في مجالات أوسع، إلا أنها تعاني من التحديثات التكرارية المستمرة. لذا، تقدم الورقة منهجية مطورة

تتغلب على هذا التحدي بدمج آلية القدر القائم على الحدث (ET) للتحكم في تنفيذ الخوارزمية كاملاً، مما يقلل عدد التكرارات والعبء الحسابي وزمن التنفيذ.

III. أهمية البحث

تكمن أهمية هذه الدراسة من دورها في التغلب على بعض التحديات التي تواجه تطبيق التحكم الأمثل على النظم الخطية غير المحددة جزئياً، حيث تم تحسين خوارزمية PI من خلال تقليل عدد العمليات التكرارية واستهلاك الموارد والعبء الحسابي المترتب على ذلك، وفي تغيير مفهوم القدر القائم على الحدث حيث استخدم بصيغة مختلفة عن صيغته التقليدية، واعتمد لتحديد متى يتم تكرار تنفيذ الخوارزمية كاملة.

IV. منهج البحث

في هذه الورقة، تم استعراض طرق التحكم الأمثل الأبرز في النظم الخطية غير المحددة جزئياً، وتحليلها والمقارنة بينها من خلال توضيح نقاط القوة والضعف، ثم شرح آلية القدر القائم على الحدث وكيفية دمجها مع خوارزمية PI التقليدية ثم تطبيق الخوارزمية الكلاسيكية والمقترحة على النواس المقلوب بعد تمثيله كنظام غير محدد جزئياً، يليها الخلاصة والآفاق المستقبلية المعتمدة عليها.

V. مواد وطرائق البحث

اعتمدت معظم الأبحاث الحديثة عند التعامل مع النظم غير المحددة لحل مشكلة التحكم الأمثل على تقسيمها إلى:

- **نظم غير محددة بشكل جزئي:** أي في النظم الخطية يوجد معلومات كاملة ودقيقة عن المصفوفة B فقط، بينما المصفوفة A غير معروفة بشكل كامل ودقيق، هذه النظم يتم تمثيلها وفق المعادلة

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (1)$$

حيث A, B مصفوفات الحالة والتحكم وتمثل بارامترات النظام و x(t) شعاع الحالة و u(t) إشارة التحكم و y(t) خرج النظام.

تم في الأدبيات استخدام خوارزمية PI التي تعتمد على تحديث إشارة التحكم تبعاً لمقدار التفاوت بين القيمة الحالية والقيمة المطلوبة [9-12] ، وهناك دراسات توجهت لاعتماد الطرق الإحصائية لتخمين المصفوفة A للتغلب على عدم اليقين [13]

- **نظم غير محددة بشكل كامل:** لا يوجد معلومات دقيقة وكاملة عن كامل بارامترات النظام، أي المصفوفتين A.B غير دقيقتين. وللتعامل مع هذه الحالة تم دراسة آلية قريبة من PI تعتمد على استبدال المصفوفات غير المحددة بمصفوفات معروفة [14,15]، وأيضاً تم التوجه لدراسة data-driven التي تعتمد على قياسات الحالة والخرج لتخمين البارامترات غير المحددة، و تم تطبيق طرق الأمثلة التقليدية عليها [16] .

تم أولاً التوجه لدراسة طرق التحكم الأمثل الأبرز في مجال النظم الخطية غير المحددة جزئياً، للإضاءة على الطريقة الأكثر فعالية ومعرفة التحديات التي تواجهها، ليتم بعد ذلك العمل على التخلص منها أو تقليلها ما أمكن.

1. دراسة أبرز طرق التحكم الأمثل في النظم الخطية غير المحددة جزئياً:

1.1. التحكم الأمثل باعتماد خوارزمية PI

تعتبر وحدة تحكم أمثل تكيفية online، تتضمن خطوتين تكراريتين: تقييم السياسة policy evaluation وتحديث السياسة policy update، حيث يتم تحديث دالة الإنجاز وبارامترات التحكم بشكل مستمر، طالما الفرق بين دالة الإنجاز الحالية ودالة الإنجاز المطلوبة أكبر من عتبة معينة [9].

آلية العمل

تقوم خطوة Policy Evaluation بحساب دالة الإنجاز لتقييم سلوك النظام، وبناءً على هذا التقييم يتم تحسين أداء المتحكم من خلال خطوة Policy Update التي تمثل إشارة التحكم [10].

يتم أولاً إعطاء إشارة تحكم أولية، ثم إيجاد دالة الإنجاز، يليها إعادة إيجاد إشارة التحكم من خلال تحديث مصفوفة الريح الخلفي. تستمر هذه العملية التكرارية حتى يقوم policy evaluation بإيقاف policy update بسبب الوصول للمطلوب.

ليكن النظام الخطي المستمر (1) وتكون دالة الإنجاز الموافقة له ممثلاً بالمعادلة (2)

$$J = \int_0^{\infty} [x^T Q x + u^T R u] dt \quad (2)$$

حيث Q, R مصفوفة تربيعية متناظرة تضبط من قبل المصمم

يتم إيجاد إشارة التحكم المثلى من خلال جعل دالة الإنجاز أصغر، فنحصل على معادلة جبرية تابعة لمصفوفات النظام A, B تسمى معادلة ريكتي الجبرية ممثلة بالمعادلة (3)

$$A^T P + P A + Q - P B R^{-1} B^T P = 0 \quad (3)$$

حيث P هي المصفوفة المراد أمثلتها، ويتم إيجادها من خلال حل هذه المعادلة.

الخطوة التالية هي إيجاد مصفوفة الريج الخلفي K ، والتي تمثل بارامترات المتحكم، وتحسب من (4)

$$K = R^{-1} B^T P \quad (4)$$

وبعد ذلك، يتم حساب إشارة التحكم وفق قانون التحكم الخطي (5)

$$u = -Kx \quad (5)$$

ولكن في حالة النظم غير المحددة جزئياً، تكون المصفوفة A غير متوفرة بدقة، وبالتالي لا يمكن حل معادلة ريكتي (3) على وضعها الحالي. ويتعويض (5) في (1) تصبح معادلة النظام الجديدة (6)

$$\dot{x} = (A - BK)x \quad (6)$$

عندها تصبح معادلة ريكتي الجبرية (3) بالشكل الجديد (7)

$$(A - BK)^T P + P(A - BK) = -(K^T R K + Q) \quad (7)$$

وتصبح معادلة دالة الإنجاز الجديدة (8)

$$V = \int_0^{\infty} [x^T(\tau)(Q + K^T R K)x(\tau)] d\tau = x^T(t) P x(t) \quad (8)$$

تكون دالة الإنجاز لزمن منتهي محدد ممثلة بالمعادلة (9)

$$V(x(t)) = \int_t^{t+T} [x^T(\tau)(Q + K^T RK)x(\tau)]d\tau + V(x(t+T)) \quad (9)$$

وباعتبار k_1 هي مصفوفة الربح الخلفي لإشارة التحكم الأولية المعطاة، يمكن كتابة دالة الإنجاز كصيغة تكرارية (10) وإيجاد p في كل تكرار، حيث $i=1,2,\dots$ رقم التكرار

$$x_t^T P_i x_t = \int_t^{t+T} [x_t^T (Q + K_i^T R K_i) x_t] d\tau + x_{t+T}^T P_i x_{t+T} \quad (10)$$

وتصبح مصفوفة الربح الخلفي وفق المعادلة (11)

$$K_{i+1} = R^{-1} B^T P_i \quad (11)$$

إذا تم التوصل لحل معادلة ريكاتي دون الحاجة لمعرفة المصفوفة A بدقة، إذ هي مضمنة ضمن $x(t)$ $x(t+T)$ ويتم مراقبتهما online، لذا تكون الحاجة الى قياسات للحالة وللمصفوفة B لتحديث إشارة التحكم. ويستمر تكرار العملية حتى الوصول لشرط التقارب $|K_i - K_{i-1}| < \varepsilon$ وتحقيق الاستقرار.

المزايا والعيوب

تتميز هذه الطريقة بالتعامل مع الأنظمة دون الحاجة إلى المعرفة الكاملة والدقيقة لبارامتراتهما، وتحديث إشارة التحكم بشكل دائم طالما لم نحقق المطلوب. بينما تعاني من العبء الحسابي والزمني الناتج عن تكرار عملية الأمثلة بشكل كبير.

1.2. التحكم الأمثل باعتماد الطرق الإحصائية

تعتمد هذه الطريقة على مراقبة أداء النظام انطلاقاً من توزيع احتمالي للمصفوفة A ، وتضييق هذا التوزيع تدريجياً للوصول إلى القيمة الأكثر دقة. بعبارة أخرى، تهدف إلى الانتقال من مصفوفة A مجهولة بالكامل إلى مصفوفة A مُحَمَّنة بدقة متزايدة، ومن ثم استخدامها لحساب إشارة التحكم التي تحقق الاستقرار أو تتبع المسار المطلوب [13] تتميز هذه الخوارزمية بكونها آنية (Online)، أي لا تحتاج إلى محاكاة أو حسابات مسبقة خارج الزمن الحقيقي.

آلية العمل

تتعامل هذه الطريقة مع عدم اليقين في المصفوفة A من خلال منظور احتمالي. بدلاً من البحث عن قيمة محددة لـ A ، يتم التعامل مع كل سطر من أسطرها كمتجه عشوائي مستقل يتبع توزيعاً غاوسياً وفق المعادلة (12)

$$A = \begin{bmatrix} r_1^T \\ \vdots \\ r_n^T \end{bmatrix} \quad r_k \sim N(m_0, \Sigma_0) \quad \forall k = 1, \dots, n \quad (12)$$

حيث m_0 هو المتوسط الأولي، و Σ_0 هي مصفوفة التباين الأولية. وبهذا، يتم اختصار مشكلة البحث عن عناصر المصفوفة A كاملة إلى تقدير n متجه، لكل منها توزيع احتمالي يتم تحديثه بشكل مستقل.

في البداية، يتم تقسيم الفترة الزمنية الكاملة $[0, T]$ إلى فترات زمنية متساوية طولها Δt ، وبالتالي نحصل على M خطوة زمنية، نضعها في جولات كل جولة فيها S خطوة زمنية، ويكون لدينا $t_i^j = t_{i-1} + j\Delta t, j = 0, \dots, S$

تتكرر الخطوات التالية في كل جولة:

- حساب إشارة التحكم: في بداية كل جولة وباعتماد على التوزيع الاحتمالي من الجولة السابقة، توجد إشارة تحكم من خلال حل معادلة ريكتي بالاعتماد على القيمة المتوسطة لهذا التوزيع $\bar{A}_{i-1}$ وفق المعادلة (13)

$$\begin{cases} -\dot{P}(t) = \bar{A}_{i-1}^T P(t) + P(t) \bar{A}_{i-1} - P(t) B R^{-1} B^T P(t) + Q & t \in [t_{i-1}, T] \\ P(T) = Q_f \end{cases} \quad (13)$$

ونكون إشارة التحكم المثلى وفق المعادلة (14)

$$u_i^*(t) = -R^{-1} B^T P_i(t_i^j) x_i^j \quad j = 0, \dots, S-1 \quad (14)$$

حيث $x_i^j = x(t_i^j)$ هي الحالة المراقبة من أداء النظام خلال الجولة

- تطبيق إشارة التحكم ومراقبة الأداء: تُطبّق إشارة التحكم المحسوبة على النظام طوال الجولة (أي لـ S خطوة زمنية)، وتراقب استجابة النظام ويسجل مسار الحالة.
 - تحديث التوزيع الاحتمالي: في نهاية كل جولة، يتم تحديث التوزيع الاحتمالي الحالي باستخدام صيغ بايز (Bayesian formulas) وهي أداة رياضية لتحديث الاحتمالات، بناءً على المسار المراقب خلال الجولة. وبالتالي نحصل على توزيع احتمالي جديد π_i .
- أي يتم تحديث الاحتمالات حيث العناصر التي تتبأ بمسار قريب مما حدث فعلا يزداد احتمالها. والعناصر التي تتبأ بمسار بعيد عما حدث فعلا يقل احتمالها. تكون خوارزمية العمل:

- (1) تقسيم الفترة الزمنية $[0, T]$ الى M فترة زمنية طول كل منها Δt
- (2) جمع هذه الفترات ضمن جولات كل جولة تضم S فترة زمنية
- (3) اختيار توزيع احتمالي أولي لعناصر المصفوفة A
- (4) لكل جولة من 1 إلى عدد الجولات:
 - حساب متوسط التوزيع الحالي $\bar{A}_{i-1}$
 - إيجاد إشارة التحكم المثلى من خلال حل ريكاتي وفق هذا المتوسط
 - تطبيق إشارة التحكم الناتجة على النظام كامل الجولة
 - مراقبة أداء النظام وتخزين مسار الحالة
 - تحديث التوزيع الاحتمالي π_i وفقا للبيانات الناتجة عن مراقبة الأداء

المزايا والعيوب

استطاعت هذه الخوارزمية التعامل مع النظم الخطية غير المحددة بشكل جزئي بطريقة تكيفية من خلال اعتماد التوزيعات الاحتمالية لتخمين A ، ومراقبة أداء النظام. الامر الذي خفف من عدد مرات تنفيذ معادلة ريكاتي (حيث أصبحت تنفذ مرة واحدة كل جولة بدل من تكرار التنفيذ في كل خطوة زمنية).

لكنه، بالمقابل زاد التعقيد الحسابي بسبب حساب التوزيع الاحتمالي في كل جولة، وتزايد استهلاك الموارد بسبب تخزين أداء النظام ضمن كامل الجولة وتخزين التوزيعات الاحتمالية.

نتائج الدراسة التحليلية

بعد دراسة طريقتي التحكم الأمثل المذكورتين أعلاه في النظم الخطية غير المحددة جزئياً، وبالاستناد إلى مزايا وعيوب كل طريقة، يمكن تلخيصهما ضمن الجدول (1)، حيث n : عدد متغيرات الحالة، N : عدد التكرارات، Q : عدد الجولات،

الجدول (1): المقارنة بين طرق التحكم الأمثل في النظم الخطية غير المحددة جزئياً

الطريقة	آلية التعامل مع عدم اليقين	التعقيد الحسابي	الحاجة إلى الذاكرة واستخدام الموارد
PI	تتخلص من الحاجة إلى المصفوفة A من خلال إدخال قياسات الحالة $x(t)$ و $x(t+T)$ مباشرة في معادلة دالة الإنجاز التكرارية، وتحل هذه المعادلة بطريقة المربعات الصغرى (Least Squares) لإيجاد P	متوسط $O(N.n^6)$ بسبب square المستخدم للحصول على p بالإضافة إلى العمليات التكرارية	منخفضة نسبياً: تحتاج تخزين مصفوفتي P و K فقط، ويتم تحديثهما مع كل تكرار
الطريقة الإحصائية	تفرض توزيعاً احتمالياً أولياً لمصفوف المصفوفة A ، وتحسب إشارة التحكم في كل جولة باستخدام متوسط التوزيع الحالي. في نهاية كل جولة، تُراقب استجابة النظام وتُحدَّث التوزيع الاحتمالي	متوسط إلى مرتفع $O(Q \times (n^3 + S \times n^3 + n \times S^3))$. معادلة ريكاتي والتحديث البايزي ل n سطر	تخزين مسار النظام الكامل (S عينة من الحالة والتحكم) داخل كل جولة، بالإضافة إلى تخزين n توزيع إحصائي (متوسط

ومصفوفة تباير لكل سطر		باستخدام صيغة بايز، مما يضيق نطاق عدم اليقين تدريجياً	
-----------------------	--	---	--

كما هو موضح في الجدول (1)، نلاحظ أن خوارزمية PI الكلاسيكية تقدم نهجاً أكثر بساطة في التعامل مع عدم اليقين، حيث تستغني عن عبء بناء وتحديث النماذج الاحتمالية الذي يميز الطريقة الإحصائية. فرغم أن الطريقة الإحصائية تقلل من عدد مرات حل معادلة ريكاتي (مرة واحدة في بداية كل جولة)، إلا أن عملية التحديث البايزي المرافقة تفرض تعقيداً حسابياً إضافياً كبيراً واستهلاكاً مرتفعاً للذاكرة. لذا تظل خوارزمية PI أكثر فعالية في الحل، لكنها تعاني من مشكلة جوهرية تتمثل في كثرة التكرارات والعبء الحسابي المترتب على ذلك.

امتدادات أخرى لخوارزمية PI

تجدر الإشارة إلى أن خوارزمية PI لم تقتصر فعاليتها على فئة النظم الخطية غير المحددة جزئياً، بل شكلت أساساً متيناً للتعامل مع فئات أوسع من عدم اليقين:

- في النظم الخطية غير المحددة كلياً: حيث تكون كلتا المصفوفتين A و B مجهولتين، تم اعتماد مبدأ PI مع إضافة تعديلات على المعادلات الرياضية [14]، مما أتاح الاستغناء عن المصفوفات غير المعروفة والتعامل مع مصفوفات معلومة، بالاعتماد على قياسات الحالة وإشارة التحكم فقط.
- في أنظمة التتبع الخطية غير المحددة جزئياً: تم توسيع خوارزمية PI لتشمل مسائل التتبع في أفق منتهٍ [11,12] مع إدخال حد إضافي يعوض خطأ التتبع.

نستخلص مما سبق، أن خوارزمية PI أثبتت جدارتها كمنهجية أساسية ومرنة في التعامل مع عدم اليقين بمختلف أشكاله، وهو ما تؤكد الدراسات السابقة التي اعتمدتها باستمرار كنقطة انطلاق لتطوير حلولها. إلا أن التحدي المشترك الذي ظل قائماً في جميع هذه التطبيقات هو العدد الكبير للتكرارات وما يرافقه من زيادة في التعقيد الحسابي وزمن التنفيذ. انطلاقاً من هذه المكانة المتميزة لـ PI، نعتمدها في هذا البحث كأساس لعملنا، ونسعى إلى تطويرها من خلال دمج آلية القدر القائم على الحدث (Event-

(Triggered) بهدف تقليل عدد التكرارات والعبء الحسابي بشكل جوهري، دون المساس ببساطتها أو فعاليتها. ووعليه، فإن أي تحسين يُجرى على خوارزمية PI سيؤثر تلقائياً لأي امتداد مبني عليها. لذلك، ستركز المقارنة في هذا القسم على إثبات تفوق المنهجية المقترحة (ET-PI) على النسخة الكلاسيكية (PI) التي تمثل نقطة الانطلاق والأساس الذي بُنيت عليه التحسينات.

2. القدح القائم على الحدث (Event-Triggered)

كان تقليل التعقيد الحسابي واستهلاك الموارد عند تصميم المتحكمات نقطة اهتمام وبحث في العديد من الأدبيات السابقة، فتم اعتماد القدح القائم على الحدث كونه يؤمن فعالية حسابية كبيرة، حيث توجهت بعض الدراسات للتعامل مع الأنظمة الشبكية، وتقليل استهلاك الموارد بين الحساسات والمتحكم والمشغلات، من خلال دمج هذا النهج ضمن آلية العمل، الأمر الذي يجعل عملية نقل البيانات لا تتم بشكل دوري وإنما عند الحاجة فقط [17]. بينما في أنظمة التحكم التقليدية، تم دمج القدح القائم على الحدث بحيث لا يتم إرسال إشارة التحكم إلى النظام إلا عندما يكون هناك حاجة لذلك [18-19].

2.1. آلية عمل القدح القائم على الحدث Event-Triggered

يعتمد القدح القائم على الحدث في آلية عمله على مراقبة الاختلاف بين شعاع الحالة الحالي $x(t)$ المقاس بشكل مستمر وشعاع الحالة عند آخر لحظة قدح $x(t_k)$ ، وفق المعادلة (15)

$$e_j(t) = x(t) - x(t_k) \quad \forall t \in [t_k, t_{k+1}] \quad (15)$$

حيث $k=1,2,3,\dots$ يشير إلى عدد لحظات القدح، و t_k آخر لحظة قدح و t_{k+1} لحظة القدح التالية

ومقارنة هذا الاختلاف مع عتبة معينة $\delta_{trigger}$ ، ليحدد متى يتم تحديث إشارة التحكم، فإذا كان $e_j(t) > \delta_{trigger}$ عندها يحدث القدح، ويتم حساب إشارة تحكم جديدة، ويستمر تكرار هذه العملية طالما هناك تغير في الحالة [17]. أي تكون إشارة التحكم بين فترتي قدح ثابتة ومساوية لإشارة التحكم عند آخر لحظة قدح، وعندما يتحقق شرط القدح يتم تحديثها كما موضح بالمعادلة (16)

$$u(t) = \begin{cases} u_{constant} = u(t_k), & t \in \{t_k, t_{k+1}\} \\ u_{new} = u(t_{k+1}), & t = t_{k+1} \end{cases} \quad (16)$$

وتكون لحظة القدح التالية هي أصغر لحظة زمنية تحقق شرط القدح مجددا وفق المعادلة (17) [19].

$$t_{k+1} = \min\{t > t_k : ||x(t_k) - x(t)|| = \sigma ||x(t)||\} \quad (17)$$

أي آلية القدح تعتمد على وجود عتبة القدح التي تكون: إما قيمة ثابتة تحدد من قبل المصمم [18,20] ، أو تابع مرتبط بشعاع الحالة [17,19,21]، وتكون هذه العتبة هي أعلى اختلاف يتقبله النظام دون تحديث إشارة التحكم، بما لا يؤثر على استقراره.

توجهت بعض الدراسات لضبط هذه العتبة من خلال إضافة الخطأ ضمن دالة الإنجاز ، أي العمل على أكبر خطأ ممكن تحمله من قبل النظام، وليس فقط أصغر إشارة تحكم [17,21] ، بينما تناولت دراسات أخرى تحليل استقرار ليايونوف للنظام في الحلقة المغلقة ليتم تحديد عتبة القدح [18-19].

2.2. حساب عتبة القدح وفق تحليل استقرار ليايونوف

يتم حساب عتبة القدح وفق تحليل استقرار ليايونوف وفق التالي:

ليكن النظام الخطي المستمر وفق (1)، ويكون الاختلاف في شعاع الحالة ممثل بالمعادلة (15)، يتم تمثيل إشارة التحكم المطبقة بين فترتي قدح والمرتبطة بشعاع الحالة عند آخر لحظة قدح وفق (18)

$$u(t) = -K x(t_k) = -K[x(t) + e(t)] \quad (18)$$

وبالتالي تصبح معادلة النظام في الحلقة المغلقة بعد تعويض (18) فيها ممثلة بالمعادلة (19)

$$\dot{x} = (A - BK)x(t) + BKe(t) \quad (19)$$

وبما أن دالة ليايونوف $V(x) = x^T P x$ تحقق الفرضيتين التاليتين [18]

$$\underline{\alpha}|x|^2 \leq V(x) \leq \bar{\alpha}|x|^2$$

$$\frac{\partial V}{\partial x}(Ax + BKx + BKe) \leq -\alpha|x|^2 + b|e||x|$$

حيث $\alpha, \bar{\alpha}, \alpha, b \in R^+$ ، ووفق تحليل استقرار ليايونيوف، يجب المحافظة على تابع ليايونيوف متناقص أي

$$\alpha|x|^2 > b|e||x| \Rightarrow b|e| < \alpha|x|$$

$$|e| < \sigma|x| ; \sigma > 0$$

إذا لضمان تناقص تابع ليايونيوف، يجب تحقيق $|e(t)| < \sigma|x(t)|$ وإلا يحدث القدر.

اكتفت بعض الدراسات بهذا التحليل، وحددت شرط أن $\sigma < 1$ ، وتم اختيار قيم عشوائية ضمن هذا المجال [20]، بينما سيتم متابعة تحليل ليايونيوف في هذه الورقة للوصول لقيمة ملائمة لنظام خطي، محددة بناء على بارامترات.

يكون مشتق تابع ليايونيوف بالاعتماد على معادلة النظام في الحلقة المغلقة وفق المعادلة (20)

$$\dot{V}(x) = 2x^T P \dot{x} = 2x^T P[(A - BK)x(t) + BKe] \quad (20)$$

وتكون معادلة ريكاتي المولدة من مشتق ليايونيوف بالحالة الطبيعية (دون الخطأ والقدر) وفق (21):

$$(A - BK)^T P + P(A - BK) = -(Q + K^T R K) \quad (21)$$

إذا

$$2x^T P(A - BK)x = -x^T(Q + K^T R K)x \quad (22)$$

بتعويضها في المعادلة (20)، يصبح مشتق ليايونيوف (23)

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= 2x^T P \dot{x} = 2x^T P[(A - BK)x(t) + BKe] \\ &= -x^T(Q + K^T R K)x + 2x^T P B K e \end{aligned} \quad (23)$$

ولضمان الاستقرار، يجب أن يبقى مشتق ليايونيوف أصغر من الصفر وفق (24)

$$-x^T(Q + K^T RK)x + 2x^T PBKe < 0$$

$$2x^T PBKe < x^T(Q + K^T RK)x \quad (24)$$

مع استخدام خاصية norm والتي تساعد في تقدير الحد الأقصى للخطأ، يكون

$$||e|| < \frac{\lambda_{\min}(Q + K^T RK)}{2||PBK||} ||x|| \quad (25)$$

حيث $\lambda_{\min}$ هو أصغر قيمة ذاتية لمصفوفة $(Q + K^T RK)$

تم اعتماد هذا الشرط في [19]، لكن مع إضافة عامل أمان له 0.99، لذا تم وضع $\rho \in (0, 1)$ فيصبح شرط القدح

$$||e|| < \rho \frac{\lambda_{\min}(Q + K^T RK)}{2||PBK||} ||x|| \quad (26)$$

ولكن في هذا البحث يتم التعامل مع نظام غير محدد جزئياً، ويحتاج لتطبيق PI للوصول للحل الأمثل، وبناء على بنية هذه الخوارزمية التكرارية وتغير قيم كل من K_i, P_i مع كل تكرار، عندها تصبح عتبة القدح الموافقة متغيرة مع كل تكرار، وممثلة بالمعادلة (27)

$$\delta_i = \rho \frac{\lambda_{\min}(Q + K_i^T RK_i)}{2||P_i BK_i||} ||x|| \quad (27)$$

ويحدث القدح عندها $e > \delta_i$

3. الخوارزمية المقترحة (ET Policy Iterative)

انطلاقاً من مزايا القدح القائم على الحدث ودوره الفعال في تقليل العمليات التكرارية والعبء الحسابي، تم دمجه مع PI، فكان الهدف لا يتمثل في تحديد أوقات إرسال إشارة التحكم إلى النظام، وإنما تحديد متى يجب تنفيذ خوارزمية PI بشكل كامل.

ومن هنا تتجلى أهمية هذا الدمج، إذ يسهم في تقليل عدد مرات تنفيذ خوارزمية الـ PI اللازمة للوصول إلى الحل الأمثل، مما يؤدي مباشرة إلى تقليل عدد الحسابات المصفوفية المكلفة، وبالتالي خفض التعقيد الحسابي الكلي، مع الحفاظ على استقرار النظام وأدائه الأمثل. بمعنى آخر، يتحكم القدر بعدد PI، ويصبح عدد مرات تنفيذ الخوارزمية مساو لعدد مرات القدر المطلوبة.

خوارزمية العمل

(1) تهيئة النظام

- نفرض إشارة تحكم ابتدائية u_0 ، وبالتالي نحصل على المصفوفة K_0 والمصفوفة P_0 .

(2) مراقبة شرط القدر

- يتم حساب عتبة القدر وفق (27)، وخطأ الحالة وفق (15)، ومقارنة هذا الخطأ مع عتبة القدر الحالية δ_i
- إذا لم يتحقق شرط القدر، أي $e_i(t) < \delta_i$ ، يتم المحافظة على إشارة التحكم المطبقة على النظام $u(t) = kx(t_k)$
- وفي حال تحقق الشرط، أي $e_i(t) \geq \delta_i$ ، يتم تنفيذ دورة واحدة من خوارزمية PI كما يلي:

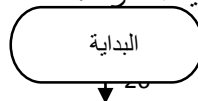
تقييم السياسة Policy Evolution: حساب المصفوفة p_i م وفق المعادلة (10).

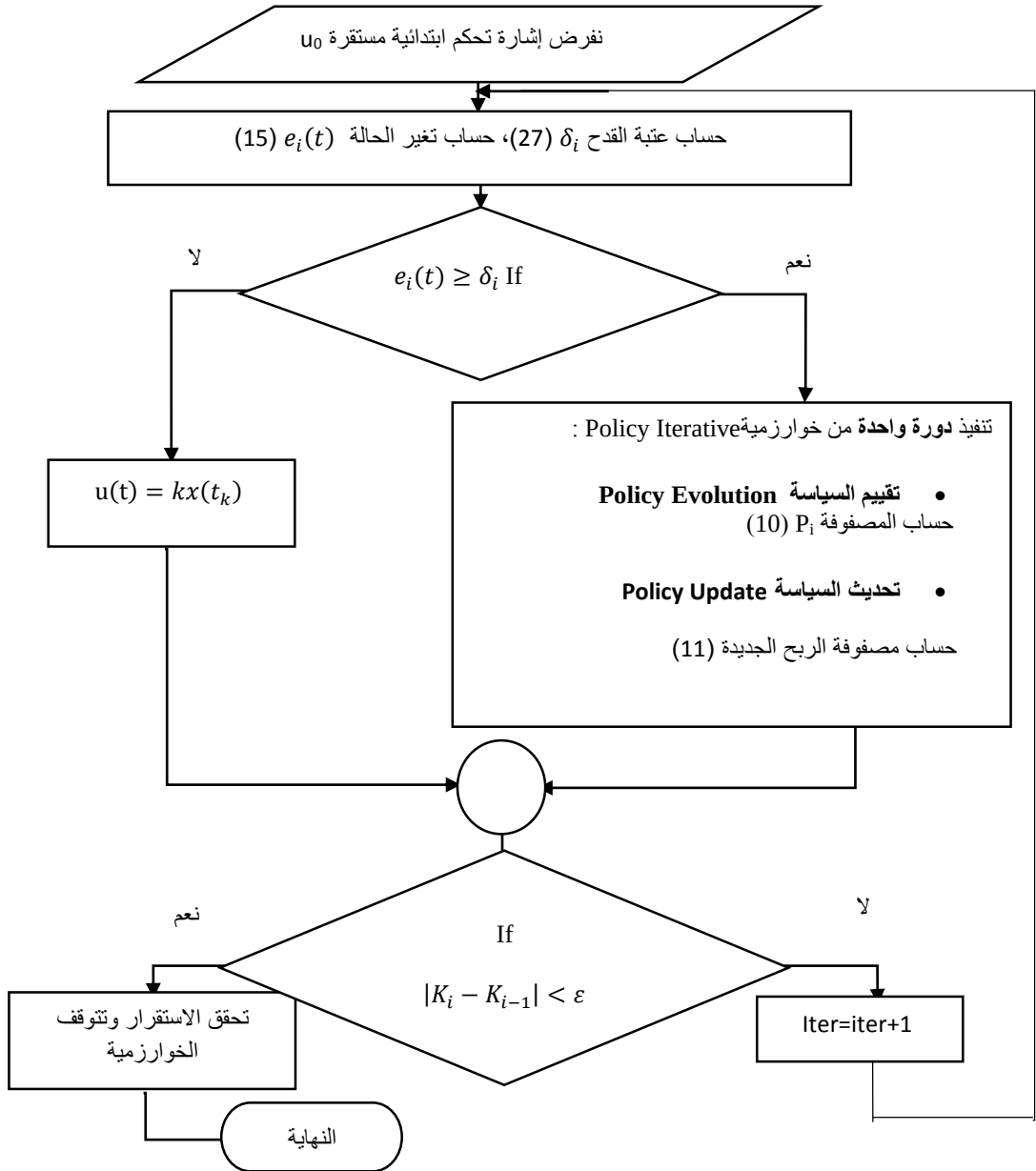
تحديث السياسة Policy Update: حساب مصفوفة الريح الجديدة وفق (11).

(3) شرط التوقف

يستمر تكرار العملية حتى الوصول إلى شرط التقارب $|K_i - K_{i-1}| < \varepsilon$ وتحقيق استقرار النظام.

يوضح الشكل (1) المخطط التدفقي للخوارزمية المقترحة.

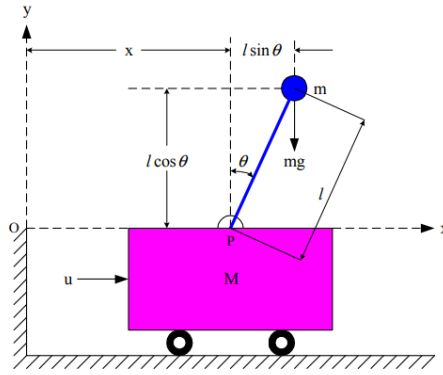




الشكل (1): بنية الخوارزمية المقترحة (ET-Policy Iterative)

VI. التطبيق والمحاكاة:

يعتبر نظام النواس المقلوب من النظم الأكثر اعتماداً كنظام فحص لنظريات التحكم، لبساطته وسهولة تطبيقه وفهمه [22]. لذا تم اعتماده في هذه الورقة لمقارنة أداء الخوارزمية المقترحة مع الخوارزمية الكلاسيكية. يتكون من نواس معلق بشكل مقلوب كتلته للأعلى على عربة قابلة للحركة أفقياً، كما موضح بالشكل (2). هذا النظام بطبعه غير مستقر، أي النواس سيقع بالحالة الطبيعية، لذا يتم تطبيق قوة خارجية على العربة لتسمح بتحريكها أفقياً، لضمان ثبات النواس بشكل عامودي [22]، يكون دخل النظام هو القوة المطبقة على العربة u ، وخرجه هو زاوية ميلان النواس عن الشاقول θ ، وتكون المعادلات التفاضلية للنظام [22]:



الشكل (2): نظام النواس المقلوب [23]

$$\ddot{x} = \frac{u + ml \sin \theta \dot{\theta}^2 - mg \cos \theta \sin \theta}{M + m - m \cos^2 \theta} \quad (28)$$

$$\ddot{\theta} = \frac{u \cos \theta + (M + m)g \sin \theta - ml \cos \theta \sin \theta \dot{\theta}^2}{ml \cos^2 \theta - (M + m)l} \quad (29)$$

يتم بتحويل النظام إلى صيغته الخطية حول نقطة توازنه أي $\theta \approx 0, \cos \theta = 1, \sin \theta = \theta$ وتمثيله وفق (1) باعتبار متغيرات الحالة $[x, \dot{x}, \theta, \dot{\theta}]$ والمصفوفات A, B كالتالي:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{mg}{M} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{g(M+m)}{M} & 0 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \\ 0 \\ -\frac{1}{lM} \end{bmatrix}$$

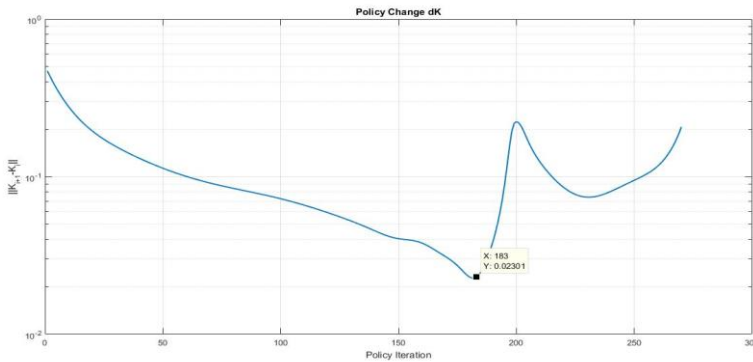
حيث بارامترات النواس المقلوب مبينة بالجدول (2)

الجدول (2): بارامترات النواس المقلوب

كتلة العربة M	كتلة النواس m	تسارع الجاذبية الأرضية g	طول النواس L
0.455 kg	0.21 kg	9.81 m/s ²	0.3 m

تم اعتماد النواس المقلوب كنظام غير محدد جزئياً انسجماً مع العديد من الدراسات السابقة [19,23] التي تناولت هذا النظام بافتراض وجود عدم يقين في بعض بارامترات النموذج أو في عناصر المصفوفة A.

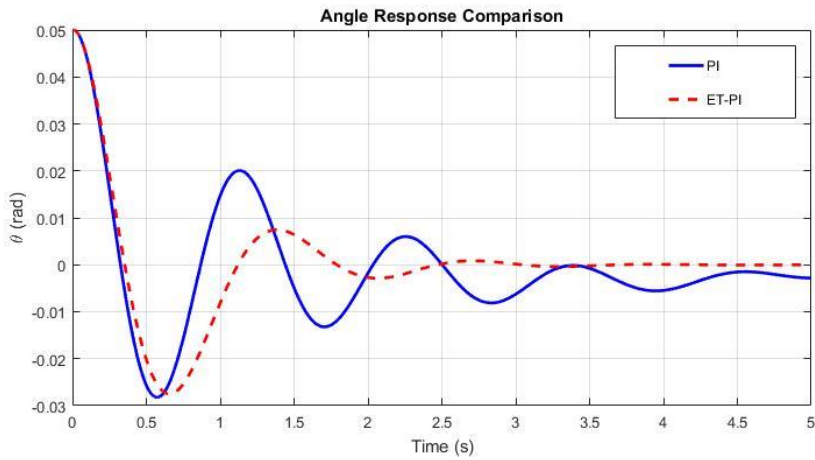
لتطبيق الخوارزمية، يتم إيجاد إشارة التحكم الأولية من خلال تطبيق LQR، وتوليد أول قيمة لعتبة القدرح الممثلة (27)، ويتم ضبط المصفوفات $Q = \text{diag}([10 \ 1 \ 500 \ 1])$ بهدف التركيز على زاوية النواس، و $R=0.2$ وتطبيق خوارزمية PI الكلاسيكية وخوارزمية ET-PI المقترحة، حيث تتوقف الخوارزمية تبعاً لشروط التقارب، وتم تحديد ε بعد مراقبة أداء النظام لفترة طويلة ولمرات عديدة، فتبين أن $\varepsilon \in \{0.02 - 0.05\}$ وهي القيم الصغرى للفرق بين $K_i - K_{(i-1)}$ والتي بعدها يصبح أي تغير في K يسبب انهيار لاستقرار كما موضح بالشكل (3)



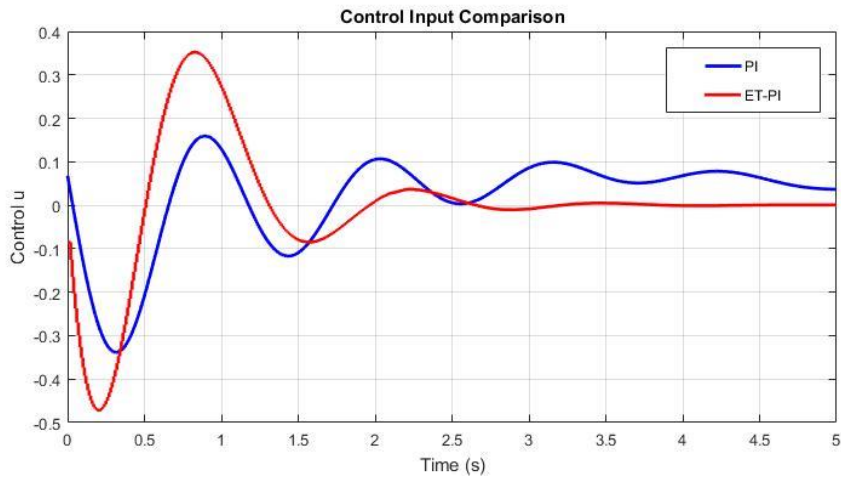
الشكل (3): تغيرات $|K_i - K_{(i-1)}|$

وكانت نتائج التنفيذ موضحة بالأشكال: الشكل (4) يمثل استجابة زاوية النواس عند تطبيق كلا الخوارزميتين، كما هو واضح من الشكل، أن الخوارزمية الكلاسيكية PI تعاني من اهتزازات بالإشارة، وهذا أمر متوقع كون تحديث إشارة التحكم يتم بشكل تكراري حتى وإن كان الاختلاف صغير جداً،

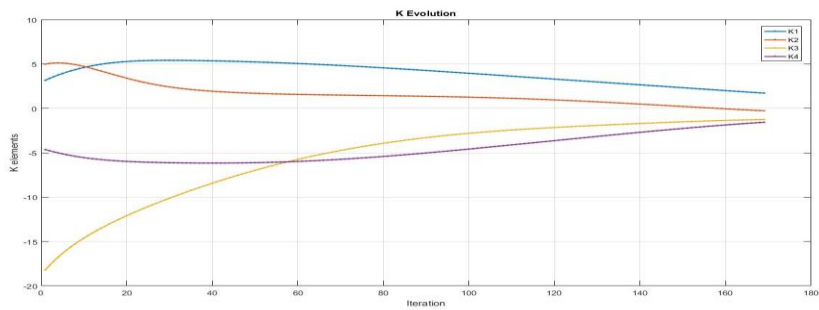
الأمر الذي يؤدي بدوره إلى التأخير في الوصول إلى الاستقرار. بينما حققت الخوارزمية المقترحة-ET-PI استقرار أسرع باهتزازات أقل، وذلك يعود إلى آلية القدح التي منعت تحديث إشارة التحكم إلا عند الضرورة. ويوضح الشكل (5) إشارة التحكم الناتجة من الخوارزميتين، ويلاحظ أن الإشارة الناتجة عن الخوارزمية المقترحة تكون ثابتة وتتغير عند القدح فقط، لكن مع مطال أكبر، وهذا أمر طبيعي ومتوقع كون إشارة التحكم لا تحدث سوى عند القدح، أي عندما يكون النظام على حافة انهيار الاستقرار. الأمر الذي يتطلب مطال أكبر لإعادة النظام إلى حالة مستقرة، ويوضح الشكل (6) والشكل (7) تغير عناصر المصفوفة k في كلا الخوارزميتين، ويلاحظ أن تغيير المصفوفة k عند تطبيق الخوارزمية PI استمر حتى التكرار 168، بينما عند تطبيق الخوارزمية ET-PI توقف التغير عند التكرار 89، وبالتالي تم تحقيق شرط التقارب بعدد تكرارات أقل. وللتأكيد على أن الخوارزمية المقترحة مازالت ضمن عمل الخوارزمية الكلاسيكية في تحقيق التحكم الأمثل، تم عرض تغير دالة الإنجاز وفق الشكل (8)، الذي يوضح أنها مازالت تسعى إلى القيمة الصغرى لها.



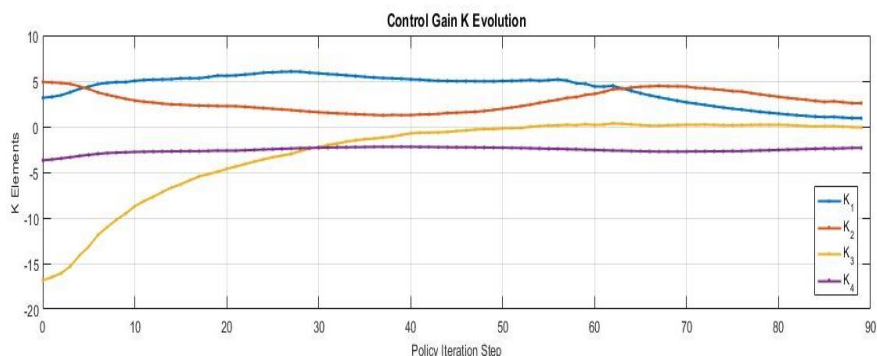
الشكل (4): استجابة زاوية النواس عند تطبيق الخوارزمية PI والخوارزمية ET-PI



الشكل (5): إشارة التحكم الناتجة عند تطبيق الخوارزمية PI والخوارزمية ET-PI

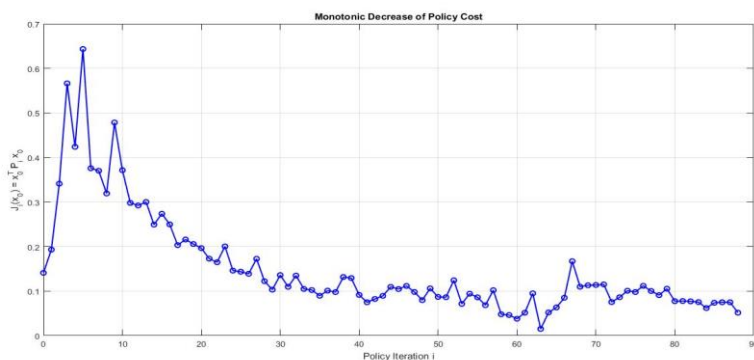


الشكل (6): تطور عناصر مصفوفة الربح الخلفي K عند تطبيق الخوارزمية الكلاسيكية PI



الشكل (7): تطور عناصر مصفوفة الربح الخلفي K عند تطبيق الخوارزمية المقترحة ET- PI

ET PI	PI	
0.1543 s	0.2117 s	زمن الارتفاع
2.2498 s	4.59372 s	زمن الاستقرار
89	168	عدد التكرارات
5.248266 s	14.224744 s	متوسط زمن التنفيذ



الشكل (8): تغير دالة الإنجاز عند تطبيق الخوارزمية المقترحة ET-PI

تم مقارنة الخوارزمية المقترحة بالخوارزمية الكلاسيكية وفق خصائص زمن الاستقرار وزمن الارتفاع وعدد التكرارات ومتوسط زمن التنفيذ وفق الجدول (3)

الجدول(3) : مقارنة بين الخوارزمية الكلاسيكية PI والخوارزمية المقترحة ET-PI

بمقارنة النتائج التي تم التوصل إليها، يمكننا ملاحظة أن الخوارزمية المقترحة ET-PI حققت الاستقرار بشكل أسرع، وهذا متوقع لأنها تجنب تحديث إشارة التحكم بشكل مستمر، وإنما في حال الحاجة لها فقط، مع تأمين عدد تكرارات أقل والذي رافقه زمن تنفيذ أصغر وعبء حسابي أقل، كون عدد العمليات الحسابية بات أقل، الأمر الذي أدى بدوره إلى استهلاك أقل للموارد.

VII. الخلاصة والآفاق المستقبلية

تم في هذه الورقة عرض طرق التحكم الأمثل الأبرز في النظم الخطية غير المحددة جزئياً، وإيضاح آلية عملها ومزايا وعيوب كل طريقة، ليتم التوصل إلى أن خوارزمية PI توفر بنية أكثر بساطة وأقل تعقيد حسابي من الطرق الأخرى المدروسة، ولكنها تعاني من تحديات تتمثل بعدد التكرارات الكبير والاستهلاك المتزايد للموارد. وللتغلب على هذه المشاكل، تم دمجها مع Event-Triggered، مما أدى إلى تحقيق استقرار أسرع مع زمن تنفيذ أصغر وعدد تكرارات أقل، ولكن مازال هناك مجالات واسعة للعمل عليها في المستقبل، حيث يمكن التوجه إلى تطوير الخوارزمية المقترحة بما يجعل من الممكن تطبيقها على النظم الخطية غير المحددة بشكل كامل أيضاً، وإمكانية إضافة آلية تعلم تجعل عدد مرات تنفيذ الخوارزمية يصبح أقل من عدد مرات القدر المطلوبة.

VIII. المراجع

1. Xiang, Z., & Wei, W. (2021, June). Design of DC motor position tracking system based on LQR. In Journal of Physics: Conference Series (Vol. 1887, No. 1, p. 012052). IOP Publishing.
2. Feng, X., Liu, S., Yuan, Q., Xiao, J., & Zhao, D. (2023). Research on wheel-legged robot based on LQR and ADRC. Scientific reports, 13(1), 15122.

3. Wen Sun, (2021) ,Note on Iterative Linear Quadratic Regulator
4. Rani, M., & Kamlu, S. S. (2025). Optimal LQG controller design for inverted pendulum systems using a comprehensive approach. *Scientific Reports*, 15(1), 4692
5. Ingabire, A., & Sklyarov, A. A. (2019). Control of longitudinal flight dynamics of a fixedwing UAV using LQR, LQG and nonlinear control. In *E3S Web of Conferences* (Vol. 104, p. 02001).
6. Fink, M. (2021). Implementation of Linear Model Predictive Control–Tutorial. *arXiv preprint arXiv:2109.11986* .
7. Berberich, J., Köhler, J., Müller, M. A., & Allgöwer, F. (2022). Linear tracking MPC for nonlinear systems—Part I: The model-based case. *IEEE transactions on automatic control*, 67(9), 4390–4405.
8. Li, W., Zhang, X., Wang, Y., & Xie, S. (2024). Comparison of Linear and Nonlinear Model Predictive Control in Path Following of Underactuated Unmanned Surface Vehicles. *Journal of Marine Science and Engineering*, 12(4), 575
9. Vrabie, D., Pastravanu, O., Abu-Khalaf, M., & Lewis, F. L. (2009). Adaptive optimal control for continuous-time linear systems based on policy iteration. *Automatica*, 45(2), 477–484.
10. Ma, Y., Xu, D., Huang, J., & Li, Y. (2023). Robust Control of An Inverted Pendulum System Based on Policy Iteration in Reinforcement Learning. *Applied Sciences*, 13(24), 13181.
11. Li, C., Liu, D., & Li, H. (2015). Finite horizon optimal tracking control of partially unknown linear continuous-time systems using policy iteration. *IET Control Theory & Applications*, 9(12), 1791–1801.
12. Modares, H., & Lewis, F. L. (2014). Linear quadratic tracking control of partially-unknown continuous-time systems using reinforcement

- learning. *IEEE Transactions on Automatic control*, 59(11), 3051–3056.
13. Pacifico, A., Pesare, A., & Falcone, M. (2021, June). A new algorithm for the LQR problem with partially unknown dynamics. In *International Conference on Large-Scale Scientific Computing* (pp. 322–330). Cham: Springer International Publishing.
14. Jiang, Y., & Jiang, Z. P. (2012). Computational adaptive optimal control for continuous-time linear systems with completely unknown dynamics. *Automatica*, 48(10), 2699–2704.
15. Kiumarsi, B., & Başar, T. (2019, December). Secure Linear Quadratic Regulator Using Sparse Model-Free Reinforcement Learning. In *2019 IEEE 58th Conference on Decision and Control (CDC)* (pp. 3641–3647). IEEE.
16. Jha, S. K., Roy, S. B., & Bhasin, S. (2017). Data-driven adaptive LQR for completely unknown LTI systems. *IFAC-PapersOnLine*, 50(1), 4156–4161.
17. Sahoo, A., Narayanan, V., & Jagannathan, S. (2018). A min-max approach to event-and self-triggered sampling and regulation of linear systems. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 66(7), 5433–5440.
18. Tabuada, P. (2007). ETreal-time scheduling of stabilizing control tasks. *IEEE Transactions on Automatic control*, 52(9), 1680–1685.
19. Rajan, A., & Tallapragada, P. (2022). Analysis of Inter-Event Times in Linear Systems under ETor Self-Triggered Control. *arXiv preprint arXiv:2201.02090*.

20. Etienne, L., Di Gennaro, S., & Barbot, J. P. (2015, July). Event triggered observer-based control for linear systems with time varying uncertainties. In *2015 American Control Conference (ACC)* (pp. 1531–1536). IEEE
21. Moghadam, R., Narayanan, V., & Jagannathan, S. (2022). ETOptimal adaptive control of partially unknown linear continuous-time systems with state delay. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems*, 53(6), 3324–3337.
22. Varghese, E. S., Vincent, A. K., & Bagyaveereswaran, V. (2017, November). Optimal control of inverted pendulum system using PID controller, LQR and MPC. In *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering* (Vol. 263, No. 5, p. 052007). IOP Publishing.
23. Prasad, L. B., Tyagi, B., & Gupta, H. O. (2014). Optimal control of nonlinear inverted pendulum system using PID controller and LQR: performance analysis without and with disturbance input. *International Journal of Automation and Computing*, 11(6), 661–670.
24. Jiang, Y., Wang, Y., Bortoff, S. A., & Jiang, Z. P. (2016). An iterative approach to the optimal co-design of linear control systems. *International Journal of Control*, 89(4), 680–690