تمثيل قياسات يونغ المعممة و ظواهر التركيز و السلوك غير المحدود باستخدام توابع الشبكة

Representation of generalized Young measures, concentration phenomena, and unbounded behavior using grid functions.

اعداد : مخائيل عازار اشراف : أ.د منير مخلوف

الملخص:

ندرس في هذا العمل مسألة تمثيل السلوك الحدي لمتتاليات التوابع غير المحدودة، بما في ذلك ظواهر التركيز و التباعد نحو اللانهاية ضمن إطار غير قياسي يعتمد على التوابع الشبكية. بالرغم من أن قياسات يونغ الكلاسيكية تصف ظاهرة الاهتزاز للمتتاليات المحدودة إلا أنها غير كافية لتمثيل ظواهر التركيز و التباعد نحو اللانهاية. سنقدم إطاراً غير قياسي موحداً يسمح بوصف السلوك المحدود و غير المحدود انطلاقاً من تابع شبكي واحد. تتمثل النتيجة الرئيسية لهذا العمل في مبرهنة تمثيل موحد تبين أن تابعاً شبكياً واحداً يكفي لاستخلاص جميع مكونات الوصف الحدي، بما في ذلك قياس يونغ و قياس التركيز و قياسات الاتجاه نحو اللانهاية، و يعدّ هذا التمثيل امتداداً طبيعياً لنتائج بوتازي نحو الحالات التي تتجاوز الفرضية المحدودية.

الكلمات المفتاحية: التحليل غير القياسي ، التوابع الشبكية، قياسات يونغ، قياس التركيز، قياس الاتجاه نحو اللانهاية، مبرهنة التمثيل الموحد.

Abstract: In This work, we study the problem of representing the limiting behavior of sequences of unbounded functions, including concentration phenomena and escape-to-infinity, within a nonstandard framework based on grid functions. Although classical Young measures describe the oscillatory behavior of bounded sequences, they are not sufficient to represent concentration phenomena and escape-to-infinity. We introduce a unified nonstandard framework that describes both bounded and unbounded behaviors through a single grid function. The main result is a unified representation theorem showing that one grid function is sufficient to extract all components of the limiting description, including the Young measure, the concentration measure, and the directional measure at infinity. This representation provides a natural extension of Bottazzi's results beyond the boundedness assumption

Keywords: Nonstandard Analysis, grid function, Young measure, concentration measure, escape-to-infinity direction measure, unified representation theorem.

1. مقدمة:

تلعب ظواهر الاهتزاز و التركيز و التباعد نحو اللانهاية دوراً أساسياً في العديد من مسائل التحليل الرياضي و لا سيما في حساب التغيرات و المعادلات التفاضلية الجزئية و التحليل التابعي. غالباً ما تظهر هذه الظواهر عند دراسة النهايات لمتتاليات من التوابع التي لا تمتلك تقارباً قوياً، الأمر الذي يجعل الوصف النقطي التقليدي غير كافٍ لتمثيل سلوكها الحدي.

لقد شكلت قياسات يونغ أداة فعالة لوصف ظاهرة الاهتزاز في المتتاليات المحدودة. إلا أنها غير كافية لتمثيل ظواهر التركيز و التباعد نحو اللانهاية، نظراً لاعتمادها على الفرضيات المحدودية. من أجل ذلك، ظهرت قياسات يونغ المعممة التي تجمع بين قياس يونغ الكلاسيكي و قياس التركيز و قياسات الاتجاه عند اللانهاية، و بذلك أصبح من الممكن وصف السلوك الحدي للمتتاليات التي تتجاوز فرضية المحدودية، إلا أن هذا البناء يقوم على ثلاثية من القياسات يتم بناءها بصورة مستقلة، و لا يقدم تمثيلاً موحداً تستخلص فيه جميع هذه المكونات من كائن رياضي واحد. حيث أن التحليل غير القياسي: هو فرع من التحليل الرياضي يوسّع الأعداد الحقيقية إلى أعداد حقيقية زائدية تتضمن الأعداد اللامتناهية في الصغر و اللامتناهية في الكبر، و يتيح دراسة المفاهيم و المسائل الرياضية باستخدام هذه الأعداد مع الحفاظ على الخواص الأساسية للتحليل الكلاسيكي.

قدم التحليل غير القياسي إطاراً بديلاً لدراسة هذه الظواهر من خلال التوابع الشبكية، حيث بيّنت أعمال بوتازي أن التوابع الشبكية المحدودة تولد بصورة طبيعية قياسات يونغ الكلاسيكية، كما أظهرت هذه الأعمال وجود صلة وثيقة بين التحليل غير القياسي و نظرية قياسات يونغ، غير أنها اقتصرت على الحالة المحدودة، و لم تمتد إلى الحالة غير المحدودة، و بالتالي لم تقدم إطاراً موحداً لوصف التركيز و التباعد نحو اللانهاية.

2. هدف البحث:

يهدف هذا البحث إلى تطوير إطار غير قياسي موحد لدراسة السلوك الحدي للمتتاليات غير المحدودة، و ذلك من خلال:

1. بناء تمثيل موحد يجمع السلوكين المحدود و غير المحدود ضمن بناء رياضي واحد يعتمد على التوابع الشبكية.

2. توصيف ظواهر التركيز و التباعد نحو اللانهاية باستخدام مكونات غير قياسية تنطلق من تابع شبكي واحد.
3. بناء فضاء معمم موحد يجمع بين القيم المنتهية و فضاء الاتجاهات الحدية ضمن إطار طبولوجي مناسب.
4. توسيع نتائج بوتازي إلى الحالات التي تتجاوز فرضية المحدودية، بما يسمح بوصف السلوك الحدي للمتتاليات غير المحدودة.

3. تعاريف و مفاهيم أساسية:

سنستعرض بعض المفاهيم الأساسية و النتائج من التحليل غير القياسي التي ستكون مفيدة في هذا البحث(كولدبيلت [14] و أيضاً [7,6,5,4,1]).

لتكن $\Omega \subseteq \mathbb{R}^k$ مجموعة مفتوحة أو اللصاقة لمجموعة مفتوحة، سنذكر الفضاءات المتجهية الحقيقية الآتية:

- $C_b^0(\Omega)$ مجموعة كل التوابع المحدودة من $C^0(\Omega)$ و $\lim_{|x|\to\infty} f(x) = 0$.
- $C_c^0(\Omega)$ مجموعة كل التوابع من $C_b^0(\Omega)$ و دعائمها مجموعات متراصة.
- $\mathfrak{D}(\Omega)$ مجموعة كل التوابع من $C^\infty(\Omega)$ و دعائمها مجموعات متراصة.
- $L^p(\Omega)$ مجموعة صفوف التكافؤ للتوابع القابلة للقياس $f: \Omega \to \mathbb{R}$ التي تحقق :

$$\int_\Omega |f|^p \, dx < \infty$$

إذا كان $f \in L^p(\Omega)$ فإن النظيم L^p لـ f يعرف بالشكل:

$$\|f\|_p^p = \int_\Omega |f|^p \, dx.$$

- $\mathfrak{D}'(\Omega)$ فضاء التوزيعات مجموعة كل التوابع الخطية المستمرة المعرفة بالشكل:

$$T: \mathfrak{D}(\Omega) \to \mathbb{R}, \varphi \mapsto T(\varphi) = \langle T, \varphi \rangle_{\mathfrak{D}(\Omega)}$$

حيث φ تابع الاختبار. عندما يكون T تابع من L^p سنكتب $\int_\Omega T\varphi \, dx$ بدلاً من $\langle T, \varphi \rangle_{\mathfrak{D}(\Omega)}$. إذا كان $T \in \mathfrak{D}'(\Omega)$ سنرمز لمشتق T بـ DT معرف بالشكل :

$$\langle DT, \varphi\rangle_{\mathfrak{D}(\Omega)} = -\langle T, D\varphi\rangle_{\mathfrak{D}(\Omega)}.$$

- $\mathbb{M}(\mathbb{R})$ مجموعة قياسات رادون ν على $\mathbb{R}$ و تحقق $|\nu|(\mathbb{R}) < \infty$.
- $\mathbb{M}_{\mathbb{P}}(\mathbb{R})$ مجموعة كل القياسات الاحتمالية $\nu \in \mathbb{M}(\mathbb{R})$.
- إن التوابع القابلة للقياس $\nu: \Omega \to \mathbb{M}_{\mathbb{P}}(\mathbb{R})$ تسمى قياسات يونغ ، كذلك التوابع القابلة للقياس $\nu: \Omega \to \mathbb{M}(\mathbb{R})$ بالقياسات الوسيطية. إذا كان ν قياس وسيطي و كانت $x \in \Omega$ سنكتب ν_x بدلاً من $\nu(x)$.في [8,3,2]
- نقول إن قياس يونغ هو قياس ديراك إذا كان من أجل $x \in \Omega$ يوجد عدد حقيقي $r \in \mathbb{R}$ بحيث $\nu_x = \delta_r$، أي يوجد تابع $f: \Omega \to \mathbb{R}$ بحيث $\nu_x = \delta_{f(x)}$.

إن مجموعة الأعداد الحقيقية الزائدية ${}^*\mathbb{R}$ هي التوسيع غير القياسي لمجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$. نقول إن العدد الحقيقي الزائدي $x \in {}^*\mathbb{R}$ منتهٍ إذا وجد عدد حقيقي $M \in \mathbb{R}$ يحقق $|x| < M$، و ندعو ${}^*\mathbb{R}_{fin} = \{x \in {}^*\mathbb{R}; x\ finite\}$ مجموعة الأعداد الحقيقية الزائدية المنتهية (نقول إن $x \in {}^*\mathbb{R}^k$ منتهية إذا و فقط إذا كان كل مركباتها منتهية من أجل $k \in \mathbb{N}$). إن كل عدد $x \in {}^*\mathbb{R}$ منتهي يكون قريب بشكل لا نهائي من عدد حقيقي وحيد r هو الجزء القياسي للعدد x و نكتب $r = st(x)$. نقول إن $x, y \in {}^*\mathbb{R}$ متجاوران إذا كان $|x - y| \approx 0$ و نكتب $x \approx y$. كما نرمز لمجموعة كل الأعداد الحقيقية الزائدية المتجاورة مع عدد حقيقي زائدي x بشكل لامتناهي في الصغر بـ $hal(x)$. إذا كانت $A \subseteq \mathbb{R}$ عندئذٍ ندعو توسيعها غير القياسي ${}^*A \in {}^*\mathbb{R}$ مجموعة داخلية.

تعريف (1.3): (قياس لوب):

لتكن A مجموعة منتهية زائدية، و $\mathcal{F}$ جبر من المجموعات الداخلية الجزئية لـ A، و ليكن μ تابع قياس جمعي منتهي داخلي معرف بالشكل: $\mu: \mathcal{F} \to {}^*[0, +\infty]$، عندئذٍ نعرف قياس لوب الموافق لـ μ بأنه القياس الحقيقي:

$$\mu_L: L(\mathcal{F}) \to [0, +\infty]$$

حيث $L(\mathcal{F})$ هو σ – جبر المتولد عن $\mathcal{F}$، و يحقق:

$$\mu_L(E) = st(\mu(E)).$$

من أجل كل مجموعة داخلية $E \in \mathcal{F}$.(نحصل على μ_L بتمديد الجزء القياسي للقياس الداخلي بواسطة كارتيودوري).

سنقدم الآن تعاريف و بعض خواص توابع الشبكة التي درست في [12]. لقد تم تعريف توابع الشبكة على Ω بأنها توابع معرفة على مجال منتهي زائدي، نحصل عليه بأخذ تقاطع Ω^* مع شبكة منتهية زائدية منتظمة. لقد اخترنا العمل مع شبكة منتظمة لتسهيل تمثيل الاشتقاق و التكامل، و من أجل كل مجموعة داخلية $A \subseteq \mathbb{X}^k$ فإن قياس لوب الموافق لقياس العد الشبكي يعطى بالشكل $\mu_L(A) = st(\sum_{x\in A} \varepsilon^k)$.

تعريف (2.3): (الشبكة المنتهية الزائدية و تابع الشبكة):

ليكن $N_0 \in {}^*\mathbb{N}$ عدد طبيعي زائدي غير منتهٍ. لنضع $N = N_0!$ و $\varepsilon = 1/N$ و نعرف:

$$\mathbb{X} = \{n.\varepsilon : n \in [-N^2, N^2] \cap {}^*\mathbb{Z}\}$$

عندئذٍ نقول إن التابع الداخلي ${}^*\mathbb{R} \to \mathbb{X}^k : f$ تابع شبكة . إذا كانت $\Omega \subseteq \mathbb{X}^k$ مجموعة داخلية فإن فضاء كل توابع الشبكة $\mathbb{G}(\Omega)$ المعرف على Ω :

$$\mathbb{G}(\Omega) = \{f : \Omega \to {}^*\mathbb{R}\}$$ حيث f داخلي.

إن اختيارنا لشبكة منتهية زائدية ذات أطراف منتهية بدلاً من الشبكة $\{n.\varepsilon; n \in {}^*\mathbb{Z}\}$ يسمح بتمثيل منتهي زائدي للمجموعات المحدودة و غير المحدودة.

تعريف (3.3): (المجال المنتهي الزائدي):

من أجل أي $\Omega \in \mathbb{R}^k$ سنعرف $\Omega_{\mathbb{X}} = {}^*\Omega \cap \mathbb{X}^k$ ، ونلاحظ إن $\Omega_{\mathbb{X}}$ مجموعة جزئية داخلية من $\mathbb{X}^k$ و منتهية زائدية. إذا كانت $\Omega \subseteq \mathbb{R}^k$ مجموعة مفتوحة، فإن $st(\Omega_{\mathbb{X}}) = \overline{\Omega}$ (المبرهنة 5.2 في [12]).

نقول إن $x \in \Omega_{\mathbb{X}}$ نقطة متجاورة قياسياً (nearstandard) في Ω إذا و فقط إذا وجد $y \in \Omega$ بحيث إن $x \approx y$.

بما أن توابع الشبكة معرفة على مجموعة متقطعة، عندئذٍ يمكن تمثيل المشتق بمؤثر فرق منتهٍ بخطوة لامتناهية في الصغر.

تعريف (4.3): (اشتقاق تابع الشبكة): ليكن $f \in \mathbb{G}(\Omega_{\mathbb{X}})$ تابع شبكة داخلي، نعرف الفرق المنتهي– i من اليمين بخطوة ε بالشكل:

$$\mathbb{D}_i f(x) = \mathbb{D}_i^+ f(x) = \frac{f(x+\varepsilon e_i)-f(x)}{\varepsilon}$$

و الفرق المنتهي– i من اليسار بخطوة ε بالشكل:

$$\mathbb{D}_i^- f(x) = \frac{f(x)-f(x-\varepsilon e_i)}{\varepsilon}$$

إذا كان $n \in {}^*\mathbb{N}$، فإن $\mathbb{D}_i^n$ يعرف بالشكل $\mathbb{D}_i(\mathbb{D}_i^{n-1})$. إذا كان α الدليل المتعدد عندئذٍ:

$$\mathbb{D}^\alpha f = \mathbb{D}_1^{\alpha_1}\mathbb{D}_2^{\alpha_2} \dots . \mathbb{D}_n^{\alpha_n} f.$$

كما أن التكامل الشبكي يعرف بمجموع منتهي زائدي:

تعريف (5.3): (تكامل الشبكة و الجداء الداخلي)

ليكن $f, g: {}^*\Omega \to {}^*\mathbb{R}$ و لتكن $A \subseteq \Omega_{\mathbb{X}} \subseteq \mathbb{X}^k$ مجموعة داخلية، نعرف:

$$\int_A f(x).d\mathbb{X}^k = \varepsilon^k.\sum_{x\in A} f(x)$$

و الجداء الداخلي:

$$\langle f,g\rangle = \int_{\mathbb{X}^k} f(x).g(x)d\mathbb{X}^k = \varepsilon^k.\sum_{x\in A} f(x).g(x)$$

بحيث إنه إذا $x \notin {}^*\Omega$ فإن $f(x) = g(x) = 0$.

تعريف (6.3): نقول إن التابع $f \in \mathbb{G}(\Omega_{\mathbb{X}})$ S– مستمر على $\Omega_{\mathbb{X}}$ ($f \in S^0(\Omega_{\mathbb{X}})$) إذا و فقط إذا تحقق:

1. يوجد $x \in \Omega_{\mathbb{X}}$ نقطة متجاورة قياسياً بحيث يكون $f(x)$ منتهٍ.
2. من أجل كل $x, y \in \Omega_{\mathbb{X}}$ نقطتين متجاورتين قياسياً بحيث إذا كان $x \approx y$ فإن $f(x) \approx f(y)$.

نقول إن التابع f من الصف $S^{\infty}(\Omega_{\mathbb{X}})$ إذا كان $\mathbb{D}^{\alpha}f \in S^{0}(\Omega_{\mathbb{X}})$ من أجل أي دليل متعدد قياسي α (أي التابع f قابل للاشتقاق عدداً لانهائي من المرات و جميع المشتقات تكون S– مستمر).

نعرف جبر توابع الاختبار على فضاء توابع الشبكة بالشكل التالي:

$\mathfrak{D}_{\mathbb{X}}(\Omega_{\mathbb{X}}) = \{f \in S^{\infty}(\Omega_{\mathbb{X}})\}$ حيث $st(supp(f))$ مجموعة متراصة في Ω.

و ندعوه الفضاء المناظر غير القياسي لفضاء توابع الملساء التي دعاماتها مجموعات متراصة.

حسب التمهيدية (2.3) في [12] تم إثبات: إذا كان $\varphi \in \mathfrak{D}_{\mathbb{X}}(\Omega_{\mathbb{X}})$ فإن $st(\varphi) \in \mathfrak{D}(\Omega)$، و إذا كان

$\varphi \in \mathfrak{D}(\Omega)$ فإن ${}^{*}\varphi_{|\mathbb{X}} \in \mathfrak{D}_{\mathbb{X}}(\Omega_{\mathbb{X}})$.

سنعرف علاقة التكافؤ على فضاء توابع الشبكة:

تعريف (7.3): ليكن $f, g \in \mathbb{G}(\Omega_{\mathbb{X}})$، نقول إن $f \equiv g$ إذا و فقط إذا كان من أجل كل $\varphi \in \mathfrak{D}_{\mathbb{X}}(\Omega_{\mathbb{X}})$ يتحقق $\langle f, \varphi\rangle \approx \langle g, \varphi\rangle$. ندعو $[f]$ صف تكافؤ لـ f بالنسبة $\equiv$.

لقد تم أثبات (في [12]) أن فضاء توابع الشبكة يعمم لفضاء التوزيعات، حيث يوجد فضاء جزئي حقيقي من $\mathbb{G}(\Omega_{\mathbb{X}})/\equiv$ إيزومورفي مع فضاء التوزيعات.

مبرهنة (1.3) [12]:

ليكن $\mathfrak{D}'_{\mathbb{X}}(\Omega_{\mathbb{X}}) = \{f \in \mathbb{G}(\Omega_{\mathbb{X}})\}$ بحيث $\langle f, \varphi\rangle$ منتهٍ من أجل كل $\varphi \in \mathfrak{D}_{\mathbb{X}}(\Omega_{\mathbb{X}})$. إن التابع $\Phi: \mathfrak{D}'_{\mathbb{X}}(\Omega_{\mathbb{X}})/\equiv \to \mathfrak{D}'(\Omega)$ المعرف بالشكل:

$$\langle \Phi[f], \varphi\rangle_{\mathfrak{D}(\Omega)} = st(\langle f, {}^{*}\varphi\rangle)$$

هو إيزومورفيزم لفضاءات متجهية حقيقية.

إن المبرهنة (19.3) في [12] تبيّن كيفية الحصول على تضمين غير قانوني للفضاء $\mathfrak{D}'(\mathbb{R})$ في الفضاء $\mathfrak{D}'_{\mathbb{X}}(\mathbb{X})$ باستخدام الاشتقاق الشبكي.

1.3 توابع الشبكة كتوابع من الفضاء $L^p{}^*$:

من أجل كل $f \in \mathbb{G}(\Omega_{\mathbb{X}})$ نعرف النظيم $L^p{}^*$ لـ f بالشكل:

$$\|f\|_p^p = \varepsilon^k.\sum_{x\in\Omega_{\mathbb{X}}}|f(x)|^p \quad \text{إذا كان} \quad 1 \le p < \infty \quad \text{و} \quad \|f\|_\infty = \max_{x\in\Omega_{\mathbb{X}}}|f(x)|.$$

إن التمهيدية (1.4) في [12] تبيّن أنه إذا كان $\|f\|_p \in {}^*\mathbb{R}_{fin}$ من أجل $1 \le p \le \infty$ فإن $f \in \mathfrak{D}'_{\mathbb{X}}(\Omega_{\mathbb{X}})$، أي أن $[f]$ توزيع معرف بشكل جيد.

2.3 قياسات يونغ:

سنذكر بعض التعاريف و النتائج على قياسات يونغ.

تعريف (8.3): ليكن $\nu: \Omega \to \mathbb{M}_{\mathbb{P}}(\mathbb{R})$ قياس يونغ. إذا كان $g \in C_b^0(\mathbb{R})$، فإن التركيب $g(\nu)$ يعرف بالشكل:

$$g\big(\nu(x)\big) = \int_{\mathbb{R}} g d\nu_x$$

من خلال قياسات يونغ نستطيع تمثيل النهاية الضعيفة– $\star$ في L^∞ لتركيب متتالية محدودة في L^1 مع تابع في $C_b^0(\mathbb{R})$. إن النتيجة التالية هي إحدى نتائج المبرهنة الأساسية لقياس يونغ:

مبرهنة (2.3) [9,3,2]: لتكن $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية محدودة من التوابع في $L^1(\Omega)$، عندئذٍ يوجد متتالية جزئية $\{u_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$، و قياس يونغ ν بحيث أياً كان $g \in C_b^0(\mathbb{R})$ و $\varphi \in C_c^0(\mathbb{R})$ يكون:

$$\lim_{k\to\infty}\int_\Omega g\left(u_{n_k}(x)\right)\varphi(x)dx = \int_\Omega\left(\int_{\mathbb{R}} g\, d\nu_x\right)\varphi(x)dx = \int_\Omega g\big(\nu(x)\big)\,\varphi(x)dx$$

أي $g(u_n) \rightharpoonup^\star g(\nu)$ في $L^\infty(\Omega)$ من أجل كل $g \in C_b^0(\mathbb{R})$.

إذا كانت $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية محدودة من التوابع في $L^1(\Omega)$، و كان ν قياس يونغ يحقق شروط المبرهنة 2، عندئذٍ نقول إن المتتالية $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة من ν بمفهوم قياسات يونغ.

إن العلاقة بين توابع الشبكة و القياسات الوسيطية تم دراستها في [12]، سنذكر النتائج الاساسية التي سنستخدمها:

مبرهنة (3.3) [12,10]: من أجل كل $f \in \mathbb{G}(\Omega_{\mathbb{X}})$، عندئذٍ يوجد قياس وسيطي

$\nu^f : \Omega \to \mathbb{M}(\mathbb{R})$ بحيث إنه من أجل كل $g \in C_b^0(\mathbb{R})$ و $\varphi \in C_c^0(\Omega)$، فإن:

$$st\langle {}^*g(f), {}^*\varphi\rangle = \int_\Omega (\int_{\mathbb{R}} g\, d\nu_x^f)\varphi(x)dx$$

بالإضافة إلى أنه :

1. من أجل كل قياس يونغ ν على Ω، يوجد تابع شبكي f بحيث $\nu^f = \nu$.
2. من أجل كل $x \in \Omega$ و كل مجموعة بوريلية $A \subseteq \mathbb{R}$ يكون $0 \le \nu_x^f(\mathbb{R}) \le 1$.
3. إذا كان $\|f\|_p \in {}^*\mathbb{R}_{fin}$ من أجل $0 \le p < \infty$، فإن ν^f هو قياس يونغ.

نتيجة (1.3): أياً كان $f \in \mathbb{G}(\Omega_{\mathbb{X}})$، و $g \in C_b^0(\mathbb{R})$، فإن : $\int_{\mathbb{R}} g(\tau)\, d\nu^f = \int_{\mathbb{R}} \tau\, d\nu^{{}^*g(f)}$

الإثبات: حسب المبرهنة 3، لدينا

$$st\langle {}^*g(f), {}^*\varphi\rangle = \int_\Omega (\int_{\mathbb{R}} g\, d\nu_x^f)\varphi(x)dx$$

بما أن $g \in C_b^0(\mathbb{R})$، فإن $\|{}^*g(f)\|_\infty \in {}^*\mathbb{R}_{fin}$، و بالتالي:

$$st\langle {}^*g(f), {}^*\varphi\rangle = \int_\Omega (\int_{\mathbb{R}} \tau\, d\nu^{{}^*g(f)})\varphi(x)dx$$

تمهيدية (1.3) [11]: من أجل كل $f \in \mathbb{G}(\Omega_{\mathbb{X}})$، و ليكن $\nu^f : \Omega \to \mathbb{M}(\mathbb{R})$ قياس وسيطي يحقق شروط المبرهنة (3.3) ، و ليكن $f_b : \Omega \to \mathbb{R}$ مركز الثقل (barycentre) معرف بالشكل:

$$f_b = \int_{\mathbb{R}} \tau \, dv_x^f$$

عندئذٍ f_b تابع قابل للقياس. إذا كان $\|f\|_1 \in {}^*\mathbb{R}_{fin}$، فإن $f_b \in L_1(\Omega)$، و $\|f_b\|_1 \leq \|f\|_1$.

مثال 1: لتكن المتتالية $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة بالشكل $u_n = n\chi_{[1-1/n,1]}$، نلاحظ أن $\|u_n\|_\infty = n$، و بالتالي المتتالية ليس محدودة في L^∞. من أجل كل $f \in C_b^0(\mathbb{R})$ و $\varphi \in C_c^0(\mathbb{R})$، يتحقق:

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f(u_n)\varphi dx = f(0) \int_{\mathbb{R}} \varphi \, dx$$

لذلك المتتالية $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ تتقارب بشكل ضعف− ⋆ من قياس يونغ ثابت $\nu_x = \delta_0$ أياً كان $x \in \mathbb{R}$.

إن المتتالية $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ تحقق $\|u_n\|_1 = 1$ في L^1 من أجل كل $n \in \mathbb{N}$، و بما أنه من أجل كل $\varphi \in \mathfrak{D}(\mathbb{R})$ يتحقق:

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} u_n \varphi dx = \lim_{n\to\infty} n \int_{[1-1/n,1]} \varphi dx = \varphi(1)$$

فإن المتتالية $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ تتقارب في حالة التوزيعات من δ_1 (توزيع ديراك المتمركز عند 1).

نستنتج أن قياسات يونغ الكلاسيكية تصف ظاهرة الاهتزاز بدقة، لكنها غير كافية لوصف ظواهر التركيز و التباعد إلى اللانهاية. لذلك سنستخدم قياسات يونغ المعممة:

3.3 قياسات يونغ المعممة:

لتكن $\Omega \subseteq \mathbb{R}^k$ مجموعة مفتوحة، و $\|x\|$ النظيم الإقليدي لـ $x \in \mathbb{R}^k$.، و $\mathcal{B}(\Omega)$ هو $\sigma-$ جبر من مجموعات جزئية بوريلية من Ω. سنرمز بـ B_d لكرة الوحدة المفتوحة و بـ $\overline{\mathrm{B}}_d$ لكرة الوحدة المغلقة، و بـ S^{d-1} لسطح كرة الوحدة.

نعرف الفضاء $\mathcal{F}(\Omega \times \mathbb{R}^d)$ بأنه مجموعة كل التوابع المستمرة $g \in \Omega \times \mathbb{R}^d$ التي تحقق شرط النمو الخطي: يوجد ثابت $C > 0$ بحيث:

$$|g(x,y)| \leq C(1 + |y|)$$ من أجل كل $(x,y) \in \Omega \times \mathbb{R}^d$.

نعرف التابع $\tilde{g}: \Omega \times \overline{\mathrm{B}}_d \to \mathbb{R}$ بالشكل:

$$\tilde{g}(x,\omega) := (1-|\omega|)g\left(x, \frac{\omega}{1-|\omega|}\right) \ ; \ |\omega| < 1$$

نقول إن $g \in \mathcal{F}(\Omega \times \mathbb{R}^d)$ إذا استطعنا تمديد التابع g بصورة وحيدة إلى تابع $\tilde{g}$ مستمر و محدود معرف على $\Omega \times \overline{\mathrm{B}}_d$ (أي $\tilde{g} \in C(\Omega \times \overline{\mathrm{B}}_d)$).

إذا كان $g \in \mathcal{F}(\Omega \times \mathbb{R}^d)$، نعرف تابع الركود g^∞ الموافق لـ g بالشكل:

$$g^\infty(x,\theta) := \liminf_{t\to\infty} \frac{g(x,t\theta)}{t}$$

و على $\Omega \times S^{d-1}$ يصبح: $\quad g^\infty(x,\theta) = \tilde{g}(x,\theta) \quad ; \quad |\theta| = 1$

و بأخذ النظيم $sup\left\{\left(\frac{|f(x,y)|}{1+|y|}\right); (x,y) \in \Omega \times \mathbb{R}^d\right\}$ يكون $\mathcal{F}(\Omega \times \mathbb{R}^d)$ فضاء باناخ.

مبرهنة (4.3) (Alibert– Bouchitte')([15],[13]): لتكن (u_n) متتالية محدودة في $L^1(\Omega, \mu, \mathbb{R}^d)$، عندئذٍ توجد متتالية جزئية $\left(u_{n_k}\right)$، و قياس رادون λ غير سالب معرف على Ω و أسرة من القياسات الوسيطية الاحتمالية

$(\nu_x) \in \mathbb{M}^{\mathbb{P}}(\mathbb{R}^d)$، و $(\nu_x^\infty) \in \mathbb{M}^{\mathbb{P}}(S^{d-1})$، بحيث إنه من أجل كل $g \in \mathcal{F}(\Omega \times \mathbb{R}^d)$ يكون:

$$\int_\Omega g\left(x, u_{n_k}(x)\right)\varphi(x)d\mu \rightharpoonup^\star \int_\Omega\left(\int_{\mathbb{R}^d} g(x,y)d\nu_x(y)\right)dx + \int_\Omega\left(\int_{S^{d-1}} g^\infty(x,\theta)d\nu_x^\infty(\theta)\right)d\lambda(x)$$

حيث يفهم التكامل وفق نظرية القياس، بأن $d\nu_x^\infty(\xi)$ يمثل التكامل بالنسبة إلى القياس الاحتمالي الاتجاهي عند النقطة x، بينما يمثل $d\lambda(x)$ التكامل بالنسبة لقياس التركيز.

4. النتائج و مناقشتها:

إن قياسات يونغ الكلاسيكية تصف السلوك الاهتزازي للمتتاليات المحدودة في L^p، إلا أنها غير كافية لتمثيل ظواهر التركيز و التباعد نحو اللانهاية التي تظهر في المتتاليات غير المحدودة. في التحليل غير القياسي تسمح توابع الشبكة بوصف هذه الظاهرة داخلياً، إذ يمكن تمثيل القيم غير المحدودة مباشرة على نقاط الشبكة المعرّف عليها التابع الشبكي. من أجل بناء صياغة مماثلة لقياسات يونغ المعممة ضمن إطار توابع الشبكة، سنقوم بتفكيك تابع الشبكة إلى جزأين: جزء محدود يصف السلوك الاهتزازي، و جزء غير محدود يصف ظواهر التركيز و التباعد نحو اللانهاية.

لتكن $\Omega \subset \mathbb{R}^k$ مجموعة مفتوحة، و لتكن $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset L^1(\Omega)$ متتالية غير محدودة. عند الانتقال إلى التحليل غير القياسي سنقوم بتمثيل هذه المتتالية بتابع شبكة $f \in \mathbb{G}(\Omega_{\mathbb{X}})$.

ليكن $f \in \mathbb{G}(\Omega_{\mathbb{X}})$،عندئذٍ سنقوم بتصنيف نقاط الشبكة لكل $x \in \Omega_{\mathbb{X}}$ و لنعرف:

الجزء المنتهي $$\Omega_{\mathbb{X}}^{fin} = \{x \in \Omega_{\mathbb{X}}: \ |f(x)| \in {}^*\mathbb{R}_{fin}\}$$

و الجزء غير المنتهي $$\Omega_{\mathbb{X}}^{\infty} = \{x \in \Omega_{\mathbb{X}}: |f(x)| \notin {}^*\mathbb{R}_{fin}\}$$

بحيث : $$\Omega_{\mathbb{X}} = \Omega_{\mathbb{X}}^{fin} \cup \Omega_{\mathbb{X}}^{\infty} \ , \ \Omega_{\mathbb{X}}^{fin} \cap \Omega_{\mathbb{X}}^{\infty} = \emptyset$$

و بالتالي نحصل على تفكيك داخلي لتابع الشبكة $f \in \mathbb{G}(\Omega_{\mathbb{X}})$ بالشكل $f = f_{fin} + f_{\infty}$ حيث:

$$f_{fin}(x) = \begin{cases} f(x) \, ; x \in \Omega_{\mathbb{X}}^{fin} \\ 0 \ ; \ x \in \Omega_{\mathbb{X}}^{\infty} \end{cases} , f_{\infty}(x) = \begin{cases} 0 \ ; \ x \in \Omega_{\mathbb{X}}^{fin} \\ f(x) \ ; \ x \in \Omega_{\mathbb{X}}^{\infty} \end{cases} \quad (1)$$

بما أن هدف هذا البحث دراسة المتتالية غير المحدودة، فإن أي شرط من النوع $\|u_n\|_p \leq C$ حيث $1 \leq p \leq \infty$ يؤول مباشرة إلى دراسة المفهوم الكلاسيكي. لذلك نسعى إلى بناء فرضية أكثر عمومية لا تمنع التباعد نحو اللانهاية، و إنما تتحكم بسلوكه فقط. من أجل ذلك نبحث عن تابع مناسب من الشكل: $\rho: [0,\infty[\to [0,\infty[$، يتمتع بالخواص التالية:

1. متزايد.
2. $\rho(t) \to \infty$ عندما $t \to \infty$.
3. $\lim_{t\to\infty} \frac{\rho(t)}{t} = 0$.

و لهذا الغرض نختار التابع $\rho(t) = log(1+t)$ لأنه يحقق جميع الشروط السابقة.

بالتالي تصبح الفرضية الأساسية لهذا العمل:

$$\varepsilon^k \sum_{x\in\Omega_{\mathbb{X}}^{\infty}} log(1+|f(x)|) \in {}^*\mathbb{R}_{fin} \qquad (2)$$

إن الفرضية اللوغارتمية لا تمنع التباعد نحو اللانهاية، و إنما تحكم ضعيف بالجزء المتباعد نحو اللانهاية بدلاً من التحكم بحجم المتتالية نفسها من أجل الحصول على تمثيل ثلاثي معمم.

تمهيدية (1.4): ليكن $f \in \mathbb{G}(\Omega_{\mathbb{X}})$، يحقق الشرط الأساسي (2)، نعرف من أجل كل مجموعة داخلية $A \subset \Omega_{\mathbb{X}}$، القياس الداخلي:

$$\mu_f(A) = \varepsilon^k \sum_{x\in A\cap\Omega_{\mathbb{X}}^{\infty}} log(1+|f(x)|)$$

عندئذٍ يوجد قياس لوب وحيد L_{μ_f} يمدد القياس الداخلي μ_f:

$$L_{\mu_f} = st(\mu_f(A))$$

الإثبات: بما أن $\mu_f(\Omega_{\mathbb{X}}^{\infty}) \in {}^*\mathbb{R}_{fin}$، فإنه من أجل كل مجموعة داخلية $A \subset \Omega_{\mathbb{X}}$ يكون $0 \leq \mu_f(A) \leq \mu_f(\Omega_{\mathbb{X}}^{\infty})$ و بالتالي $\mu_f(A) \in {}^*\mathbb{R}_{fin}$. إذاً $\mu_f(A)$ قياس جمعي داخلي منتهٍ، و بالتالي يوجد قياس لوب وحيد L_{μ_f} يمدد القياس الداخلي μ_f معرف على σ – جبر المولّد من أسرة كل المجموعات الداخلية بعد اتمامها بقياس لوب، بحيث يكون:

$$L_{\mu_f} = st(\mu_f(A)) \qquad \blacksquare$$

يمثل القياس الداخلي $\mu_f(A)$ مجموع قيم التابع اللوغارتمي المتولد عن الجزء غير المنتهي من التابع الشبكي داخل المجموعة A، و من ثم فإنه يمكن حساب مقدار التباعد نحو اللانهاية مباشرة، و إنما إيجاد معدل نموه اللوغارتمي بما يسمح بتمثيله ضمن إطار قياسي قابل للقياس. بينما يمثل قياس لوب L_{μ_f} الامتداد القياسي لـ $\mu_f(A)$ إلى قياس بوريلي على Ω عبر تطبيق الجزء القياسي، بما يضمن صلة وثيقة بين البنية غير القياسية و البنية القياسية.

تمهيدية (2.4): (قياس التركيز): ليكن $f \in \mathbb{G}(\Omega_{\mathbb{X}})$، يحقق شروط التمهيدية السابقة، عندئذٍ يوجد قياس بوريلي λ معرف على Ω بالشكل : $\lambda(B) = L_{\mu_f}({}^*B \cap \Omega_{\mathbb{X}}^{\infty})$ من أجل كل مجموعة بوريلية $B \subset \Omega$.

الإثبات: بما أن قياس لوب L_{μ_f} منتهٍ على $\Omega_{\mathbb{X}}$، فإن ${}^*B \cap \Omega_{\mathbb{X}}^{\infty}$ قابلة للقياس بالنسبة لجبر لوب من أجل كل مجموعة بوريلية $B \subset \Omega$ و بالتالي $\lambda(B) = L_{\mu_f}({}^*B \cap \Omega_{\mathbb{X}}^{\infty})$ يعرف قياساً غير سالب، و يحقق $\lambda(\Omega) = L_{\mu_f}(\Omega_{\mathbb{X}}) < \infty$ إذاً λ قياس بوريلي منتهٍ على Ω، و بما أن Ω مفتوحة في $\mathbb{R}^k$، فإن λ قياس رادون . ■

تبين هذه التمهيدية أن الشرط الأساسي (2) شرط كافٍ لإيجاد قياس رادون λ غير السالب معرف على Ω يصف تموضع التباعد نحو اللانهاية داخل المجال Ω ، أي أنه يحدد أين يتركز هذا التباعد.

تمهيدية (3.4): (بناء قياس اتجاه التباعد نحو اللانهاية)

ليكن $f \in \mathbb{G}(\Omega_{\mathbb{X}})$ تابعاً شبكياً، يحقق الشرط الأساسي (2)، عندئذٍ يوجد قياس احتمالي بوريلي وحيد $\nu^{\infty} \in \mathbb{M}^{\mathbb{P}}(S^0)$ بحيث من أجل كل $\psi \in C(S^0)$ يكون:

$$\int_{S^0} \psi(\xi) d\nu^{\infty}(\xi) = st\left(\frac{\varepsilon^N \sum_{x \in \Omega_{\mathbb{X}}^{\infty}} {}^*\psi(\theta_f(x)) log(1+|f(x)|)}{\varepsilon^k \sum_{x \in \Omega_{\mathbb{X}}^{\infty}} log(1+|f(x)|)}\right)$$

حيث : $\theta_f(x) = \frac{f(x)}{|f(x)|}$، و $\theta_f(x) \in {}^*S^0 = \{-1,1\}$

الإثبات: أياً كان $\psi \in C(S^0)$ لنضع:

$$R_\psi = \frac{\varepsilon^k \sum_{x\in\Omega_{\mathbb{X}}^\infty} {}^*\psi(\theta_f(x)) log(1+|f(x)|)}{\varepsilon^k \sum_{x\in\Omega_{\mathbb{X}}^\infty} log(1+|f(x)|)}$$

بما أن ψ تابع مستمر معرف على فضاء متراص S^0 فإن ψ محدود، أي يوجد ثابت $M > 0$ بحيث :

$$|\psi(\xi)| \leq M \quad , \xi \in S^0$$

و بالتالي $R_\psi \in {}^*\mathbb{R}_{fin}$، وبأخذ الجزء القياسي نحصل على:

$$T(\psi) = st(R_\psi)$$

سنبرهن أن T يحقق شروط مبرهنة رايس: أياً كان $a, b \in \mathbb{R}$ و $\psi_1, \psi_2 \in C(S^0)$، و لدينا:

$$R_{a\psi_1+b\psi_2} = aR_{\psi_1} + bR_{\psi_2} \Rightarrow T(a\psi_1 + b\psi_2) = aT(\psi_1) + bT(\psi_2)$$

إذاً T تطبيق خطي. إذا كانت $\psi \geq 0$ فإن ${}^*\psi(\theta_f(x)) \geq 0$ أياً كانت $x \in \Omega_{\mathbb{X}}^\infty$ و بالتالي $R_\psi \geq 0$ إذاً $T(\psi) \geq 0$. و بأخذ $\psi \equiv 1$ يكون $T(1) = 1$. عندئذٍ حسب مبرهنة التمثيل لرايس يوجد قياس احتمالي بوريلي وحيد $\nu^\infty \in \mathbb{M}^{\mathbb{P}}(S^0)$ بحيث:

$$T(\psi) = \int_{S^0} \psi(\xi) d\nu^\infty(\xi) \quad \blacksquare$$

تبين هذه التمهيدية أن الشرط الأساسي (2) ليس كافياً فقط لوصف تموضع التباعد نحو اللانهاية بواسطة λ، بل يسمح أيضاً بوصف اتجاهي التباعد بواسطة قياس احتمالي ν^∞ معرف على S^0.

تمهيدية (4.4): (التمثيل الاتجاهي للتباعد نحو اللانهاية)

ليكن $f \in \mathbb{G}(\Omega_{\mathbb{X}})$ تابعاً شبكياً، يحقق الشرط الأساسي (2)، عندئذٍ توجد أسرة من القياسات الاحتمالية $(\nu_x^{\infty})_{x\in\Omega} \in \mathbb{M}^{\mathbb{P}}(S^0)$، و قياس رادون غير سالب λ معرف على Ω بحيث إنه من أجل كل $\Phi \in C_c(\Omega \times S^0)$ يكون:

$$st\left(\varepsilon^N \sum_{x\in\Omega_{\mathbb{X}}^{\infty}} {}^*\Phi\left(x,\theta_f(x)\right) log(1+|f(x)|)\right) =$$

$$= \int_{\Omega}\left(\int_{S^0} \Phi(x,\xi) d\nu_x^{\infty}(\xi)\right) d\lambda(x)$$

الإثبات: نعرف:

$$L_{\Phi} = \varepsilon^N \sum_{x\in\Omega_{\mathbb{X}}^{\infty}} {}^*\Phi(x,\theta_f(x)) log(1+|f(x)|)$$

حيث $\theta_f(x) = \frac{f(x)}{|f(x)|}$. بما أن $\Phi \in C_c(\Omega \times S^0)$ فإن $|{}^*\Phi(x,\xi)| \le M$، و بالتالي:

$$|L_{\Phi}| \le M.\varepsilon^k \sum_{x\in\Omega_{\mathbb{X}}^{\infty}} log(1+|f(x)|)$$

إذاً $L_{\Phi} \in {}^*\mathbb{R}_{fin}$. عندئذٍ يوجد قياس لوب وحيد $\Lambda(\Phi) = st(L_{\Phi})$ إذاً:

$$\Lambda: C_c(\Omega \times S^0) \to \mathbb{R}$$

نلاحظ أن Λ خطي لأنه من أجل كل $\Phi_1, \Phi_2 \in C_c(\Omega \times S^0)$ و $a, b \in \mathbb{R}$ يكون:

$$L_{a\Phi_1+b\Phi_2} = aL_{\Phi_1} + bR_{\Phi_2} \Rightarrow \Lambda(a\Phi_1 + b\Phi_2) = a\Lambda(\Phi_1) + b\Lambda(\Phi_2)$$

إذا كان $\Phi \ge 0$ فإن ${}^*\Phi(x,\theta_f(x)) \ge 0$ و بالتالي $L_{\Phi} \ge 0$ إذاً $\Lambda(\Phi) \ge 0$.

حسب مبرهنة ريس يوجد قياس رادون غير سالب Γ معرف على $\Omega \times S^0$ بحيث:

$$\Lambda(\Phi) = \int_{\Omega\times S^0} \Phi(x,\xi) d\Gamma(x,\xi)$$

و حسب مبرهنة التفكيك نحصل على قياس λ معرف على Ω و أسرة من القياسات الاحتمالية $(\nu_x^\infty)_{x\in\Omega} \in \mathbb{M}^{\mathbb{P}}(S^0)$ بحيث:

$$\Gamma(dx, d\xi) = \nu_x^\infty(d\xi)\lambda(dx)$$

و بالتالي

■ $$\Lambda(\Phi) = \int_\Omega \left(\int_{S^0} \Phi(x,\xi) d\nu_x^\infty(\xi)\right) d\lambda(x)$$

تبين هذه التمهيدية أن السلوك غير المحدود للتابع الشبكي يقبل تمثيلاً كاملاً من خلال مكونين متكاملين: الأول: المتمثل في قياس التركيز λ الذي يصف كيفية توزع ظاهرة التباعد نحو اللانهاية على المجال Ω، و الثاني: تصف الأسرة $(\nu_x^\infty)_{x\in\Omega}$ توزيع اتجاهي التباعد عند كل نقطة بالنسبة إلى λ. و من ثم فإن ظاهرة التباعد نحو اللانهاية لا توصف بمقدار النمو وحده، و إنما بالاقتران بين توزعه على المجال و توزعه بين اتجاهي التباعد نحو اللانهاية، مما يوفر وصفاً كاملاً للسلوك غير المحدود ضمن إطار قياسي واحد.

بعد أن تم بناء قياس التركيز و قياس اتجاه التباعد نحو اللانهاية في حالة التوابع ذات القيم العددية، يصبح من الطبيعي تمديد هذا البناء إلى التوابع الشبكية ذات القيم متجهية. و لا يهدف هذا الانتقال إلى تغير البنية الرياضية السابقة ، و إنما إلى توسيع مجال تطبيقها لتشمل الأنظمة المتجهية، حيث لا يقتصر وصف التباعد نحو اللانهاية على مقدار النمو فقط، بل يشمل الاتجاه الهندسي الذي يحدث وفقه هذا التباعد. من أجل ذلك نفترض أن:

$$f: \Omega_{\mathbb{X}} \to {}^*\mathbb{R}^m \ , \ m \geq 1$$

و النظيم الإقليدي: $$\|z\| = \left(\sum_{i=1}^m z_i^2\right)^{1/2} \ , \ z \in {}^*\mathbb{R}^m$$

و يصبح الشرط الأساسي بالشكل: $$\varepsilon^k \sum_{x\in\Omega_{\mathbb{X}}^\infty} log(1 + \|f(x)\|) \in {}^*\mathbb{R}_{fin}$$

أما اتجاه التباعد: $$\theta_f(x) = \frac{f(x)}{\|f(x)\|}$$

و بالتالي ${}^*S^{m-1} \in {}^*S^{m-1}$ حيث ${}^*S^{m-1}$ النظير غير القياسي لكرة الوحدة:

$$ {}^*S^{m-1} = \{\xi \in {}^*\mathbb{R}^m;\ \|\xi\| = 1\} $$

إن الانتقال من الحالة العددية إلى الحالة المتجهية يتم فقط باستبدال المجموعة $S^0 = \{-1,1\}$ بكرة الوحدة S^{m-1}، و سندعو S^{m-1} فضاء الاتجاهات (space of directions) لأن عناصره لا تمثل قيماً فعلية للتابع و إنما تمثل الاتجاهات الممكنة لتباعد قيم التابع نحو اللانهاية في $\mathbb{R}^m$. و لا يؤثر هذه التعميم على البنية التحليلية للبراهين السابقة، لأن جميع خطوات البناء تعتمد أساساً على فصل مقدار النمو عن الجزء الاتجاهي لسلوك لتابع عند اللانهاية، و بالتالي فإن استبدال المجموعة $S^0 = \{-1,1\}$ بكرة الوحدة S^{m-1} لا يغير طبيعة التحليل، و إنما يوسع فقط مجموعة الاتجاهات الممكنة للتباعد نحو اللانهاية.

بعد بناء قياسات يونغ التي تصف السلوك المحدود، و قياس التركيز و قياسات الاتجاه نحو اللانهاية اللذين يصفان السلوك غير المحدود، يتضح أن الوصف الكامل للسلوك الحدي يتطلب توحيد هذه المكونات ضمن فضاء معمم واحد يحتوي القيم المنتهية و الاتجاهات الحدية في إطار طبولوجي واحد.

تعريف (1.4): (الاتحاد المنفصل لفضاءين طبولوجيين):

ليكن (A, τ_A) و (B, τ_B) فضاءين طبولوجيين. يعرّف الاتحاد المنفصل لهما بالفضاء:

$$ A \sqcup B \coloneqq (A \times \{0\}) \cup (B \times \{1\}) $$

كل عنصر من الفضاء $A \sqcup B$ يكون من أحد الشكلين:

$$ (a,0) \in A \times \{0\} \quad \text{أو} \quad (b,1) \in B \times \{1\} $$

أما الطبولوجيا المعرفة على $A \sqcup B$، نرمز لها بـ $\tau_{A \sqcup B}$ هي طبولوجيا الاتحاد المنفصل حيث تكون المجموعة $U \subset A \sqcup B$ مفتوحة إذا و فقط إذا تحقق $U \cap (A \times \{0\})$ مفتوحة في $A \times \{0\}$ و $U \cap (B \times \{1\})$ مفتوحة في $B \times \{1\}$.

نزود الفضاء $\mathbb{R}^m$ بالطبولوجيا الإقليدية $\tau_{\mathbb{R}^m}$، و الطبولوجيا المعرفة على S^{m-1} بالطبولوجيا الجزئية من $\tau_{\mathbb{R}^m}$ بالشكل:

$$\tau_{S^{m-1}} = \{V \cap S^{m-1} : V \in \tau_{\mathbb{R}^m}\}$$

و هذا يعني أن المجموعة $W \subset S^{m-1}$ تكون مفتوحة في S^{m-1} إذا وجدت مجموعة مفتوحة V في $\mathbb{R}^m$ بحيث $W = V \cap S^{m-1}$.

تعريف الفضاء المعمم الموحد (2.4): يُعرف هذا الفضاء الموحد بالاتحاد المنفصل بين $\mathbb{R}^m$ و S^{m-1} بالشكل: $\mathcal{K}_{log} := \mathbb{R}^m \sqcup S^{m-1}$ ، أي:

$$\mathcal{K}_{log} = (\mathbb{R}^m \times \{0\}) \cup (S^{m-1} \times \{1\})$$

و عناصر هذا الفضاء تكون من أحد الشكلين:

1. العناصر المنتهية: $(y, 0), \quad y \in \mathbb{R}^m$.
2. العناصر الاتجاهية الحدية: $(\xi, 1), \quad \xi \in S^{m-1}$.

نزود الفضاء $\mathcal{K}_{log}$ بطبولوجيا الاتحاد المنفصل $\tau_{\mathcal{K}_{log}} = \tau_{\mathbb{R}^m} \sqcup \tau_{S^{m-1}}$، حيث تكون كل من $\mathbb{R}^m \times \{0\}$ و $S^{m-1} \times \{1\}$ مفتوحة في $\mathcal{K}_{log}$، و تحافظ كل منهما على بنيتها الأصلية عند تضمينها في الفضاء المذكور.

يعكس الفضاء المعمم الموحد الفرق بين القيم المنتهية التي تنتمي إلى $\mathbb{R}^m$، و الاتجاهات الحدية الناتجة عن التباعد نحو اللانهاية و التي تنتمي إلى S^{m-1}، مما يسمح بتمثيل كلا السلوكين ضمن إطار واحد.

تمهيدية (5.4): (خواص الفضاء المعمم الموحد)

ليكن $\mathcal{K}_{log}$ مزوداً بطبولوجيا الاتحاد المنفصل المعرفة سابقاً، عندئذٍ تتحقق الخواص التالية:

1. إن كل من $\mathbb{R}^m \times \{0\}$ و $S^{m-1} \times \{1\}$ مجموعة مفتوحة و مغلقة في $\mathcal{K}_{log}$.

2. التطبيقان: $i_{\mathbb{R}}: \mathbb{R}^m \to \mathcal{K}_{log}$ و $i_S: S^{m-1} \to \mathcal{K}_{log}$ حيث $i_{\mathbb{R}}(y) = (y, 0)$ و $i_S(\xi) = (\xi, 1)$، هما مستمران.

3. إذا كان التابعين $u: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ و $v: S^{m-1} \to \mathbb{R}$ مستمرين فإن التابع $g: \mathcal{K}_{log} \to \mathbb{R}$ المعرف بالشكل:

$$g(y, 0) = u(y), y \in \mathbb{R}^m \text{ و } g(\xi, 1) = v(\xi), \xi \in S^{m-1}$$

مستمر على $\mathcal{K}_{log}$.

الإثبات: 1. نلاحظ أن كل من

$\mathbb{R}^m \times \{0\} = (\mathbb{R}^m \times \{0\}) \cap \mathcal{K}_{log}$ و $S^{m-1} \times \{1\} = (S^{m-1} \times \{1\}) \cap \mathcal{K}_{log}$ مفتوحة، و كل منهما متممة للأخرى فإن $\mathbb{R}^m \times \{0\}$ و $S^{m-1} \times \{1\}$ مغلقتين.

2 . لتكن $U \subset \mathcal{K}_{log}$ مجموعة مفتوحة. حسب تعريف طبولوجيا الاتحاد المنفصل فإن $U \cap \mathbb{R}^m$ مفتوحة في $\mathbb{R}^m$ و بالتالي $i_{\mathbb{R}}^{-1}(U) = U \cap \mathbb{R}^m$ مفتوحة، إذاً $i_{\mathbb{R}}$ مستمر. بالمثل $i_S^{-1}(U) = U \cap S^{m-1}$ أي i_S مستمر.

3. بما أن $g = u$ مستمر على $\mathbb{R}^m$ و $g = v$ مستمر على S^{m-1} فرضاً، كما أن كل من $\mathbb{R}^m \times \{0\}$ و $S^{m-1} \times \{1\}$ مفتوحة في طبولوجيا الاتحاد المنفصل، فإن g مستمر على $\mathcal{K}_{log}$

تبين الخاصية الأولى أن الجزء المحدود و الجزء الاتجاهي يبقيان منفصلين طبولوجياً، فلا يحدث أي تداخل بين القيم المنتهية و اتجاهات اللانهاية، و مع ذلك فهما ينتميان إلى فضاء معمم واحد. كما أن الخاصية الثانية تبين أن كلا الجزأين يحتفظ ببنيته الطبولوجية الأصلية داخل فضاء الوصول، فلا تتغير مفاهيم الاستمرار أو التقارب عند الانتقال إلى الفضاء الموحد. أما الخاصية الثالثة تسمح لنا ببناء فضاء الاختبارات اللوغارتمي.

إن مبرهنة التمثيل الموحد تتطلب صف من توابع الاختبار يمكن من خلاله وصف السلوكين المحدود و غير المحدود في آن واحد. لذلك نعرف فضاء اختبار يعتمد على شرط النمو اللوغارتمي مع شرط إضافي وجود نهاية اتجاهية مستمرة:

تعريف (3.4): (فضاء الاختبار اللوغارتمي):

لتكن $\Omega \in \mathbb{R}^k$ مجموعة مفتوحة، نعرف الفضاء $\mathcal{F}_{log}(\Omega \times \mathcal{K}_{log})$ بأنه مجموعة كل التوابع المستمرة:

$$(\Phi \in \mathrm{C}(\Omega \times \mathbb{R}^m))\ \Phi: \Omega \times \mathcal{K}_{log} \to \mathbb{R}$$

التي تحقق الشروط التالية من أجل كل $x \in \Omega$:

1. شرط النمو اللوغارتمي: يوجد ثابت $C > 0$ بحيث:

$$|\Phi(x,y)| \le C\big(1 + log(1 + \|y\|)\big) \quad , \quad \forall\, (x,y) \in \Omega \times \mathbb{R}^m$$

2. وجود النهاية الاتجاهية: أياً كان $(x,\xi) \in \Omega \times S^{m-1}$، توجد نهاية:

$$\Phi^{\infty}(x,\xi) = \lim_{r\to\infty} \frac{g(x,r\xi)}{log(1+r)}$$

3. استمرارية النهاية الاتجاهية: $\Phi^{\infty} \in C(\Omega \times S^{m-1})$

إن الشرطين (2) و (3) يضمنان أن سلوك تابع الاختبار عند اللانهاية يوصف بتابع مستمر معرف على فضاء الاتجاهات.

مبرهنة (1.4): (التمثيل الموحد):

ليكن $f: \Omega_{\mathbb{X}} \to {}^*\mathbb{R}^m$ تابعاً شبكياً يمثل متتالية غير محدودة، بحيث يمكن تفكيكه بالشكل $f = f_{fin} +$ f_{∞} المعرف في (1)، و يحقق الشرط الأساسي (2)، عندئذٍ من أجل كل $x \in \Omega$ يوجد ثلاثية $(\nu_x, \lambda, \nu_x^{\infty})$ أي:

- أسرة قياسات احتمالية $\{\nu_x\}_{x\in\Omega}$ معرفة على $\mathbb{R}^m$.
- قياس رادون موجب λ معرف على Ω.
- أسرة قياسات احتمالية $\{\nu_x^\infty\}_{x\in\Omega}$ معرفة على S^{m-1}.

بحيث أياً كان $\Phi \in \mathcal{F}_{log}(\Omega \times \mathcal{K}_{log})$، يتحقق:

$$st\left(\varepsilon^k \sum_{x\in\Omega_{\mathbb{X}}} {}^*\Phi(x, f(x))\right) = \int_\Omega \left(\int_{\mathbb{R}^m} \Phi(x,y) d\nu_x(y)\right) dx + \int_\Omega \left(\int_{S^{m-1}} \Phi^\infty(x,\xi) d\nu_x^\infty(\xi)\right) d\lambda(x)$$

الإثبات:

لدينا $f = f_{fin} + f_\infty$ المعرف في (1)، بما أن $\Phi \in \mathcal{F}_{log}(\Omega \times \mathcal{K}_{log})$ يكون:

$$\varepsilon^k \sum_{x\in\Omega_{\mathbb{X}}} {}^*\Phi(x, f(x)) = \varepsilon^k \sum_{x\in\Omega_{\mathbb{X}}} {}^*\Phi(x, (f_{fin}(x) + f_\infty(x)) = \varepsilon^k \sum_{x\in\Omega_{\mathbb{X}}^{fin}} {}^*\Phi(x, f_{fin}(x)) + \varepsilon^k \sum_{\Omega_{\mathbb{X}}^\infty} {}^*\Phi(x, f_\infty(x))$$

إن الحد الأول في الطرف الأيمن يمثل الجزء المحدود، بما أن f_{fin} تابع داخلي منتهٍ، أي $f(x) \in {}^*\mathbb{R}_{fin}^m$، و بتطبيق المبرهنة (3.3) ((Bottazzi)) فإنه من أجل كل $x \in \Omega_{\mathbb{X}}^{fin}$، يوجد قياس يونغ ν_x معرف على $\mathbb{R}^m$، يكون:

$$st\left(\varepsilon^k \sum_{x\in\Omega_{\mathbb{X}}^{fin}} {}^*\Phi(x, f_b(x))\right) = \int_\Omega \left(\int_{\mathbb{R}^m} \Phi(x,y) d\nu_x(y)\right) dx \qquad (3)$$

هذا يمثل الجزء الاهتزازي فقط. أما الحد الثاني يمثل الجزء غير المحدود، حسب تمهيدية (5)، توجد أسرة من القياسات الاحتمالية $(\nu_x^\infty)_{x\in\Omega} \in \mathbb{M}^{\mathbb{P}}(S^{m-1})$، و قياس رادون غير سالب λ معرف على Ω بحيث إنه من أجل كل $\Phi \in C(\Omega \times S^{m-1})$ يكون:

$$st\left(\varepsilon^k \sum_{\Omega_{\mathbb{X}}^\infty} {}^*\Phi(x, f_\infty(x))\right) = st\left(\varepsilon^N \sum_{x\in\Omega_{\mathbb{X}}^\infty} {}^*\Phi(x, \theta_f(x)) log(1 + \|f(x)\|)\right)$$

و بما أن $\Phi \in \mathcal{F}_{log}(\Omega \times \mathcal{K}_{log})$، فإن النهاية الاتجاهية Φ^{∞} معرفة و مستمرة حسب تعريف فضاء الاختبارات اللوغارتمي، و بالتالي:

$$st\left(\varepsilon^{k} \sum_{\Omega_{\mathbb{X}}^{\infty}} {}^{*}\Phi(x, f_{\infty}(x))\right) = \int_{\Omega}\left(\int_{S^{m-1}} \Phi^{\infty}(x,\xi) d\nu_{x}^{\infty}(\xi)\right) d\lambda(x) \qquad (4)$$

يمثل هذا الجزء التركيز و التباعد إلى اللانهاية.

و بجمع العلاقتين (3) و (4) نحصل على صيغة التمثيل الموحد:

$$st\left(\varepsilon^{k} \sum_{x \in \Omega_{\mathbb{X}}} {}^{*}\Phi(x, f(x))\right) = \int_{\Omega}\left(\int_{\mathbb{R}^{m}} \Phi(x,y) d\nu_{x}(y)\right) dx$$

$$+ \int_{\Omega}\left(\int_{S^{m-1}} \Phi^{\infty}(x,\xi) d\nu_{x}^{\infty}(\xi)\right) d\lambda(x) \qquad \blacksquare$$

5. الاستنتاجات و التوصيات:

تم الحصول في هذا البحث على ثلاث نتائج رئيسية مترابطة تشكل معاً إطاراً موحداً لدراسة السلوك المحدود و غير المحدود للتوابع الشبكية في التحليل غير القياسي.

1. التمثيل الموحد للسلوك المحدود و غير المحدود: من خلال إثبات مبرهنة التمثيل الموحد تبين أن الجزء المنتهي من التابع الشبكي نتيجة مباشرة لـ [12]، و من ثم يولد قياس يونغ الاحتمالي الذي يصف ظاهرة الاهتزاز. أما الجزء غير المنتهي، فقد تم تمثيله بواسطة قياس التركيز λ الذي يصف توزيع التباعد نحو اللانهاية على المجال Ω ، و أسرة من القياسات الاحتمالية ν_{x}^{∞} التي تصف الاتجاهات التي يحدث وفقها هذا التباعد. و بهذا أصبح من الممكن وصف جميع الظواهر ضمن صيغة تمثيل واحدة.

2. تم بناء الفضاء المعمم الموحد $\mathcal{K}_{log}$ باتحاد منفصل بين القيم المنتهية و فضاء الاتجاهات نحو اللانهاية، مما وفر إطاراً طبولوجياً واحداً يسمح بتمثيل القيم المنتهية و الاتجاهات الحدية دون التداخل بينهما، مع احتفاظ كل جزء ببنيته الطبولوجية الأصلية.
3. توحيد البناء غير القياسي: بدلاً من التعامل مع قياسات يونغ و قياسات التركيز و قياسات الاتجاه بوصفها كيانات مستقلة كما في النظريات الكلاسيكية، بين هذا البحث أن جميع هذه المكونات يمكن استخلاصها بصورة طبيعية من تابع شبكي واحد بعد تفكيكه إلى جزء منتهٍ و جزء غير منتهٍ. و من ثم أصبح التابع الشبكي نفسه يمثل الكائن الرياضي المركزي الذي تنبثق عنه جميع مكونات التمثيل.

توصي هذه الدراسة بتوسيع الإطار غير القياسي المقترح و تطبيقه على مسائل حساب التغيرات و المعادلات التفاضلية الجزئية التي تظهر فيها ظواهر التركيز أو التباعد نحو اللانهاية، مع تعميمه على فضاءات توابع أكثر عمومية.

6. المراجع:

1. Arkeryd, L.O., Cutland, N.J., Henson, C.W. (eds.): Nonstandard Analysis—Theory and Applications. Kluwer Academic Publications, Amsterdam (1997).
2. Balder, E.J.: Lectures on Young Measures, Cahiers de mathe'matiques de la de´cision 9514. Universite´ Paris-Dauphine, CEREMADE, Paris (1995).
3. Ball, J. M.: A version of the fundamental theorem for Young measures, PDEs and Continuum Models of Phase Transitions: Proceedings of an NSF-CNRS Joint Seminar Held in Nice, France, January 18–22, (1988), https://doi.org/10.1007/BFb0024945
4. Davis, M.: Appl. Nonstandard Anal. Dover Publications Inc, Mineola (2005)
5. Keiser, H.J.: Elementary Calculus—An Infinitesimal Approach, On-line Edition. Courier Corporation, Chelmsford (2000)
6. Loeb, P.A., Wolff, M. (eds.): Nonstandard analysis for the working mathematician. Kluwer Academic, Publishers, Amsterdam (2000)
7. Robinson, A.: Non-standard Analysis. North-Holland, Amsterdam (1966)
8. Webb, M.: Classical Young Measures in the Calculus of Variations. https://personalpages.manchester.ac.uk/staff/marcus.webb/pdfs/webbyoungmeasures.pdf (2013), equations. Adv. Math. 345, 429–482 (2019)
9. Bonnetier, E., Conca, C.: Approximation of Young measures by functions and application to a problem of optimal design for plates with variable thickness. Proc. R. Soc. Edin. Sect. A Math. 124(3), 399–422 (1994). https://doi.org/10.1017/S0308210500028717

10. Cutland, N.J.: Infinitesimal methods in control theory: deterministic and stochastic. Acta Applicandae Mathematicae 5, 105–135 (1986)
11. Bottazzi, E.: A grid function formulation of a class of ill–posed parabolic equations. J. Differ. Equ. 271, 39–75 (2021)
12. Bottazzi, E.: Grid functions of nonstandard analysis in the theory of distributions and in partial differential, 2017.
13. Journal of Convex Analysis Volume 4 (1997), No. 1, 129 –147
14. Goldblatt, R.: Lectures on the Hyperreals–An Introduction to Nonstandard Analysis, Graduate Texts in Mathematics, vol. 188. Springer, New York (1998). https://doi.org/10.1007/978-1-4612-0615-6
15. R.J.Di Perna,A.J.Majda: Oscillations and concentrations in weak solutions of the incompressible fluid equations, Com. Math. Phys. 108 (1987) 667{689.