العناصر S – الابتدائية الضعيفة في الـ K– شبكات الضربية

الملخص

إيمان الخوجه[1] حمزة حاكمي[2] أشرف صويص[3]

الغاية من هذا البحث ادخال مفهوم العناصر $S-$ الابتدائية الضعيفة على صف الـ $K-$ شبكات الضربية ودراسة خواصه، وذلك كتعميم جديد لمفهوم العناصر الابتدائية الضعيفة في L. لتكن L $K-$ شبكة و S مجموعة ضربية مغلقة في L. ليكن $I \neq q \in L$ بحيث إن $t \in S$ لكل $t \not\leq q$. نقول عن q إنه عنصر $S-$ ابتدائي ضعيف في L، إذا وجد $s \in S$ بحيث إنه لأجل أي عنصرين $a, b \in L$ يحققان أن $0 \neq ab \leq q$ ، فإنه إما $sa \leq q$ أو $sb \leq \sqrt{q}$.

لقد قمنا في هذا البحث بتوصيف العلاقة بين العناصر $S-$ الأولية والعناصر $S-$ الابتدائية والعناصر $S-$ الابتدائية الضعيفة في صف الـ $K-$ شبكات. وبرهنا أنه إذا كان $q \in L$ عنصرًا $S-$ ابتدائيًا ضعيفاً في L، وكان p عنصرًا ما من L لأجله يوجد $t \in S$ بحيث $t \leq p$ ، عندئذٍ فإن كلاً من pq و $p \wedge q$ يكون عنصراً $S-$ ابتدائياً ضعيفاً في L . كما بينا أنه إذا كانت L $K-$ شبكة عنصرها الأكبر I متراص و S مجموعة ضربية مغلقة من L وكانت $q_1, \dots, q_n$ عناصر $S-$ ابتدائية ضعيفة في L، وكان $\sqrt{q_i} = \sqrt{q_j}$ لكل $i, j = 1, \dots, n$ ، فإن $q = \wedge_{i=1}^{n} q_i$ يكون عنصراً $S-$ ابتدائياً ضعيفاً في L. ومن قمنا بإثبات أن المثاليات $S-$ الابتدائية الضعيفة في الحلقة التبديلية والواحدية R تطابق العناصر S_L- الابتدائية الضعيفة في شبكة مثاليات الحلقة R الضربية $(L = L(R))$. وبذلك نكون قد عممنا العديد من النتائج الواردة في [7] على الشبكات الضربية.

[1] أستاذ مساعد قسم الرياضيات كلية العلوم جامعة حمص.
[2] أستاذ مساعد قسم الرياضيات كلية العلوم جامعة حمص.
[3] طالب دراسات عليا قسم الرياضيات كلية العلوم جامعة حمص.

الكلمات المفتاحية: الشبكة الضربية، المثالية S–الابتدائية الضعيفة، العنصر S– الأولي ، العنصر S– الابتدائي ، العنصر S– الابتدائي الضعيف.

Weakly S– Primary Elements in K –Multiplicative Lattices

Eman Al–Khouja[1] **Hamza Hakmi[2]** **Ashraf Sweis[3]**

Abstract

Let S be a multiplicatively closed subset of a K- lattice L. The purpose of this paper is to introduce the concept of weakly S- primary elements as a new generalization of weakly primary elements. An element $q \neq I$ of a K- lattice L such that $t \nleq q$ for all $t \in S$ is called a weakly S- primary element if there exists an element $s \in S$ such that for all $a, b \in L$ with $0 \neq ab \leq q$, implies $sa \leq q$ or $sb \leq \sqrt{q}$. The relationships among S- prime elements, S- primary elements and weakly S- primary elements are investigated. We prove that if $q \in L$ is a weakly S- primary and p is any element of L such that $t \leq p$ for some $t \in S$, then pq and $p \wedge q$ are weakly S- primary elements of L. We show that if L is a K- lattice in which the greatest element I is compact, S is a multiplicatively closed subset of L, and $q_1, \dots, q_n$ are weakly S- primary elements of L, and if $\sqrt{q_i} = \sqrt{q_j}$ for all $i, j = 1, \dots, n$, then $q = \bigwedge_{i=1}^{n} q_i$ is a weakly S- primary element of L. Furthermore, we show that the weakly S- primary ideals of a commutative ring R with identity correspond precisely to the Weakly S_L primary elements of the ideal lattice $(L = L(R))$. Accordingly, we have generalized the results presented in [7] to the multiplicative lattices.

Key Words: Multiplicative lattice , Weakly S−primary ideal, S−prime element, S−primary element, Weakly S−primary element.

1 Department of Mathematics Homs University.

2 Department of Mathematics Homs University.

3 Department of Mathematics Homs University.

المقدمة.

لقد كان للمثاليات الأولية والمثاليات الابتدائية دور أساسي وهام في نظرية الجبر التبديلي، وقد ظهر لهما العديد من التعميمات، نذكر منها المثالية الأولية (الابتدائية) الضعيفة والمثالية S− الأولية (S−الابتدائية) والمثالية S− الأولية الضعيفة والمثالية S− الابتدائية الضعيفة وتعميمات عديدة أخرى. [1, 3, 4, 7, 9, 12, 18]

في عام 1962 قام R. P. Dilworth [8] بدراسة نظرية المثاليات في الحلقات التبديلية والواحدية بشكل مجرد، وذلك بإدخاله مفهوم الشبكة الضربية النيوثرية ودراستها كمفهوم مجرد لشبكة المثاليات لحلقة نيوثرية تبديلية، وبين أن العديد من التعاريف الأساسية والنتائج المتعلقة بنظرية المثاليات بما فيها المثاليات الأولية والمثاليات الابتدائية في الحلقات التبديلية يمكن تعميمها مباشرة على الشبكات الضربية.

في عام 1974 أدخل نقار [13] صفي الـ $K-$ شبكات و الـ $R-$ شبكات من أجل دراسة المودولات الشبكية فوق الشبكات الضربية دون شرط انقطاع المتتاليات المتزايدة، وفي عام 1976 أدخل $D.D.Anderson$ [2] صف الـ $r-$ شبكات لدراسة الشبكات الضربية دون شرط انقطاع المتتاليات المتزايدة، والمشابه لصف الـ $R-$ شبكات المدخل من قبل نقار، وبذلك وسعت الدراسة لتشمل جميع المودولات فوق الحلقات التبديلية. كما درسا معاً [14] العناصر الأولية المترافقة والمترافقة بضعف

وخواصهما، ومن ثم تتالت الدراسات المتعلقة بالعناصر الأولية والعناصر الابتدائية وتعميماتهما في الشبكات الضربية، وكانت من الأهداف الرئيسية للعديد من الباحثين، لكن جميع هذه الدراسات تمت في صف الـ $C-$ شبكات (يقال عن الشبكة الضربية L إنها $C-$ شبكة اذا كانت مولدة تراصياً، وعنصرها الأكبر متراص، وجداء أي عدد منته من العناصر المتراصة فيها هو عنصر متراص)، [5, 6, 10, 11, 17]. إن صف الـ $K-$ شبكات أعم من صف الـ $C-$ شبكات حيث إن كل $C-$ شبكة هي $K-$ شبكة، لكن العكس ليس بالضرورة صحيح.

الغاية من هذا البحث دراسة العناصر $S-$ الابتدائية الضعيفة في صف الـ $K-$ شبكات وذلك كتعميم لمفهوم المثاليات $S-$ الابتدائية الضعيفة في الحلقات التبديلية [7] على الشبكات الضربية.

1- تعاريف ومفاهيم أساسية. انظر [2, 8, 13, 14, 15, 17]

تعريف 1-1. لتكن S مجموعة ضربية مغلقة في الحلقة R، و Q مثالية في R تحقق أن $Q \cap S = \phi$. يقال عن Q إنها مثالية $S-$ ابتدائية ضعيفة إذا وجد عنصر (مثبت) $s \in S$ بحيث إنه لأجل أي عنصرين $a, b \in R$ يحققان أن $0 \neq ab \in Q$ فإنَّه إما $sa \in Q$ أو $sb \in \sqrt{Q}$.

تعريف 1-2. الشبكة الضربية هي شبكة تامة مزودة بعملية ثنائية $(\cdot)$ تبديلية وتجميعية وتوزيعية مع أي اجتماع والعنصر الأكبر فيها هو العنصر الحيادي بالنسبة لعملية الضرب.

سنرمز في هذا البحث، بالرمز L للشبكة الضربية، وبالرمز I للعنصر الأكبر فيها، وبالرمز 0 للعنصر الأصغر فيها، كما سنفترض أن جميع الشبكات التي نتعامل معها هي شبكات غير صفرية.

خاصية 1-1.

لتكن L شبكة ضربية، عندئذ أياً كان $a, b, c \in L$ فإنه يتحقق:

- $ab \leq a \wedge b \leq a, b \leq a \vee b$.
- $a \cdot 0 = 0$.
- إذا كان $a \leq b$ فإن $ac \leq bc$.
- إذا كان $a \leq a$ فإن $a: c \leq b: c$.

- إذا كان $a \leq b$ و $c \leq d$ فإن $ac \leq bd$.
- إذا كان $a \leq b$ و $a \leq c$ فإن $a \leq b \wedge c$.
- إذا كان $b \leq a$ و $c \leq a$ فإن $b \vee c \leq a$.
- $cb \leq a$ إذا وفقط إذا كان $c \leq a:b$.
- $a:b = I$ إذا وفقط إذا كان $b \leq a$.
- $a \leq a:b$.
- $(a \wedge b)c \leq ac \wedge bc$.

تعريف 1−3. يقال عن العنصر h من L إنه عنصر متراص، إذا كان احتواؤه في اجتماع أي أسرة من عناصر L يؤدي الى احتوائه في اجتماع أسرة جزئية منتهية منها.

تعريف 1−4. يقال عن الشبكة الضربية L إنها $CG-$ شبكة، إذا كان أي عنصر من L يكتب على شكل اجتماع لعناصر متراصة في L .

تعريف 1−5. يقال عن الشبكة الضربية L إنها $K-$ شبكة، إذا كانت $CG-$ شبكة، ومن أجل أي عنصرين متراصين h,k من L يكون العنصر hk متراصاً في L.

تعريف 1−6. لتكن L شبكة ضربية و $a,b \in L$. إن $(a:b)$ يُعرف على النحو الآتي:

$$(a:b) = \vee \{x \in L\,;\, xb \leq a\}$$

تعريف 1−7. لتكن L $K-$ شبكة عنصرها الأكبر I متراص عندئذٍ:

$$xb \leq a \quad \Leftrightarrow \quad x \leq (a:b)$$

تعريف 1−8. يقال عن العنصر a من الشبكة الضربية L إنه قاسم للصفر في L ، إذا كان $(0:a) \neq 0$.

تعريف 1−8. يقال عن الشبكة الضربية L إنها منطقة تكاملية إذا كانت لا تحوي قواسم للصفر.

تعريف 1−10. لتكن L $K-$ شبكة و $a \in L$. يُعرَّف أساس العنصر a من L، بأنه اجتماع كل العناصر المتراصة x في L والتي تحقق المتراجحة $x^n \leq a$ حيث n عدد صحيح موجب ما (n متعلق بـ x)، ويرمز له عادة بالرمز $\sqrt{a}$. أي يمكن القول أن:

$$\sqrt{a} = \vee\{ x \in L : x^n \leq a ; for\ Some\ \ n > 0,\ \text{متراص}\ \ x \}$$

هذا يعني أنه من أجل أي عنصر متراص $c \leq \sqrt{a}$ يوجد $m \in Z^+$ يحقق $c^m \leq a$.

تعريف 1–11. لتكن L $K-$ شبكة و a عنصراً ما من L، يسمى a عنصراً جذرياً في L ، إذا كان $a = \sqrt{a}$.

تعريف 1–12. يقال عن العنصر p من الشبكة الضربية L إنَّه أولي إذا كان $p \neq I$ وكان لأجل أي عنصرين $a, b \in L$ ، بحيث إن $ab \leq p$ فإنه إما $a \leq p$ أو $b \leq p$.

تعريف 1–13. يقال عن العنصر q من الشبكة الضربية L إنه ابتدائي، إذا كان $q \neq I$ وكان لأجل أي عنصرين $a, b \in L$ بحيث إن $ab \leq q$ ، فإنه إما $a \leq q$ أو يوجد $k \in Z^+$ *يحقق* $b^k \leq q$.

تعريف 1–14. يقال عن العنصر a من الشبكة الضربية L إنه عنصر عديم القوى إذا وجد عدد صحيح موجب n لأجله $a^n = 0$.

تعريف 1–15. يقال عن الشبكة الضربية L إنها شبكة ضربية اختزالية إذا كان فيها 0 هو العنصر الوحيد عديم القوى.

تعريف 1–16. ليكن $I \neq d \in L$ ولتكن المجموعة $[d, I] = \{x \in L ;\ \ x \geq d\}$ إن المجموعة الجزئية $[d, I]$ من L تشكل شبكة ضربية بالنسبة للعملية $\circ$ حيث $x \circ y = xy \vee d$ لكل $x, y \in [d, I]$. تسمى الشبكة الناتجة شبكة الخارج ويرمز لها أحياناً بالرمز $L/_d$. من أجل أي عنصر $a \in L$ فإن $\bar{a} = a \vee d$ هو عنصر من $L/_d$.

تعريف 1–17. يكون العنصر أولي (ابتدائي) في $L/_d$ اذا وفقط اذا كان أولي (ابتدائي) في L.

تعريف 1–18. لتكن L $K-$ شبكة و S مجموعة جزئية غير خالية من L، يقال عن S إنها مجموعة ضربية مغلقة في L إذا كانت مغلقة بالنسبة للضرب، وكانت جميع عناصرها متراصة في L.

2– الدراسة البحثية.

سندرس في هذه الفقرة العناصر S – الابتدائية الضعيفة في صف الـ $K-$ شبكات.

تعريف 2−1. لتكن L شبكة و S مجموعة ضربية مغلقة في L، وليكن $I \neq p \in L$ بحيث إن $t \not\leq p$ لكل $t \in S$. نقول عن p إنه عنصر $S-$ أولي في L، إذا وجد $s \in S$ بحيث إنه لأجل أي عنصرين $a, b \in L$ يحققان أن $ab \leq p$، فإنه إما $sa \leq p$ أو $sb \leq p$.

تعريف 2−2. لتكن L شبكة و S مجموعة ضربية مغلقة في L ، وليكن $I \neq p \in L$ بحيث إن $t \not\leq p$ لكل $t \in S$. نقول عن p إنه عنصر $S-$ أولي ضعيف في L إذا وجد $s \in S$ بحيث إنه لأجل أي عنصرين $a, b \in L$ يحققان أن $0 \neq ab \leq p$ ، فإنه إما $sa \leq p$ أو $sb \leq p$.

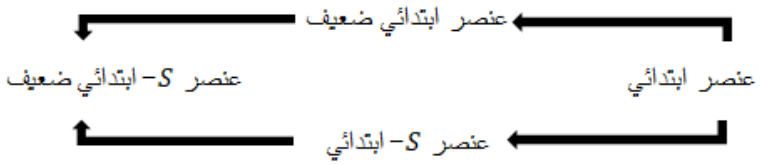
تعريف 2−3. لتكن L شبكة و S مجموعة ضربية مغلقة في L ، وليكن $I \neq q \in L$ بحيث إن $t \not\leq q$ لكل $t \in S$. نقول عن q إنه $S-$ ابتدائي في L ، إذا وجد $s \in S$ بحيث إنه لأجل أي عنصرين $a, b \in L$ ، يحققان أن $ab \leq q$ عندئذ فإنه إما $sa \leq q$ أو $sb \leq \sqrt{q}$.

تعريف 2−4. لتكن L شبكة و S مجموعة ضربية مغلقة في L ، وليكن $I \neq q \in L$ بحيث إن $t \not\leq q$ لكل $t \in S$. نقول عن q إنه عنصر $S-$ ابتدائي ضعيف في L، إذا وجد $s \in S$ بحيث إنه لأجل أي عنصرين $a, b \in L$ يحققان أن $0 \neq ab \leq q$ ، فإنه إما $sa \leq q$ أو $sb \leq \sqrt{q}$.

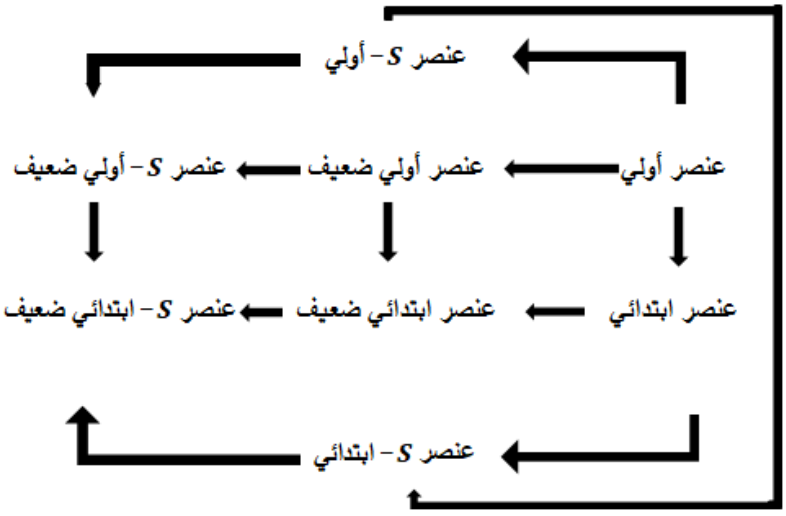
نتيجة 2−1. لتكن L شبكة و S مجموعة ضربية مغلقة في L، وليكن $I \neq q \in L$ بحيث إن $t \not\leq q$ لكل $t \in S$ ، عندئذ:

- اذا كان q عنصراً ابتدائياً في L فإن q عنصر ابتدائي ضعيف في L.
- اذا كان q عنصراً ابتدائياً في L فإن q عنصر $S-$ ابتدائي في L.
- اذا كان q عنصراً ابتدائياً ضعيفاً في L فإن q عنصر $S-$ ابتدائي ضعيف في L.
- اذا كان q عنصراً $S-$ ابتدائياً في L فإن q عنصر $S-$ ابتدائي ضعيف في L.

ويمكن التعبير عن الاقتضاءات السابقة بالمخطط الآتي:



ويمكن التعبير أيضاً عن العلاقات التي تربط بين العنصر الابتدائي والعنصر الأولي وبعض تعميماتهما بالمخطط الآتي:



ملاحظة. ذكرنا في النتيجة السابقة أن كل عنصر S– ابتدائي في L هو عنصر S– ابتدائي ضعيف في L، لكن العكس ليس بالضرورة صحيحاً، والمثال الآتي يوضح ذلك.

مثال 2–1. لتكن $L = L(Z_{10})$ شبكة مثاليات الحلقة Z_{10} عندئذ تكون L K– شبكة عنصرها الأكبر $< 1 >$ متراص. لنأخذ $S = \{< 1 >\}$. إن $< 0 >$ عنصر S– ابتدائي ضعيف في L ، لكنه ليس S– ابتدائياً.

قضية 2–1. لتكن L K– شبكة و S مجموعة ضربية مغلقة في L ، وليكن $q \in L$ عنصراً S– ابتدائياً في L عندئذ فإن $\sqrt{q}$ عنصر S– أولي في L .

البـرهـان. ليكن $a,b \in L$ بحيث إن $ab \le \sqrt{q}$ ، عندئذ يوجد $n \in Z^+$ لأجله $a^n b^n = (ab)^n \le q$. بما أن q عنصر $S-$ ابتدائي في L، فإنه يوجد $s \in S$ بحيث إنه إما $sa^n \le q$ أو $sb^n \le \sqrt{q}$ ، وبالتالي فإنه إما $(sa)^n \le q$ أو $(sb)^n \le q$ ومن ثم فإنه إما $sa \le \sqrt{q}$ أو $sb \le \sqrt{q}$ ، أي إن $\sqrt{q}$ عنصر $S-$ أولي في L .

قضية 2-2. لتكن K $L-$ شبكة و S مجموعة ضربية مغلقة في L . وليكن $q \in L$ عنصراً $S-$ ابتدائياً ضعيفاً في L. إذا كان 0 عنصراً $S-$ ابتدائياً في L، فإن $\sqrt{q}$ عنصر $S-$ أولي في L .

البـرهـان. بما أن q عنصر $S-$ ابتدائي ضعيف في L فإن $t \notin q$ لكل $t \in S$. إن $t \notin \sqrt{q}$ لكل $t \in S$ ، لأنه لو وجد $t \in S$ بحيث إن $t \le \sqrt{q}$ فإنه يوجد $n \in Z^+$ يحقق أن $t^n \le q$ وهذا يناقض كون $t \notin \sqrt{q}$ لكل $t \in S$. ليكن $a,b \in L$ بحيث إن $ab \le \sqrt{q}$ عندئذ يوجد $m \in Z^+$ بحيث إن $a^m b^m = (ab)^m \le q$. إذا كان $a^m b^m \ne 0$، ومن كون q عنصر $S-$ ابتدائي ضعيف في L، فإنه يوجد $s_1 \in S$ بحيث إنه إما $s_1 a^m \le q$ أو $s_1 b^m \le \sqrt{q}$، ومنه إما $(S_1 a)^m \le {s_1}^m a^m \le q$ أو $(S_1 b)^m \le {s_1}^m b^m \le \sqrt{q}$. وهذا يؤدي إلى أنه إما $s_1 a \le \sqrt{q}$ أو $s_1 b \le \sqrt{q}$، أي إن $\sqrt{q}$ عنصر $S-$ أولي في L.

من جهة ثانية اذا كان $a^m b^m = 0$، ومن كون 0 عنصراً $S-$ ابتدائياً في L ، فإنه يوجد $s_2 \in S$ بحيث إنه إما $s_2 a^m = 0$ أو $s_2 b^m \le \sqrt{0}$، وبالتالي فإنه إما $s_2 a \le \sqrt{0} \le \sqrt{q}$ أو $s_2 b \le \sqrt{0} \le \sqrt{q}$. لنضع $s = s_1 s_2$، فيكون لأجل أي عنصرين $x,y \in L$ بحيث إن $xy \le \sqrt{q}$ فإنه إما $sx = s_1 s_2 x \le s_2 x \le \sqrt{q}$ أو $sy = s_1 s_2 y \le s_1 y \le \sqrt{q}$، إذاً $\sqrt{q}$ عنصر $S-$ أولي في L .

ملاحظة. في القضية $2-2$ لا يمكن الاستغناء عن الشرط 0 عنصر $S-$ ابتدائي والمثال الآتي يبين ذلك.

مثال 2-2. لتكن $L = L(Z_{12})$ و $S = <1>$. إن 0 في L هو عنصر $S-$ ابتدائي ضعيف وليس عنصراً $S-$ ابتدائياً و $\sqrt{0}$ ليس أوليًا.

مبرهنة 2-1. لتكن L $K-$ شبكة عنصرها الأكبر I متراص و S مجموعة ضربية مغلقة في L و ليكن $q \in L$ عنصراً $S-$ ابتدائياً ضعيفاً في L عندئذ:

(1) إذا كان q ليس $S-$ ابتدائياً فإن $q^2 = 0$.

(2) إذا كان q ليس $S-$ ابتدائياً و جامداً فإن $q = 0$.

(3) إذا كان q ليس $S-$ ابتدائياً فإن $\sqrt{q} = \sqrt{0}$.

(4) إذا كانت L شبكة اختزالية فإنه إما $q = 0$ أو q عنصر $S-$ ابتدائي .

البرهان.

(1) لنفرض جدلاً أن $q^2 \neq 0$، وليكن $a, b \in L$ بحيث إن $ab \leq q$. إذا كان $ab \neq 0$ فإن $ab \leq q$، ومن كون q عنصراً $S-$ ابتدائياً ضعيفاً فإنه يوجد $x \in S$ بحيث إنه إما $xa \leq q$ أو $xb \leq \sqrt{q}$. أما إذا كان $ab = 0$ ، وفرضنا أن $aq \neq 0$ فإن $0 \neq aq = a(b \vee q) \leq q$، ومن كون q عنصراً $S-$ ابتدائياً ضعيفاً فإنه يوجد $x \in S$ بحيث إنه إما $xa \leq q$ أو $x(b \vee q) \leq \sqrt{q}$ ، وبالتالي إما $xa \leq q$ أو $xb \leq \sqrt{q}$. وبالمثل نجد أنه إذا فرضنا أن $bq \neq 0$ فإن $0 \neq bq = b(a \vee q) \leq q$ ، ومن كون q عنصراً $S-$ ابتدائياً ضعيفاً فإنه يوجد $x \in S$ بحيث إنه إما $xb \leq \sqrt{q}$ أو $x(a \vee q) \leq q$ ، ومنه إما $xb \leq \sqrt{q}$ أو $xa \leq q$. وفي حال كان $bq = 0$ و $aq = 0$ وكون $q^2 \neq 0$ فإن $q^2 = (a \vee q)(b \vee q) \leq q$ ، ومن كون q عنصراً $S-$ ابتدائياً ضعيفاً فإنه يوجد $x \in S$ بحيث إنه إما $x(a \vee q) \leq q$ أو $x(b \vee q) \leq \sqrt{q}$ ، ومن ثم فإنه إما $xa \leq q$ أو $xb \leq \sqrt{q}$. وبالتالي نجد أن q عنصر $S-$ ابتدائي وهذا يناقض الفرض بأن q ليس $S-$ ابتدائياً . إذاً الفرض الجدلي خاطئ و $q^2 = 0$.

(2) بفرض q ليس $S-$ ابتدائياً وجامداً عندئذ حسب (1) يكون $q^2 = 0$ ومن كون q جامداً بالفرض فإن $q = q^2 = 0$.

(3) بفرض q ليس $S-$ ابتدائياً، عندئذ حسب (1) يكون $q^2 = 0$ ، ومنه $q \leq \sqrt{0}$، وبالتالي $\sqrt{q} \leq \sqrt{0}$، ومن كون $0 \leq q$ فإن $\sqrt{q} \leq \sqrt{0}$. مما سبق نجد أن $\sqrt{q} = \sqrt{0}$.

(4) لتكن L شبكة اختزالية ولنفرض أن q ليس عنصراً $S-$ ابتدائياً في L عندئذ حسب (1) يكون $q^2 = 0$ ومن كون L شبكة اختزالية ينتج أن $q = 0$.

نتيجة 2-2. لتكن $L\ K-$ شبكة عنصرها الأكبر I متراص و S مجموعة ضربية مغلقة في L وليكن $q \in L$ عنصراً $S-$ ابتدائياً ضعيفاً في L وليس عنصراً $S-$ ابتدائياً، اذا كان $qd = d$ حيث $d \in L$ فإن $d = 0$.

البرهان. بما أن q ليس عنصراً $S-$ ابتدائياً في L فإنه حسب (1) من المبرهنة $2-1$ يكون $q^2 = 0$ ، ومنه $d = qd = q(qd) = q^2d = 0$.

مبرهنة 2 − 2. لتكن $L\ K-$ شبكة عنصرها الأكبر I متراص و S مجموعة ضربية مغلقة في L ، وليكن q عنصراً من L بحيث إن $t \nleq q$ لكل $t \in S$، عندئذ الشرطان الآتيان متكافئان:

(1) q عنصر $S-$ ابتدائي ضعيف في L.

(2) يوجد عنصر $s \in S$ بحيث إن $(q:a) = (0:a)$ أو $(q:a) \leq (q:s)$ ، لكل $a \nleq (\sqrt{q}:s)$.

البرهان.

$(\mathbf{1}) \Longleftarrow (\mathbf{2})$. لنفرض أن q عنصر $S-$ ابتدائي ضعيف في L. عندئذ يوجد $s \in S$ بحيث إنه لأجل أي عنصرين b, d من L يحققان $0 \neq bd \leq q$ فإنه إما $sb \leq q$ أو $sd \leq \sqrt{q}$.لنأخذ العنصر a من L بحيث $a \nleq (\sqrt{q}:s)$ ، ومن ثم بفرض أنه $(q:a) \neq (0:a)$ عندئذ يوجد عنصر متراص c من L بحيث إن $c \leq (q:a)$ و $c \nleq (0:a)$ ومنه $ca \leq q$ و $ca \neq 0$ ، وبما أن $sa \nleq \sqrt{q}$ و q عنصر $S-$ ابتدائي ضعيف في L فإن $sc \leq \sqrt{q}$. لنبرهن أن $(q:a) \leq (q:s)$. ليكن x عنصراً متراصاً من L بحيث إن $x \leq (q:a)$ ، عندئذٍ $xa \leq q$. اذا كان $xa \neq 0$ ومن كون q عنصر $S-$ ابتدائي ضعيف في L فإنه إما $sa \leq \sqrt{q}$ أو $sx \leq q$، لكن بما أن $sa \nleq \sqrt{q}$ فإننا نحصل على أن $sx \leq q$ ومنه $x \leq (q:s)$ وبالتالي $(q:a) \leq (q:s)$.

من جهة ثانية اذا كان $xa = 0$ فإن $0 \neq ca = ca \vee 0 = ca \vee xa = (c \vee x)a$ ، ومن كون $0 \neq ca \leq q$ فإن $0 \neq (c \vee x)a \leq q$ ، وبما أن q عنصر $S-$ ابتدائي ضعيف في L و $sa \nleq$ $\sqrt{q}$ فإن $s(c \vee x) \leq q$ ومنه $sx \leq s(c \vee x) \leq q$ وهذا يؤدي الى أن $x \leq (q:s)$ أي $(q:a) \leq (q:s)$، ومن ثم يكون لدينا $(q:a) \leq (q:s)$ لكل $a \nleq (\sqrt{q}:s)$.

(2) ⟸ (1). لنفرض أن (2) محقق ولنبرهن أن q عنصر $S-$ ابتدائي ضعيف في L. ليكن $b, c \in L$ بحيث إن $0 \neq bc \leq q$، ولنفرض أن $sb \nleq \sqrt{q}$ ولنبرهن أن $sc \leq q$. من كون $sb \nleq \sqrt{q}$ يكون $b \nleq (\sqrt{q}:s)$ وبما أن $0 \neq bc \leq q$ فإن $c \leq (q:b)$ و $c \nleq (0:b)$ اذاً $(q:b) \neq (0:b)$. ومن كون $sb \nleq \sqrt{q}$ و $(q:b) \neq (0:b)$ فإنه حسب (2) يكون $(q:b) \leq (q:s)$ ومنه $c \leq (q:s)$ وهذا يؤدي الى أن $sc \leq q$ وبالتالي q عنصر $S-$ ابتدائي ضعيف في L.

قضية 2-3. لتكن L $K-$ شبكة عنصرها الأكبر I متراص و S مجموعة ضربية مغلقة في L، وليكن q عنصراً من L بحيث إن $t \nleq q$ لكل $t \in S$، إذا وجد $s \in S$ بحيث إن $(q:s)$ عنصر ابتدائي ضعيف في L فإن q يكون عنصراً $S-$ ابتدائياً ضعيفاً في L .

البرهان. لنفرض أنه يوجد $s \in S$ لأجله يكون $(q:s)$ عنصر ابتدائي ضعيف في L، ولنبرهن أن q عنصر $S-$ ابتدائي ضعيف في L. ليكن $a, b \in L$ بحيث إن $0 \neq ab \leq q$. بما أن $q \leq (q:s)$ فإن $0 \neq ab \leq (q:s)$ وبما أن $(q:s)$ عنصر ابتدائي ضعيف في L فإنه يكون إما $a \leq (q:s)$ أو $b \leq \sqrt{(q:s)}$ أي إما $a \leq (q:s)$ أو يوجد $n \in Z^+$ بحيث يكون $b^n \leq (q:s)$ وهذا يؤدي الى أنه إما $sa \leq q$ أو $(bs)^n \leq b^n s \leq q$ ومنه يكون إما $sa \leq q$ أو $sb \leq \sqrt{q}$ وبالتالي فإن q عنصر $S-$ ابتدائي ضعيف في L .

قضية 2 – 4. لتكن L $K-$ شبكة عنصرها الأكبر I متراص و S_1, S_2 مجموعتين ضربيتين مغلقتين في L بحيث إن $S_1 \subseteq S_2$ وليكن $q \in L$ عنصراً S_1- ابتدائياً ضعيفاً في L . عندئذ يكون q عنصراً S_2- ابتدائياً ضعيفاً في L لكل $t \in S_2$ و $t \nleq q$.

البرهان. بما ان q عنصر S_1– ابتدائي ضعيف في L فإنه يوجد $t \in S_1$ بحيث إنه لأجل أي عنصرين $a,b \in L$ يحققان $0 \neq ab \leq q$ فإنه إما $ta \leq q$ أو $tb \leq \sqrt{q}$ ومن كون $S_1 \subseteq S_2$ فإن $t \in S_2$ ويحقق المطلوب.

إن عكس القضية $(2-4)$ ليس بالضرورة صحيحاً والمثال الآتي يبين ذلك:

مثال 2 – 3. لتكن $L = L(Z_{12})$ شبكة مثاليات الحلقة Z_{12} عندئذ L تكون K – شبكة عنصرها الأكبر $< 1 >$ متراص.لنأخذ $S_1 =< 1 >$ $S_2 = \{< 1 >, < 2 >, < 4 >\}$ المجموعتين الضربيتين المغلقتين في L وحيث $S_1 \subseteq S_2$، عندئذ يكون $< 6 >$ عنصرًا S_2 – ابتدائيًا ضعيفًا في L ولكنه ليس عنصراً S_1– ابتدائياً ضعيفاً في L .

تعريف 2 – 5. لتكن $K\ L$– شبكة و S مجموعة ضربية مغلقة في L. نعرف المجموعة S^* بأنها مجموعة كل العناصر المتراصة من L والتي لأجل كل عنصر x منها يوجد عنصر متراص y من L يحقق أن $xy \in S$. أي إن:

$$S^* = \{x \in L; x\ is\ compact\ in\ L \setminus\ xy \in S\ \ for\ some\ compact\ y \in L\}.$$

واضح أن S^* هي مجموعة ضربية مغلقة في L، كما أن $S \subseteq S^*$.

مثال 2–4. لتكن $L = L(Z_{12})$ شبكة مثاليات الحلقةZ_{12}، ولتكن $S = \{< 1 >, < 4 >\}$ عندئذٍ $S^* = \{< 1 >, < 2 >, < 4 >\}$. إن $S \subseteq S^*$.

قضية 2–5. لتكن $K\ L$–شبكة عنصرها الأكبر I متراص، وS مجموعة ضربية مغلقة في L وليكن $I \neq q \in L$ بحيث إن $t \not\leq q$ لكل $t \in S$ عندئذ يكون q عنصراً S– ابتدائياً ضعيفاً في L إذا وفقط إذا كان q عنصراً S^*– ابتدائياً ضعيفاً في L .

البـرهــان. لنفرض أن q عنصر S– ابتدائي ضعيف في L. عندئذٍ فإنه يكون q عنصرًا S^*– ابتدائيًا ضعيفًا في L، وذلك حسب القضية $2-4$ ومن كون $S \subseteq S^*$.

من أجل العكس، لنفرض أن q عنصر S^*– ابتدائي ضعيف في L. عندئذٍ لأجل أي عنصرين $a,b \in L$ بحيث إن $0 \neq ab \leq q$، يوجد $s^* \in S^*$ يحقق أنه إما $s^*\mathrm{a} \leq \mathrm{q}$ أو $s^*b \leq \sqrt{q}$، ولنبرهن أن

q عنصر $S-$ ابتدائي ضعيف في L. ليكن $x,y \in L$ بحيث إن $0 \neq xy \leq q$، عندئذٍ $s^*x \leq q$ أو $s^*y \leq \sqrt{q}$. بما أن $s^* \in S^*$، فإنه يوجد عنصر متراص $t \in L$ بحيث إن $s^*t \in S$. لنضع $s^*t = s$ فيكون $sx = s^*tx \leq s^*x \leq q$ أو $sy = s^*ty \leq s^*y \leq \sqrt{q}$. ومنه q عنصر $S-$ ابتدائي ضعيف في L.

قضية 2-6. لتكن L $K-$ شبكة عنصرها الأكبر I متراص و S مجموعة ضربية مغلقة في L، وليكن $q \in L$ عنصراً $S-$ ابتدائياً ضعيفاً في L. إذا كان p عنصرًا ما من L لأجله يوجد $t \in S$ بحيث $t \leq p$، فإن كلًا من pq و $p \wedge q$ عنصر $S-$ ابتدائي ضعيف في L.

البـرهـان. بما أن q عنصر $S-$ ابتدائي ضعيف في L ، فإن $t \nleq q$ لكل $t \in S$، ومنه $t \nleq p \wedge q$ و $t \nleq pq$ لكل $t \in S$. ليكن $a,b \in L$ بحيث إن $0 \neq ab \leq pq$ عندئذٍ $0 \neq ab \leq q$. بما أن q عنصر $S-$ ابتدائي ضعيف في L، فإنه يوجد $s \in S$ بحيث إنه إما $sa \leq q$ أو $sb \leq \sqrt{q}$. لنأخذ $t_1 \in S$ بحيث إن $t_1 \leq p$، عندئذ إما $t_1sa \leq pq$ أو $t_1sb \leq \sqrt{pq}$، ومنه pq عنصر $S-$ ابتدائي ضعيف في L. لنبرهن أن $p \wedge q$ عنصر $S-$ ابتدائي ضعيف في L . ليكن $c,d \in L$ بحيث إن $0 \neq cd \leq p \wedge q$، عندئذٍ $0 \neq cd \leq q$. بما أن q عنصر $S-$ ابتدائي ضعيف في L، فإنه يوجد $s \in S$ بحيث إن $sc \leq q$ أو $sd \leq \sqrt{q}$. لنأخذ $t_2 \in S$ بحيث إن $t_2 \leq p$، عندئذ إما $t_2sc \leq pq \leq p \wedge q$ أو $t_2sd \leq \sqrt{q}p \leq \sqrt{q} \wedge \sqrt{p} \leq \sqrt{p \wedge q}$. ومنه $p \wedge q$ عنصر $S-$ ابتدائي ضعيف في L .

قضية 2 – 7. لتكن L $K-$ شبكة عنصرها الأكبر I متراص و S مجموعة ضربية مغلقة في L وبفرض $q_1, \dots, q_n$ عناصر $S-$ ابتدائية ضعيفة في L. إذا كان $\sqrt{q_i} = \sqrt{q_j}$ لكل $i,j = 1, \dots, n$ ، فإن $q = \wedge_{i=1}^{n} q_i$ يكون عنصراً $S-$ ابتدائياً ضعيفاً في L. وبشكل خاص، إذا كانت $q_1, \dots, q_n$ ليست عناصر $S-$ ابتدائية في L، فإن q عنصر $S-$ ابتدائي ضعيف في L.

البـرهـان. بما أن $q_1, \dots, q_n$ عناصر $S-$ ابتدائية ضعيفة في L ، فإن $t \nleq q_i$ $(i = 1, \dots, n)$ لكل $t \in S$، ومنه $t \nleq q = \wedge_{i=1}^{n} q_i$ لكل $t \in S$. من جهة أخرى، من أجل أي عنصرين $a,b \in L$

يحققان $0 \neq ab \leq q_i$ يوجد $s_i \in S$ يكون لأجله إما $s_i a \leq q_i$ أو $s_i b \leq \sqrt{q_i}$. لنضع $s = s_1\, s_2 \dots s_n$، وليكن $x, y \in L$ بحيث إن $0 \neq xy \leq q$ ، ولنفرض أن $sx \nleq q$، عندئذ يوجد دليل j بحيث إن $sx \nleq q_j$. إذا كان $s_j x \leq q_j$ فإن $sx \leq s_j x \leq q_j$ وهذا يناقض كون $sx \nleq q_j$، وبالتالي فإن $s_j x \nleq q_j$. إذاً $s_j y \leq \sqrt{q_j}$. بما أن $\sqrt{q_i} = \sqrt{q_j}$ وذلك لكل $i, j = 1, \dots, n$ ، فإن $\sqrt{q} = \sqrt{\Lambda_{i=1}^{n} q_i} = \Lambda_{i=1}^{n} \sqrt{q_i} = \sqrt{q_i}$ لكل $i = 1, \dots, n$ [1, Lemma 1.]. ومنه $s_j y \leq \sqrt{q}$، وهذا يؤدي إلى أن $sy \leq s_j y \leq \sqrt{q}$. إذاً q عنصر $S-$ ابتدائي ضعيف في L.

لنفرض الآن أن $q_1 , \dots, q_n$ ليست عناصر $S-$ ابتدائية في L ، فإنه حسب (3) من المبرهنة $2-1$ يكون $\sqrt{q_i} = \sqrt{0}$ لكل $i = 1, \dots, n$، ومنه $\sqrt{q_i} = \sqrt{q_j}$ لكل $i, j = 1, \dots, n$ ، وبالتالي فإن q عنصر $S-$ ابتدائي ضعيف في L .

قضية 2-8. لتكن L $K-$ شبكة و S مجموعة ضربية مغلقة في L و ليكن $k \in L$ عنصراً متراصاً في L، عندئذ تكون $\bar{S} = \{\bar{s} = s \vee k \,;\, s \in S\}$ مجموعة ضربية مغلقة في $L/_k$.

البرهان. ليكن $k \in L$ عنصرًا متراصًا في L ، عندئذٍ $\bar{s} = s \vee k \in \bar{S}$ عنصر متراص في $L/_k$ لكل $s \in S$، ومنه جميع عناصر $\bar{S}$ متراصة في $L/_k$. لنبرهن أن $\bar{S}$ مغلقة بالنسبة لعملية الضرب $\circ$ المعرفة في $L/_k$. ليكن $\bar{x}, \bar{y} \in \bar{S}$، عندئذٍ:

$$\bar{x} \circ \bar{y} = (x \vee k) \circ (y \vee k) = (x \vee k)(y \vee k) \vee k = xy \vee xk \vee yk \vee k^2 \vee k$$
$$= xy \vee k \in \bar{S}$$

مما سبق نجد أن $\bar{S}$ هي مجموعة ضربية في $L/_k$.

مبرهنة 2-3. لتكن L $K-$شبكة عنصرها الأكبر I متراص و S مجموعة ضربية مغلقة في L وليكن $q, k \in L$ بحيث إن k عنصر متراص في L و $k \leq q$ عندئذ القضايا الآتية صحيحة:

(1) إذا كان q عنصراً $S-$ ابتدائياً ضعيفاً في L فإن $q \vee k = \bar{q}$ عنصر $\bar{S}-$ ابتدائي ضعيف في شبكة الخارج $L/_k$.

(2) إذا كان k عنصراً $S-$ ابتدائياً في L ، و $q \vee k = \bar{q}$ عنصراً $\bar{S}-$ ابتدائياً ضعيفاً في شبكة الخارج $L/_k$ ، فإن q عنصر $S-$ ابتدائي في L.

(3) إذا كان k عنصراً S– ابتدائياً ضعيفاً في L و $q \vee k = \bar{q}$ عنصراً $\bar{S}$– ابتدائياً ضعيفاً في شبكة الخارج $L/_k$ ، فإن q عنصر S– ابتدائي ضعيف في L.

البـرهـان.

(1) لدينا $\bar{t} \nleq \bar{q}$ لكل $\bar{t} \in \bar{S}$، لأنه لو وجد $\overline{t_1} \in \bar{S}$ بحيث إن $t_1 \vee k = \overline{t_1} \leq \bar{q}$ و $t_1 \in S$ لكان $t_1 \leq q$، وهذا تناقض مع كون q عنصراً S– ابتدائياً ضعيفاً في L ، ومنه $\bar{t} \nleq \bar{q}$ لكل $\bar{t} \in \bar{S}$. ليكن $\bar{a}, \bar{b} \in L/_k$ بحيث إن $k \neq \bar{a} \circ \bar{b} \leq \bar{q}$ ، عندئذ يكون $k \neq ab \vee k \leq q \vee k$، وبما أن $k \leq q$ نجد أن $k \neq ab \leq q$، ومن كون q عنصراً S– ابتدائياً ضعيفاً في L، فإنه يوجد $s \in S$ بحيث إنه إما $sa \leq q$ أو $sb \leq \sqrt{q}$. ومن ثم يكون إما $\bar{s} \circ \bar{a} = (s \vee k)(a \vee k) \vee k = sa \vee k \leq q \vee k = \bar{q}$ أو

$$\bar{s} \circ \bar{b} = (s \vee k)(b \vee k) \vee k = sb \vee k \leq \sqrt{q} \vee k \leq \overline{\sqrt{q}}$$

مما سبق نجد أن $\bar{q}$ عنصر $\bar{S}$– ابتدائي ضعيف في $L/_k$.

(2) لنفرض أن $\bar{q}$ عنصر $\bar{S}$– ابتدائي في $L/_k$ ، و k عنصر S– ابتدائي في L . إن $t \nleq q$ لكل $t \in S$ ، لأنه لو وجد $t_1 \in S$ بحيث إن $t_1 \leq q$ لكان $t_1 \vee k \in \bar{S}$ وكان أيضاً $\overline{t_1} = t_1 \vee \mathrm{k} \leq q \vee k = \bar{q}$، وبالتالي يوجد $\overline{t_1} \in \bar{S}$ بحيث إن $\overline{t_1} \leq \bar{q}$ وهذا تناقض مع كون $\bar{q}$ عنصراً $\bar{S}$– ابتدائياً ضعيفاً في $L/_k$. ليكن $a, b \in L$ بحيث إن $ab \leq q$. بما أن $k \leq q$ فإن $(a \vee k)(b \vee k) \leq ab \vee k \leq q$. إذا كان $ab \leq k$ فإن $ab \vee k = k$ من $L/_k$، ومنه $(a \vee k)(b \vee k) = ab \vee k \leq k$، وبما أن k عنصر S– ابتدائي في L، فإنه يوجد $t \in S$ بحيث إنه إما $t(a \vee k) \leq k \leq q$ أو $t(b \vee k) \leq \sqrt{k} \leq \sqrt{q}$ ، ومنه إما $ta \leq q$ أو $tb \leq \sqrt{q}$، أي q عنصر S– ابتدائي في L. وإذا كان $ab \nleq k$ فإنه إما $k \nleq ab$ أو $k \leq ab$. إذا كان $k \nleq ab$ فإنه $k \nleq q$ وهذا تناقض. وبالتالي $k \leq ab$ ومنه $k \neq ab \vee k \leq ab \leq q \leq q \vee k$ وبالتالي $\bar{a} \circ \bar{b} \leq \bar{q}$ ومن كون $q \vee k = \bar{q}$ عنصر $\bar{S}$– ابتدائي ضعيف في $L/_k$ فإنه يوجد $\bar{y} \in \bar{S}$ بحيث إنه إما $\bar{y} \circ \bar{a} \leq \bar{q}$ أو $\bar{y} \circ \bar{b} \leq \sqrt{\bar{q}} = \sqrt{q \vee k}$ ، ومنه إما $ya \leq ya \vee k \leq q$ أو $yb \leq yb \vee k \leq \sqrt{q}$. مما سبق ينتج أن q عنصر S– ابتدائي في L .

(3) إن $t \notin q$ لكل $t \in S$ لأنه لو وجد $t_1 \in S$ بحيث إن $t_1 \leq q$ لكان $t_1 \vee k \in \bar{S}$ وبحيث $t_1 \vee k \leq q \vee k = \bar{q}$ ، وبالتالي يوجد $\bar{t_1} \in \bar{S}$ يحقق إن $\bar{t_1} \leq \bar{q}$ وهذا يتناقض مع كون $\bar{q}$ عنصراً $\bar{S}-$ ابتدائياً ضعيفاً في $L/_k$. بالطريقة نفسها التي تم فيها برهان (2) نكمل برهان (3) ، وذلك بأخذ $a, b \in L$بحيث إن $0 \neq ab \leq q$ ، ونبرهن على وجود $s \in S$ يحقق أنه إما $sa \leq q$ أو $sb \leq \sqrt{q}$.

قضية 2-9. لتكن R حلقة تبديلية وواحدية و $L = L(R)$ شبكة مثاليات الحلقة R. إذا كانت S مجموعة ضربية مغلقة في R ، فإن المجموعة $S_L = \{< x >;\ x \in S\}$ هي مجموعة ضربية مغلقة في الشبكة الضربية $L = L(R)$.

البرهان. لتكن S مجموعة ضربية في R، ولنبرهن أن المجموعة $S_L = \{< x >;\ x \in S\}$ هي مجموعة ضربية مغلقة في الشبكة الضربية $L = L(R)$. واضح أن عناصر S_L متراصة. ليكن $< x >, < y > \in S_L$ عندئذٍ $x, y \in S$ ، ومن كون S مجموعة ضربية مغلقة في R فإن $x.y \in S$، ومنه $< x >.< y >=< xy > \in S_L$. مما سبق نجد أن S_L مجموعة ضربية مغلقة في الشبكة الضربية $L = L(R)$.

مبرهنة 2-4. لتكن R حلقة تبديلية وواحدية و S مجموعة ضربية مغلقة في R ، ولتكن Q مثالية في R منفصلة عن S، و $L = L(R)$ شبكة مثاليات الحلقة R الضربية. عندئذ الشرط اللازم والكافي لتكون Q مثالية $S-$ ابتدائية ضعيفة في R هو أن تكون Q عنصرًا S_L- ابتدائيًا ضعيفًا في الشبكة الضربية $L = L(R)$.

البرهان. لنفرض أن Q مثالية $S-$ ابتدائية ضعيفة في R، عندئذٍ $S \cap Q = \emptyset$ ، ويكون لدينا $x \in S$ لكل $Q \nsubseteq < x >$. ليكن $A, B \in L = L(R)$ بحيث إن $0 \neq AB \subseteq Q$، عندئذٍ ومن كون Q مثالية $S-$ ابتدائية ضعيفة في R، فإنه يوجد $x \in S$ بحيث إنه إما $xA \subseteq Q$ أو $xB \subseteq \sqrt{Q}$، ومن ثم فإنه إما $A \subseteq Q :< x >$ أو $B \subseteq \sqrt{Q} :< x >$. مما سبق نجد أن Q عنصر S_L- ابتدائي ضعيف في $L = L(R)$. وبالعكس، لنفرض أن Q عنصر S_L- ابتدائي ضعيف في $L = L(R)$ ، عندئذٍ $t \notin Q$

لكل $t \in S_L$ ومنه $S \cap Q = \emptyset$، لأنه لو وجد $a \in S \cap Q$، لكان $< a > \in S_L$ و $< a > \in Q$ وهذا تناقض. بما أن Q عنصر S_L- ابتدائي ضعيف في $L = L(R)$ فإنه يوجد $< x > \in S_L$ $(s \in S)$ بحيث إنه لأجل أي عنصرين A, B من L يحققان $0 \neq AB \leq Q$ ، فإنه إما $< x > A \leq Q$ أو $< x > B \leq \sqrt{Q}$، وبالتالي فإن Q مثالية $S-$ ابتدائية ضعيفة في R.

المـراجــع العلـمـيــة

[1] Almahdi, F. A. Bouba, E. M. and Tamekkante, M. (2021) On weakly S-prime ideals of commutative rings, Analele Stiint. Ale. Univ. Ovidius Constanta Ser. Mat., Sciiendo, 29 (2), 173-186.

[2] Anderson D. D. (1976) Abstract commutative ideal theory without chain condition, Algebra Univrs., 6, 131-145.

[3] Anderson D. D. and Smith, E. (2003) Weakly prime ideals. Houston J. Math., 29, 831-840.

[4] Atani, S. E. and Farzalipour, F. (2005) On weakly primary ideals. Georgian Mathematical Journal , 12 (3), 423-429.

[5] Ballal, S., Gophane, M. and Kharat, V. (2016) On weakly primary elements in multiplicative lattices. Southeast Asian Bulletin of Mathematics, 40 (1), 439-449.

[6] Callıalp, F., Jayaram, C. and Tekir, Ü. (2012) Weakly prime elements in multiplicative lattices. Communications in Algebra, 40 (8), 2825-2840.

[7] Celikel, E.Y. and Khashan, H., (2021). On weakly S- primary ideals of a commutative rings. Journal of Algebra Appli., 23 (10).

[8] Dilworth, R. P. (1962) Abstract commutative ideal theory, Pacific J. Math., 12, 481-498.

[9] Hamed, A. and Malek, A. (2020), S-Prime ideals of a commutative ring, Beitr. Algebra und Geom., 61(3), 533-542.

[10] Jayaram, C. and Johnson, E. W. (1995) S- Prime elements in multiplicative lattices. V. 31 (3), 201-208.

[11] Joshi, V. and Sarode, S. (2015) Beck's conjecture and multiplicative lattices. Discrete Math. 338 (3), 93-98.

[12] Massaoud, E., (2021), S- primary ideals of commutative ring, Commun. Algebra, 50 (3), 988-997.

[13] Nakkar, H. M., (1974), Localization in multiplicative lattice modules. Mat. Issledovanija, Kishinev, 2(32), 88-108.

[14] Nakkar, H. M. and Anderson, D. D. (1988) Associated and weakly associated prime elements and primary decomposition in lattice modules. Algebra Universalis, 25, 196-209.

[15] Nakkar, H. M., Al- Khouja, E. A. (1995) Noetherian lattices in which every element is a product of primary elements, Order 12, 413-420.

[16] Nakkar, H. M., Al- Khouja, E. A. (2003) Multiplicative lattices with Noetherian spectrum, Mu'tah Lil-Buhuth wad-Dirasat, V0l. 18, No. 1, 11-20.

[17] Reinhart, A. Ulucak, G. (2025) Multiplicative Lattices with absorbing factorization. Communications in Algebra, 1-19.

[18] Visweswaran, S. (2022), Some results on S- primary ideals of a commutative ring. Beitr. Algebra Geom., 63, 247-266.