وحدانية حل مسألة حدية في نظرية الإجهاد المزدوج للمرونة باستخدام تكامل ديرخليه

د . أحمد الجاعور – أستاذ مساعد في كلية العلوم – جامعة البعث

ملخص البحث

تم في هذا البحث إثبات وحدانية حل المسألة الخارجية الأساسية الأولى لنظرية الإجهاد المزدوج للمرونة الرياضية في الحالة الساكنة والتي تهدف الى ايجاد المتجه U في المنطقة Ω^- الذي يحقق الشروط الآتية :

$$\forall x \in \Omega^- \quad : \quad A(\partial_x)U(x) = 0$$

$$\forall z \in \partial\Omega \quad : \quad U\big|_{\partial\Omega}(z) = \phi(z) \quad ; \quad \phi : \partial\Omega \to R^6$$

$$\forall x \in \Omega^- \quad : \quad |U(x)| \le \frac{c}{|x|^p} \quad ; \quad p \in Z^+$$

وذلك باستخدام طريقة جديدة تعتمد على محدودية تكامل ديرخليه .

كلمات مفتاحية :

Mathematical Elasticity , Boundary problem , couple-stress theory

Unique Solution of boundary problem of couple-stress theory of Elasticity by Dairkhli Integral

Dr . A . AL JAOUR

SUMMARY

In this research was proofed that the first essential problem of couple – stress theory of mathematical elasticity in the static case has unique solution .

This problem aim to find the vector U which belong to the Ω^- , and realize the following conditions :

$$\forall x \in \Omega^- \quad : \quad A(\partial_x)U(x) = 0$$

$$\forall z \in \partial\Omega \quad : \quad U\big|_{\partial\Omega}(z) = \phi(z) \quad ; \quad \phi : \partial\Omega \to R^6$$

$$\forall x \in \Omega^- \quad : \quad |U(x)| \le \frac{c}{|x|^p} \quad ; \quad p \in Z^+$$

In improving that the Dairkhli integral was used

Key words

Mathematical Elasticity , Boundary problem , couple-stress theory

مقدمة البحث :

نستعرض الرموز والتعاريف اللازمة لتوضيح محتوى هذا البحث [1] و [2] :

لتكن Ω منطقة محدودة من الفضاء الإقليدي R^3 ، حدودها $\partial\Omega$ ملساء جزئياً و $\overline{\Omega}$ مجموعة مغلقة في R^3 . ولتكن Ω^- متممة المنطقة Ω داخل الفضاء R^3 ؛ بحيث $\Omega^- = R^3 \setminus \overline{\Omega}^-$. نرمز بـ $B(y,\varepsilon)$ لكرة في R^3 مركزها النقطة y ونصف قطرها ε حدودها $\partial B(y,\varepsilon)$. نرمز بـ O $(\circ)$ باللامتناهي في الكبر (اللامتناهي في الصغر) . كما نرمز بـ $C^k(\Omega)$ (k عدد صحيح غير سالب) لفضاء الدوال المعرَّفة على Ω ، والتي مشتقاتها حتى المرتبة k مستمرة في Ω ، ونرمز بـ $C^k(\overline{\Omega})$ لصف الدوال من $C^k(\Omega)$ والتي مشتقاتها مستمرة في كل نقطة من نقاط الحدود $\partial\Omega$ ، بينما نرمز لصف الدوال التي تنتمي إلى $C^k(\Omega)$ ، من أجل كل قيم k ، بالرمز $C^\infty(\Omega)$ ، وبالمثل يعرَّف الرمز $C^\infty(\overline{\Omega})$.

المتجه $\vec{\alpha} \equiv (\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ ؛ حيث $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ أعداد صحيحة غير سالبة نسميه معامل ، ∂^α المشتق من المرتبة $|\alpha| = \sum_{i=1}^{3} \alpha_i$:

$$\partial^\alpha = \partial_1^{\alpha_1}.\partial_2^{\alpha_2}.\partial_3^{\alpha_m} \quad , \quad \partial_x = (\partial x_1, \partial x_2, \partial x_3) \ , \ x^\alpha = x_1^{\alpha_1}.x_2^{\alpha_2}.x_3^{\alpha_3}$$

يأخذ **تحويل فورييه للدالة المعممة** (أي الدالة الخطية المستمرة على فضاء الدوال $C^\infty(R^3)$) الشكل الآتي :

$$\hat{f}(\xi) = \int_{R^3} f(x) e^{i\xi x} dx \ ; \ x,\xi \in R^3$$

يأخذ **تكامل ديرخليه** بالمتحول u الشكل الآتي :

$$D_{m,n}^{(p)}(u,\Omega) \equiv \left(\int_\Omega \frac{1}{1+|x|^p} \frac{\partial u_k(x)}{\partial x_j} \frac{\partial u_k(x)}{\partial x_j} dx \right)^{\frac{1}{2}} ; m,n \in N \ , \ j = 1,2,3$$

تأخذ **متراجحة كوشي – بونياكوفسكي** الشكل الآتي :

$$\left[\int_a^b f(x).g(x)dx\right]^2 \leq \int_a^b f^2(x)dx.\int_a^b g^2(x)dx \;\; ; \; (a,b)\subseteq R$$

تعريف 1 : نقول عن دالة ما $f(x)$ إنَّها منتظمة في المنطقة Ω ، إذا أمكن تمثيل هذه الدالة بمتسلسلة قوى متقاربة بانتظام في جوار كل نقطة من نقاط هذه المنطقة فمن أجل النقطة x_0 نكتب :

$$f(x)=\sum_{|\alpha|\geq 0} c_\alpha (x-x_0)^\alpha = \sum_{|\alpha|\geq 0}\frac{\partial^\alpha f(x_0)}{\alpha!}(x-x_0)^\alpha$$

تعريف 2 : نقول عن الوسط المرن إنه متجانس ومتساوي الخواص إذا كانت خواص المرونة واحدة لهذا الوسط في كل الاتجاهات . أو إنَّ ثوابت المرونة الالكترونية للوسط لا تتعلق بتوجيه المحاور الإحداثية . وإذا لم يكن الوسط متساوي الخواص فإننا نسميه مختلف الخواص (أي غير متجانس) .

تعريف 3 : نسمي مسائل القيم الحدية المعرَّفة على Ω^- بالمسائل الحدية الخارجية ، أو اختصاراً بالمسائل الخارجية .

إنَّ المعادلات التفاضلية المتجانسة للإجهاد المزدوج من أجل الأوساط المرنة المتجانسة والمتساوية الخواص تعطى بالشكل $[3]$:

$$C_{ijlk}\frac{\partial^2 u_k}{\partial x_j \partial x_l} - C_{jilm}\varepsilon_{klm}\frac{\partial w_k}{\partial x_j} = 0$$

$$C_{jmlk}\varepsilon_{ijm}\frac{\partial u_k}{\partial x_l} + C'_{jilk}\frac{\partial^2 w_k}{\partial x_j \partial x_l} - C_{jmlp}\varepsilon_{ijm}\varepsilon_{klp}w_k = 0$$

حيث $u=(u_1,u_2,u_3)$ متجه الانزياح ، $w=(w_1,w_2,w_3)$ متجه الدوران ، ε_{ijk} رمز ليف- تشيفيت (وهو يساوي $(+1)$ إذا كان عدد التبديلات التي تقودنا من التبديلة (i,j,k) إلى التبديلة $(1,2,3)$ زوجياً ، ويساوي (-1) إذا كان عدد هذه التبديلات فردياً ويساوي الصفر إذا تساوى إثنان من الأدلة i,j,k) ، C'_{jilk} , C_{jilk} ؛ حيث :

$(i, j, l, k = 1, 2, 3)$ ثوابت المرونة . إنَّ هذه الثوابت C_{ijkl} , C'_{ijkl} تحقق شروط التماثل :

$$C_{ijkl} = C_{klij} \qquad , \qquad C'_{ijkl} = C'_{klij}$$

وشروط التحديد الموجب لأشكال الطاقة :

$$C_{ijkl}\xi_{ij}\xi_{kl} + C'_{ijkl}\eta_{ij}\eta_{kl} > 0 \;\; ; \;\; \xi_{ij}\xi_{ij} + \eta_{ij}\eta_{ij} \neq 0$$

بفرض $A(\partial_x) \equiv [A_{ik}(\partial_x)]_{(6)}$ مؤثر تفاضلي مصفوفي فيه :

$$A_{ik}(\partial_x) \equiv C_{jilk}\frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_l} \quad ; \quad i,k = 1,2,3$$

$$A_{i,k+3}(\partial_x) \equiv -C_{jilm}\varepsilon_{klm}\frac{\partial}{\partial x_j} \quad ; \quad i,k = 1,2,3$$

$$A_{i+3,k}(\partial_x) \equiv C_{jmlk}\varepsilon_{ijm}\frac{\partial}{\partial x_l} \quad ; \quad i,k = 1,2,3$$

$$A_{i+3,k+3}(\partial_x) \equiv C'_{jilk}\frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_l} - C_{jmlp}\varepsilon_{ijm}\varepsilon_{klp} \quad ; \quad i,k = 1,2,3$$

وإذا رمزنا بـ $U = (U_1, U_2, \ldots, U_6)$ لمتجه ذي ستة مركبات ؛ بحيث :

$$U_i = u_i \;\; , \;\; U_{i+3} = w_i \;\; ; \;\; (i = 1,2,3)$$

فإنَّ جملة المعادلات السابقة تكتب بالشكل المصفوفي الآتي :

$$A(\partial_x)U = 0 \qquad \left(A_{ik}(\partial_x)U_k = 0\right) \qquad (1)$$

تصاغ عبارة الحل من خلال التمهيدية الآتية [4] :

تمهيدية 1 : بفرض أنَّ U حل للجملة (1) في المنطقة Ω^- (في جوار للنقطة $|x| = \infty$) ، ومن الصف $C^2(\Omega^-)$ ويحقق الشرط الآتي :

$$\lim_{|x|\to\infty}\frac{U(x)}{|x|^{p+1}} = 0 \qquad \left(U(x) = \circ\left(|x|^{p+1}\right)\right)$$

وذلك من أجل $|x| \to \infty$ ؛ حيث p عدد صحيح غير سالب .

فإنَّه وفي جوار أي نقطة لانهائية ، ومن أجل أي عدد صحيح غير سالب q يكون :

$$\forall x \in \Omega^- \quad : \quad U_j(x) = \sum_{|\alpha|\le p} c_j^{(\alpha)} x^\alpha + \sum_{|\beta|\le q} d_k^{(\beta)} \partial^\beta \Phi_{jk}(x) + \Psi_j(x) \qquad (2)$$

حيث α و β معاملات المجموع و γ معامل اختياري ، $c_j^{(\alpha)} = (c_1^{(\alpha)},...,c_6^{(\alpha)})$ ، $d_k^{(\beta)} = (d_1^{(\beta)},...,d_6^{(\beta)})$ ثوابت و $\Psi_j(x)$ دالة تحقق ، في جوار النقطة $|x| = \infty$ ، العلاقة :

$$\partial^\gamma \Psi_j(x) = O\left(|x|^{-2-|\gamma|-q}\right) \ ; \ j = 1,...,6$$

وأيضاً Φ_k عبارة عن k عمود من مصفوفة الحلول الأساسية $\Phi = \left[\Phi_{kj}\right]_{(6)}$ للجملة (1) . هذه المصفوفة تتمتع بالخواص الآتية :

$$1) \quad \Phi_{kj} \in C^\infty\left(R^3 \setminus \{o\}\right) \ ; \ \forall x \in R^3 \setminus \{o\} :$$
$$A_{ik}(\partial_x)\Phi_{kj}(x) = \delta_{ij}\delta(x) \quad ; \quad i, j = 1,...,6$$

$$2) \quad \forall \xi = (\xi_1,...,\xi_6) : \left|\hat{\Phi}_{kj}(\xi)\right| \le \frac{c_{kj}}{|\xi|^2}$$

$$3) \quad \forall \xi = (\xi_1,...,\xi_6) : A(i\xi)\hat{\Phi}(\xi) = I$$

حيث δ_{ij} رمز كرونيكر (وهو يساوي الواحد عندما $i = j$ ، ويساوي الصفر عندما $i \ne j$) ، $\delta(x)$ دالة ديراك ، $\hat{\Phi}_{kj}$ تحويل فورييه للمصفوفة الأساسية Φ_{kj} و I المصفوفة الواحدية من المرتبة السادسة .

تكتب المسألة الخارجية الأساسية الأولى لنظرية الإجهاد المزدوج للمرونة الرياضية ، في الحالة الساكنة ، ومن أجل الأوساط المرنة المتجانسة والمتساوية الخواص بالشكل الآتي :

لتكن Ω^- منطقة محدودة من R^3 ، والمطلوب إيجاد المتجه U في المنطقة Ω^- ، الذي يحقق الشروط الآتية :

$$\forall x \in \Omega^- \quad : \quad A(\partial_x)U(x) = 0 \qquad (3)_0$$

$$\forall z \in \partial\Omega \quad : \quad U\big|_{\partial\Omega}(z) = \varphi(z) \qquad (4)_\varphi$$

$$\forall x \in \Omega^{-} \quad : \quad |U(x)| \leq \frac{c}{|x|^{p}} \qquad (5)$$

حيث $\varphi : \partial\Omega \to R^{6}$ متجه معلوم و p عدد صحيح غير سالب .

تسمى هذه المسألة بالمسألة $\{(3)_0, (4)_\phi, (5)\}$ أو اختصاراً المسألة I . بينما تسمى المسألة $\{(3)_0, (4)_0, (5)\}$ بالمسألة المتجانسة للمسألة I .

درست هذه المسألة في $[4]$ ، وذلك اعتمادا على علاقة غرين :

$$\int_{\Omega} \left[V_i(x) A_{ik}(\partial_x) U_k(x) - U_k(x) A_{ki}(\partial_x) V_i(x) \right] dx =$$

$$= \int_{\partial\Omega} \left[V_i(y) T_{ik}(\partial_y, \vartheta(y)) U_k(y) - U_k(y) T_{ki}(\partial_y, \vartheta(y)) V_i(y) \right] d_y S$$

و على علاقة شكل الحل :

$$U_j(x) = \int_{\partial\Omega} \left[U_i(y) T_{ik}(\partial_y, \vartheta(y)) \Phi_{kj}(y - x) - \Phi_{kj}(y - x) T_{ki}(\partial_y, \vartheta(y)) U_i(y) \right] d_y S$$

حيث : $T(\partial_y, \vartheta) \equiv \left[T_{ik}(\partial_y, \vartheta) \right]_{(6)}$ مؤثر الإجهاد الحَّدي المعرَّف على $\partial\Omega$ بالعلاقات :

$$T_{ik}(\partial_y, \vartheta) = C_{jilk} \vartheta_j \frac{\partial}{\partial y_l}$$

$$T_{i,k+3}(\partial_y, \vartheta) \equiv -C_{jilm} \vartheta_j \varepsilon_{klm}$$

$$T_{i+3,k}(\partial_y, \vartheta) = 0$$

$$T_{i+3,k+3}(\partial_y, \vartheta) = C'_{jilk} \vartheta_j \frac{\partial}{\partial y_l} \quad ; \quad i,k = 1,2,3$$

حيث $\vartheta = (\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3)$ ناظم السطح $\partial\Omega$ في النقطة y وهو خارجي بالنسبة لـ Ω^{-} ، dx عنصر الحجم ، $d_y S$ عنصر المساحة للسطح $\partial\Omega$.

وأيضاً عندما يحقق الحل U الشرط الآتي :

$$\lim_{|x| \to \infty} \frac{U(x)}{|x|^{p+1}} = 0 \qquad ; \; p \in Z^{+} \; , |x| \to \infty$$

هدف البحث :

سندرس في هذا البحث وحدانية حل المسألة الخارجية الأساسية الأولى لجملة معادلات الاجهاد المزدوج للمرونة في الحالة الساكنة ومن أجل الأوساط المرنة المتجانسة والمتساوية الخواص ، وذلك اعتماداً على طريقة جديدة تستند إلى محدودية تكامل ديرخليه .

المناقشة والنتائج :

بفرض U حل منتظم للجملة (1) في Ω^- ، ويوجد عدد غير سالب p ؛ بحيث يكون :

$$D_{m,n}^{(p)}(U,\Omega^-) < \infty \qquad (6)$$

ملاحظة : إذا اعتبرنا أنَّ : $\Omega^- = R^m \setminus B(o,r_0)$ ؛ وإذا كان $r_0 > 1$ فهذا لايؤثر على عمومية المسألة .

لنبين على أنَّه من (6) يمكن إيجاد عدد غير سالب مثل q ؛ بحيث يكون :

$$|U(x)| \le \frac{c}{|x|^q}$$

في جوار النقطة $|x| = \infty$ ، وإذا كان هذا الأمر محققاً فإنَّ U سيحقق شرط الانحلال :

$$\lim_{|x|\to\infty} \frac{U(x)}{|x|^{p+1}} = 0 \qquad ; \ p \in Z^+ \ , |x| \to \infty$$

إنَّ تحقيق الهدف الأساس لهذا البحث يتم من خلال إثبات المبرهنة الآتية :

مبرهنة : إذا كان U حلاً منتظماً للجملة (1) في Ω^- ، وإذا وجد مثل العدد غير السالب p ؛ بحيث $D_{m,n}^{(p)}(U,\Omega^-) < \infty$. فإنَّ U يأخذ الشكل :

$$U_s(x) = U_s^{(0)}(x) + \sum_{|\alpha| \le q} c_{s\alpha} x^\alpha$$

وذلك من أجل $q = 0$

إذا كان $p \le m$ و $q = \frac{p-m}{2} + 1$

أو إذا كان $p > m$ و $\frac{p-m}{2}$ ليس عدداً صحيحاً و $q = \frac{p-m}{2}$

أو إذا كان $p > m$ و $\frac{p-m}{2}$ عدداً صحيحاً

الإثبات : لنأخذ الإحداثيات الكروية في R^m $[5]$ $x = (r,\sigma)$ ؛ حيث $r = |x|$ و $\sigma = \frac{x}{|x|}$.

عندئذٍ :

$$U_i(r,\sigma) = U_i(r_0,\sigma) + \int_{r_0}^{r} \frac{\partial U_i(\rho,\sigma)}{\partial \rho} d\rho \tag{7}$$

وحسب متراجحة كوشي – بونياكوفسكي لدينا :

$$J_i(r) \equiv \int_{\partial B(0;1)} \int_{r_0}^{r} \left| \frac{\partial U_i(\rho,\sigma)}{\partial \rho} \right| d\rho d\sigma \le$$

$$\le \left(\int_{\partial B(0,1)} \int_{r_0}^{r} \rho^{m-p-1} \left| \frac{\partial U_i(\rho,\sigma)}{\partial \rho} \right|^2 d\rho d\sigma \right)^{\frac{1}{2}} .$$

$$. \left(\int_{\partial B(0,1)} \int_{r_0}^{r} \rho^{p-m+1} d\rho d\sigma \right)^{\frac{1}{2}}$$

وبالتالي إذا كان : $p \ne m-2$ ، فإنَّنا نحصل على :

$$J_i(r) \le \left(\frac{w_m r^{p-m+2}}{p-m+2} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\partial w(0,1)} \int_{r_0}^{r} \rho^{m-p-1} \left| \frac{\partial U_i(\rho,\sigma)}{\partial \rho} \right|^2 d\rho d\sigma \right)^{\frac{1}{2}}$$

وإذا كان : $p = m-2$ ، فإنَّ :

$$J_i(r) < \left(\frac{B_m r^{\varepsilon}}{\varepsilon} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\partial B(0,1)} \int_{r_0}^{r} \rho^{m-p-1} \left| \frac{\partial U_i(\rho,\sigma)}{\partial \rho} \right|^2 d\rho d\sigma \right)^{\frac{1}{2}}$$

حيث ε عدد موجب اختياري و B_m مساحة سطح الكرة $\partial B(0,1)$ في الفضاء R^m

الآن إذا أخذنا بعين الاعتبار أنَّ :

$$\rho^{m-1} d\sigma\, d\rho = dz \quad , \quad z = (\rho,\sigma)$$

و

$$\left|\frac{\partial U_i(\rho,\sigma)}{\partial \rho}\right|^2 = \left|\sum_{k=1}^{m} \frac{\partial U_i(\rho,\sigma)}{\partial z_k}\frac{\partial z_k}{\partial \rho}\right|^2 \le$$

$$\le \sum_{k=1}^{m}\left|\frac{\partial U_i(\rho,\sigma)}{\partial z_k}\right|^2 \sum_{j=1}^{m}\left(\frac{z_j}{\rho}\right)^2 = \sum_{k=1}^{m}\left|\frac{\partial U_i(\rho,\sigma)}{\partial z_k}\right|^2$$

فإنَّنا نحصل على تقدير (تقييم) J_i :

$$J_i(r) \le \left(\frac{B_m r^{p-m+2}}{p-m+2}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=1}^{m} \int_{B(0,r)\setminus B(0,r_0)} \frac{1}{|z|^p}\left|\frac{\partial U_i(z)}{\partial z_k}\right|^2 dz\right)^{\frac{1}{2}} \qquad (8)$$

وذلك عندما $p \neq m-2$ و

$$J_i(r) \le \left(\frac{B_m r^{\varepsilon}}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=1}^{m} \int_{B(0,r)\setminus B(0,r_0)} \frac{1}{|z|^p}\left|\frac{\partial U_i(z)}{\partial z_k}\right|^2 dz\right)^{\frac{1}{2}} \qquad (9)$$

عندما $p = m-2$.

من (7) و (9) ينتج أنَّ :

$$\int_{\partial B(0,1)} |U_i(r,\sigma)|\, d\sigma \le \int_{\partial B(0,1)} |U_i(r_0,\sigma)|\, d\sigma + J_i(r)$$

بضرب هذه المساواة بـ $\left(r = |x|\right)$ r^{m-1} وبمكاملتها من $\frac{r_1}{4}$ إلى r_1 ؛

حيث r_1 عدد اختياري يحقق الشرط $r_1 > 4r_0$.

ولو أخذنا بالحسبان :

$$\left(B(0,r)\setminus B(0,r_0)\right) \subset \left(B(0,r_1)\setminus B(0,r_0)\right)$$

عندئذٍ تكون العلاقة الآتية صحيحة في مجال تغير r :

$$\int_{B(0,r_1)\backslash B(0,\frac{r_1}{4})} |U_i(x)|dx \le \frac{r_1^m - \left(\frac{r_1}{4}\right)^m}{m} \int_{\partial B(0,1)} |U_i(r_0,\sigma)| d\sigma +$$

$$+\left(\frac{B_m}{p-m+2}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{2}{p+m+2}\left(r_1^{\frac{(p+m+2)}{2}} - \left(\frac{r_1}{4}\right)^{\frac{(p+m+2)}{2}}\right). \qquad (10)$$

$$\cdot\left(\sum_{k=1}^{m} \int_{B(0,r_1)\backslash B(0,r_0)} \frac{1}{|z|^p} \left|\frac{\partial U_i(z)}{\partial z_k}\right|^2 dz\right)^{\frac{1}{2}} \le$$

$$\le c_{m,n} r_1^m + c_{p,m} r_1^{\frac{(p+m+2)}{2}} D_{m,n}^{(p)}(u,\Omega)$$

عندما $p \ne m-2$ و

$$\int_{B(0,r_1)\backslash B(0,\frac{r_1}{4})} |U_i(x)|dx \le c_{m,n} r_1^m + c_{\varepsilon,m} r_1^{\frac{\varepsilon}{2}+m} D_{m,n}^{(p)}(U,\Omega) \qquad (11)$$

عندما $p = m-2$.

لنفرض $q_0 = m+1$ ، إذا كان $p \le m-2$ و $q_0 = \frac{(p+m+2)}{2} + 1$

إذا كان $p > m-2$.

عندئذٍ ينتج من (6) و (10) و (11) أنَّ :

$$\lim_{r_1 \to \infty} \frac{1}{r_1^{q_0}} \int_{B(0,r_1)\backslash B(0,\frac{r_1}{4})} |U_i(x)|dx = 0 \qquad (12)$$

الآن وبأخذ بعين الاعتبار التمهيدية (1) نستنتج أنه من أجل U تتحقق العلاقة (2) التي يمكن كتابتها بالشكل :

$$U_s(x) = U_s^{(0)}(x) + \sum_{|\alpha| \le q} c_{s\alpha} x^\alpha \qquad (13)$$

حيث :

$$\left|\partial^\beta U_s^{(0)}(x)\right| \le c\,|x|^{2-m-|\beta|} \qquad (14)$$

β – معامل اختياري , و $q = q_0 - m - 1$.

لندقق قيمة q في العلاقة (13) :

سوف لن نستعمل المساواة $q = q_0 - m - 1$ وإنَّما سنفترض أنَّ U يكتب بالشكل (13) من أجل أي قيمة لـ q , ولنثبت تحقق هذه العلاقة من اجل : $q = 0$ ، إذا كان :

$p \le m$ ، و $q = \left[\dfrac{p-m}{2}\right] + 1$

إذا كان : $p > m$ و $\dfrac{p-m}{2}$ ليس عدداً صحيحاً ،

و $q = \dfrac{p-m}{2}$ ، إذا كان : $p > m$ و $\dfrac{p-m}{2}$ عدد صحيح .

العلاقة (13) وكما في[4] تكتب بالشكل :

$$U_s(x) = U_s^{(0)}(x) + \sum_{k=0}^{q} P_S^{(K)}(x) \qquad (15)$$

حيث $p_s^{(k)}$ كثيرة حدود متجانسة من الدرجة k .

إلى هنا وحسب (14) نحصل على :

$$\sum_{s,j=1}^{n,m} \left(\frac{\partial U_s(x)}{\partial x_j} \right)^2 = \sum_{k=0}^{2(q-1)} Q^{(k)}(x) + Q_0(x)$$

حيث $Q^{(k)}$ كثيرة حدود متجانسة من الدرجة k و Q_0 تحقق المتراجحة :

$$|Q_0(x)| \le c|x|^{q-m} \qquad (16)$$

ومن ثمَّ ، نجد أنَّ :

$$Q^{2(q-1)}(x) = \sum_{s,j=1}^{n,m} \left(\frac{\partial p_s^{(q)}(x)}{\partial x_j} \right)^2 \qquad (17)$$

وبالتالي :

$$D_{m,n}^{(p)}(U,\Omega) = \sum_{k=0}^{2(q-1)} c_k J^{(k)} + J$$

حيث :

$$J^{(k)} = \int_{r_0}^{\infty} \rho^{k+m-p-1} d\rho$$

$$J = \int_{R^m \setminus B(0,r_0)} \frac{Q_0(x)}{|x|^p} dx$$

$$c_k = \int_{\partial B(0,1)} Q^{(k)}(\sigma) d\sigma$$

نميز هنا حالتين : $c_{2(q-1)} = 0$ ، أو : $c_{2(q-1)} \neq 0$

إذا كان : $c_{2(q-1)} = 0$ ، فإنَّ :

$$0 = \int_{\partial B(0,1)} Q^{2(q-1)}(\sigma) d\sigma = \sum_{s,j=1}^{n,m} \int_{\partial B(0,1)} \left(\frac{\partial p_s^{(q)}(\sigma)}{\partial x_j} \right)^2 d\sigma$$

وبالآتي :

$$\forall x \in R^m : Q^{2(q-1)}(x) = |x|^{2(q-1)} Q^{2(q-1)}(\sigma) = 0$$

من هنا باستخدام العلاقة (17) ينتج أنَّ $P_s(x)$ ثابت و U يحقق العلاقة (15) ولأجله يؤول المجموع الثاني إلى ثابت .

إذا كان : $c_{2(q-1)} \neq 0$ ، فإنه وحسب (16) ، نحصل على التقدير الآتي :

$$|J| \leq c \int_{R^m \setminus B(0,r_0)} |x|^{q-m-p} dx = cB_m \int_{r_0}^{\infty} \rho^{q-p-1} d\rho$$

بما أنَّ : $2(q-1) + m - p - 1 > q - p - 1$. فإنَّه ولأجل تقارب $D_{m,n}^{(p)}(U,\Omega)$ ، يلزم تقارب التكامل $J^{2(q-1)}$.

أي يجب أنْ يكون : $2(q-1) + m - p - 1 < -1$ أو $q < \frac{m+p}{2} + 1$.

بهذا الشكل يكون إثبات المبرهنة قد تمَّ .

المراجع العلمية

1 . Martin H . Sadd .,2009 – Elasticity (Theory , Applications) , Kingston , Rhode Island , 535 p

2 . Kobradze . B ., Gegelia . T ., Bashelshvele . M ., 1976 – Three Dimensional Problems of the Mathematical Theory of Elasticity and thermoelasticity , Mockow , 928 p .

3 . Boshokore . T. , Gegelia . T. , 1993 – On the uniqueness theorems for the external problems of the couple-stress theory of Elasticity . Georgian academy of sciences No 2 ,143-157 .

4 . Edrees . G., 2013 - Studying a Boundary problem in couple-stress theory of Elasticity near point at infinity . AL Baath Gornal- v 24 . N 7.

5. C . Canuto , A. Tabacco., 2010 – Mathematical Analysis II , Springer .