تعميم الحلقات النظيفة

إيمان الخوجة[1] حمزة حاكمي[2] مريم حاكمي[3]

الملخص

يعد W. K. Nicholson أول من درس مسألة انتقال العناصر الجامدة ومن خلال هذه الدراسة أدخل مفهوم العنصر النظيف وهو العنصر الذي يمكن كتابته على شكل مجموع لعنصرين أحدهما قابل للقلب والآخر جامد. وبعد ذلك أدخل W. Chen مفهوم الحلقة النظيفة وهي الحلقة التي جميع عناصرها نظيفة.

في هذه الورقة البحثية درسنا مفهوم الحلقة شبه النظيفة وهي الحلقة التي كل عنصر فيها هو مجموع لعنصرين أحدهما قابل للقلب جزئياً والآخر جامد كتعميم للحلقة النظيفة والمحلية بآن واحد. حيث أثبتنا أن الحلقة تكون محلية عندما وفقط عندما تكون شبه نظيفة وعناصرها الجامدة هي $0,1$ فقط. فضلاً عن ذلك, أثبتنا أن الحلقة شبه النظيفة تكون نظيفة (f −نظيفة, r −نظيفة) عندما وفقط عندما عناصرها الجامدة هي $0,1$ فقط. وقد أثبتنا أيضاً أنه في أي حلقة فإن عناصر أساس جاكبسون لهذه الحلقة هي عناصر شبه نظيفة. وقد أثبتنا أيضاً أنه في أي حلقة R فإن الشرط اللازم والكافي كي يكون العنصر $x \in R$ شبه نظيف هو أن يكون العنصر $1-x$ شبه نظيف. فضلاً عن ذلك أثبتنا أنه إذا كانت $R \neq 0$ حلقة عناصرها الجامدة هي $0,1$ فقط فإن الشرط اللازم والكافي كي تكون الحلقة R شبه نظيفة هو أن يتحقق الشرط, أياً كان $x \in R$ فإنه إما x أو $1-x$ قابل للقلب جزئياً في R.

الكلمات المفتاحية. الحلقة النظيفة, الحلقة شبه النظيفة، الحلقة r −النظيفة, الحلقة f −النظيفة, الحلقة المحلية, الحلقة المنتظمة, الحلقة المحلية جزئياً.

رقم التصنيف العالمي للعام 2020: 16U99, 16E50, 16D80, 16D40.

[1] أستاذ مساعد قسم الرياضيات كلية العلوم جامعة البعث.

[2] أستاذ قسم الرياضيات كلية العلوم جامعة دمشق.

[3] طالب دراسات عليا فسم الرياضيات كلية العلوم جامعة البعث.

A Generalization of Clean Rings

Eaman Al-Khouja[1] **Hamza Hakmi**[2] **Maryam Hakmi**[3]

Abstract

In the first who studies the problem of lifting idempotent elements through this study, the concept of the clean element entered, that is the element which can be written as a sum of two elements one of them is a unite and the other is idempotent.

After that Chen enters the concept of the clean ring which is its all elements are cleans. In this paper we study the concept of quasi-clean ring which is the ring every element of in it is a sum of two elements one of them is invertible and the other is idempotent. This concept is considered a generalization of local and clean rings in the same time. We proved that the ring is local if and only if quasi-clean and its idempotent elements only $0,1$.

In addition to that, we proved the quasi-clean is clean if and only if its idempotent elements are $0,1$ only. Also, we proved that in any ring the elements of radical Jacobson of this ring are quasi-clean.

Furthermore, we proved that in every ring R the necessary and sufficient condition in order to be the element $x \in R$ is quasi-clean that the element $1-x$ is quasi-clean. Finally, we proved that if $R \neq 0$ is a ring which is idempotent elements are $0,1$ only, then the necessary and sufficient condition in order to be the R is quasi-clean that satisfies the condition for every element $x \in R$ either x or $1-x$ is invertible in R.

Key Words: Clean ring, quasi-clean ring, $r-$clean ring, $f-$clean ring, local ring, partially local ring.

2020 **Mathematical Subject Classification:** 16U99,16E50,16D80,16D40.

[1] Professor, Department of Mathematics Al-Baath University.
[2] Professor, Department of Mathematics Damascus University.
[3] Department of Mathematics Al-Baath University.

المقـــــدمـــــة.

لتكن R حلقة و A مثالياً في R ولنأخذ حلقة الخارج R/A ولنفرض أن $\pi : R \to R/A$ التشاكل القانوني الغامر. إذا كان $\bar{a} \in R/A$ عنصراً جامداً فإنه ليس بالضرورة أن يكون العنصر $a \in R$ جامداً. إن مسألة متى يكون العنصر a جامداً سميت مسألة انتقال العناصر الجامدة.

يعد W. K. Nicholson أول من درس مسألة انتقال العناصر الجامدة وذلك عام 1977 في[10] وفي هذه الدراسة أدخل مفهوم العنصر النظيف وهو العنصر الذي يمكن كتابته على شكل مجموع لعنصرين أحدهما قابل للقلب والآخر جامد.

بعد ذلك أدخل W. Chen مفهوم الحلقة النظيفة وهي الحلقة التي جميع عنصرها نظيفة وذلك عام 2008 في[3], وأثبت حينها أن الحلقة النظيفة تكون محلية عندما وفقط عندما عناصرها الجامدة هي $0,1$ فقط. وفي عام 2010 درس B. Li مفهوم العناصر $f-$النظيفة في [9], وأدخل مفهوم الحلقة $f-$النظيفة وهي الحلقة التي كل عنصر فيها يكتب على شكل مجموع لعنصرين أحدهما كامل والآخر جامد, وقد أثبت أن الحلقة $f-$النظيفة تكون محلية عندما وفقط عندما عناصرها الجامدة هي $0,1$ فقط.

وفي عام 2013 أدخل N. Ashrafi مفهوم الحلقة $r-$النظيفة في [2], وهي الحلقة التي كل عنصر فيها يكتب على شكل مجموع لعنصرين أحدهما منتظم والآخر جامد, وقد أثبت حينها أن الحلقة $r-$النظيفة تكون محلية عندما وفقط عندما عناصرها الجامدة هي $0,1$ فقط.

في هذه الورقة البحثية درسنا مفهوم الحلقة شبه النظيفة وهي الحلقة التي كل عنصر فيها هو مجموع لعنصرين أحدهما قابل للقلب جزئياً والآخر جامد. وقد تبين لنا أن الحلقة شبه النظيفة تكون محلية عندما وفقط عندما عناصرها الجامدة هي $0,1$ فقط. فضلاً عن ذلك, أثبتنا أن الحلقة شبه النظيفة تكون نظيفة ($f-$نظيفة, $r-$نظيفة) عندما وفقط عندما عناصرها الجامدة هي $0,1$ فقط. وقد أثبتنا أيضاً أنه في أي حلقة فإن عناصر أساس جاكبسون لهذه الحلقة هي عناصر شبه نظيفة.

الهـــدف مــن البحــــــث.

نظـراً لوجـود العديـد مـن الحلقـات القريبـة مـن الحلقـات النظيفـة والمحليـة مثـل الحلقات النظيفة الضعيفة والنظيفة القوية و $n-$النظيفة و $I-$نظيفة وغيرها الكثير فقد انصب اهتمامنا في البحث على إيجاد صف من الحلقات يعد تعميماً لجميع تلك الأنواع ويتطابق معها في بعض الحالات الخاصة, وقد استطعنا إيجاد ذلك النوع من الحلقات والذي دعوناه الحلقات شبه النظيفة.

1 – الــدراســــة المــرجعيــــة.

جميع الحلقات R التي سندرسها هي حلقات واحدية فيها $0 \neq 1$.

$1-1$. نسمي تقاطع جميع المثاليات اليسارية (اليمينية) الأعظمية في الحلقة R بأساس جاكبسون للحلقة R ونرمز له $J(R)$, [1].

$1-2$. لتكن R حلقة. نقول عن العنصر المغاير للصفر $a \in R$ إنه قابل للقلب جزئياً أو قلوب جزئياً في R إذا وجد عنصر مغاير للصفر $b \in R$ بحيث إن $b = bab$, [6].

$1-3$. نقول عن الحلقة R إنها شبه جامدة إذا كان كل عنصر $a \in R$, $a \notin J(R)$ هو عنصر قابل للقلب جزئياً, [5].

$1-4$. نقول عن الحلقة R إنها حلقة محلية جزئياً إذا كان لأجل كل عنصر $a \in R$ إما a أو $1-a$ هو عنصر قابل للقلب جزئياً في R .

$1-5$. لتكن R حلقة. نقول عن العنصر المغاير للصفر $e \in R$ إنه جامد إذا كان $e^2 = e$, [7].

$1-6$. لتكن R حلقة. نقول عن العنصر $a \in R$ إنه منتظم إذا وجد $b \in R$ يحقق $a = aba$. ونقول عن الحلقة R إنها منتظمة إذا كانت جميع عنصرها منتظمة, [4].

$1-7$. لتكن R حلقة. نقول عن العنصر $x \in R$ إنه نظيف إذا أمكن كتابته على الشكل $x = a + e$ حيث $a \in R$ عنصر قابل للقلب وأن $e \in R$ عنصر جامد. ونقول عن الحلقة R إنها نظيفة إذا كان كل عنصر فيها هو عنصر نظيف, [11].

$1-8$. لتكن R حلقة. نقول عن العنصر $x \in R$ إنه $r-$نظيف إذا أمكن كتابته على

الشكل $x=a+e$ حيث $a\in R$ عنصر منتظم وأن $e\in R$ عنصر جامد. ونقول عن الحلقة R إنها $r-$نظيفة إذا كان كل عنصر فيها هو عنصر $r-$نظيف, [2].

1-9. لتكن R حلقة. نقول عن العنصر $a\in R$ إنه كامل إذا وجد $s,t\in R$ بحيث إن $sat=1$. ونقول عن العنصر $x\in R$ إنه $f-$نظيف إذا أمكن كتابته على الشكل $x=a+e$ حيث $a\in R$ عنصر كامل و $e\in R$ عنصر جامد, [5]. ونقول عن الحلقة R إنها $f-$نظيفة إذا كانت جميع عناصرها $f-$نظيفة, [5].

1-10. لتكن R حلقة. نقول عن العنصر $x\in R$ إنه شبه نظيف إذا أمكن كتابته على الشكل $x=a+e$ حيث $a\in R$ عنصر قابل للقلب جزئياً وأن $e\in R$ عنصر جامد. ونقول عن الحلقة R إنها شبه نظيفة إذا كان كل عنصر فيها هو عنصر شبه نظيف.

1-11. لتكن R حلقة. نقول عن الحلقة R إنها حلقة محلية جزئياً إذا كان لأجل كل عنصر $a\in R$ إما a قابل للقلب جزئياً في R أو $1-a$ قابل للقلب جزئياً في R.

1-12. نقول عن الحلقة R إنها محلية إذا كان لأجل أي عنصر $x\in R$ إما x أو $1-x$ هو عنصر قابل للقلب في R, [8].

1-13. لتكن R حلقة. نقول عن العنصر الجامد $e\in R$ إنه مركزي إذا كان $ex=xe$, [7].

2 – الـدراسـة البحثيـة.

2-1. تمهيديـة

لأجل أي حلقة R القضايا الآتية صحيحة:

1 – كل من $1, -1$ هو عنصر قابل للقلب جزئياً في R.

2 – كل عنصر قابل للقلب من اليمين (اليسار) في R هو قابل للقلب جزئياً في R.

3 – كل عنصر قابل للقلب في R هو عنصر قابل للقلب جزئياً في R.

4 – كل عنصر جامد مغاير للصفر في R هو عنصر قابل للقلب جزئياً في R.

5 – كل عنصر منتظم مغاير للصفر في R هو عنصر قابل للقلب جزئياً في R.

6 – إذا كان $a\in R$ قابلاً للقلب جزئياً في R فإن $-a\in R$ قابل للقلب جزئياً في R.

7 – إذا كان $e\in R$ عنصراً جامداً فإن $2e-1\in R$ قابل للقلب جزئياً في R.

8 – كل عنصر كامل في R هو عنصر قابل للقلب جزئياً في R.

البرهـــــــان.

1 – واضح, لأن $1 = 1 \cdot 1 \cdot 1$ وأن $-1 = (-1)(-1)(-1)$.

2 – لنفرض أن $a \in R$ قابل للقلب من اليمين في R، عندئذ $a \neq 0$ وأنه يوجد $b \in R$ بحيث إن $ab = 1$ قابل للقلب جزئياً في R. وأن $b \neq 0$ ومنه $bab = b$، أي إن $a \in R$ قابل للقلب جزئياً في R.

إذا كان $a \in R$ قابل للقلب من اليسار في R، عندئذ $a \neq 0$ وأنه يوجد $d \in R$ بحيث إن $da = 1$ وأن $d \neq 0$ ومنه فإن $dad = d$، أي إن $a \in R$ قابل للقلب جزئياً في R.

3 – إذا كان $a \in R$ عنصر قابل للقلب في R فإن العنصر a قابل للقلب من اليمين في R وحسب (2) فإن a قابل للقلب جزئياً في R.

4 – ليكن $e \in R$ عنصراً جامداً مغايراً للصفر في R. لما كان $e \cdot e \cdot e = e$ نجد أن العنصر e قابل للقلب جزئياً في R.

5 – ليكن $a \in R$ عنصراً منتظماً مغايراً للصفر، عندئذ يوجد $b \in R$ بحيث $a = aba$ وأن $b \neq 0$. لنفرض أن $x = bab$ فنجد أن $x \in R$ وأن $x \neq 0$, لأنه إذا كان $x = 0$ نجد أن $ax = abab = ab = 0$ ومنه فإن $a = aba = 0a = 0$ وهذا غير ممكن.

فضلاً عن ذلك, إن:

$$xax = (bab)a(bab) = b(aba)bab =$$

$$= b(aba)b = bab = x$$

ومنه نجد أن العنصر a قابل للقلب جزئياً في R.

6 – لنفرض أن $a \in R$ قابل للقلب جزئياً في R، عندئذ $a \neq 0$ وأنه يوجد $b \in R$ بحيث إن $b \neq 0$ وأن $bab = b$, ولما كان $(-b)(-a)(-b) = -b$ وأن $-b \neq 0$ نجد أن $-a \in R$ قابل للقلب جزئياً في R.

7 – ليكن $e \in R$ عنصراً جامداً في R. عندئذ فإن $2e - 1 \in R$ وأن:

$$(2e-1)(2e-1) = 4e^2 - 2e - 2e + 1 = 4e - 4e + 1 = 1$$

ومنه فإن $2e - 1$ قابل للقلب في R وبحسب (3) يكون $2e - 1$ قابل للقلب جزئياً في R.

8 – لنفرض أن $a \in R$ هو عنصر كامل, عندئذ يوجد $s, t \in R$ بحيث $sat = 1$ ومنه

نجد أن $a \neq 0$. فضلاً عن ذلك, إن $(ts)a(ts) = ts$ وأن $ts \in R$ و $ts \neq 0$, لأنه إذا كان $ts = 0$ نجد أن $tsat = t = 0$ ومنه فإن $1 = sat = 0$ وهذا غير ممكن. ومنه فإن العنصر $a \in R$ هو عنصر قابل للقلب جزئياً في R.

تمهيديـــــة 2-2.

لأجل أي حلقة R القضايا الآتية صحيحة:

1 – كل من العناصر $0, 1, -1$ هو عنصر شبه نظيف في R.

2 – كل عنصر قابل للقلب من اليمين (اليسار) في R هو عنصر شبه نظيف في R.

3 – كل عنصر قابل للقلب في R هو عنصر شبه نظيف في R.

4 – كل عنصر نظيف في R هو عنصر شبه نظيف في R.

5 – كل عنصر قابل للقلب جزئياً في R هو عنصر شبه نظيف في R.

6 – كل عنصر منتظم مغاير للصفر في R هو عنصر شبه نظيف في R.

7 – كل عنصر $r-$نظيف في R هو عنصر شبه نظيف في R.

8 – كل عنصر كامل في R هو عنصر شبه نظيف في R.

9 – كل عنصر $f-$نظيف في R هو عنصر شبه نظيف في R.

10 – كل عنصر جامد في R هو عنصر شبه نظيف في R.

11 – إذا كان $e \in R$ عنصر جامد, عندئذ فإن العنصر $2e-1 \in R$ هو عنصر شبه نظيف في R.

12 – كل عنصر عديم القوى في R هو عنصر شبه نظيف في R.

البرهـــــان.

1 – لما كان كل من $1, -1$ هو عنصر قابل للقلب جزئياً في R, لأن:

$$1 = 1 \cdot 1 \cdot 1 \text{ و } -1 = (-1)\cdot(-1)\cdot(-1)$$

فإن كلاً من $1, -1$ هو عنصر شبه نظيف في R, لأن $0 + 1 == 1,\ -1 = -1 + 0$.

فضلاً عن ذلك, لما كان $-1+1 = 0$ وأن -1 قابل للقلب جزئياً في R فإن 0 هو شبه نظيف في R.

2 – لنفرض أن العنصر $a \in R$ قابل للقلب من اليمين في R , عندئذ $a \neq 0$ وأنه يوجد $b \in R$ بحيث $ab = 1$ وأن $b \neq 0$ ومنه فإن $b = bab$, أي إن العنصر a قابل للقلب جزئياً في R ولما كان $a = a + 0$ نجد أن العنصر a شبه نظيف في R . بشكل مشابه يمكننا إثبات أنه إذا كان a قابلاً للقلب من اليسار في R فإن a شبه نظيف في R .

3 – ليكن $a \in R$ قابلاً للقلب في R , عندئذ فإن العنصر a قابل للقلب من اليمين في R وبحسب (2) يكون العنصر a شبه نظيف في R .

4 – ليكن $x \in R$ عنصر نظيف في R , عندئذ $x = a + e$ حيث $a \in R$ قابل للقلب في R وأن $e \in R$ عنصر جامد ولما كان العنصر a قابلاً للقلب جزئياً في R وذلك بحسب التمهيدية (2−1) نجد أن العنصر x شبه نظيف في R .

5 – ليكن $a \in R$ عنصراً قابلاً للقلب جزئياً في R , لما كان $a = a + 0$ نجد أن a شبه نظيف في R .

6 – ليكن $a \in R$ عنصراً منتظماً مغايراً للصفر في R , عندئذ يوجد $b \in R$ بحيث إن $b \neq 0$ وأن $a = aba$. لنضع $x = bab$ فنجد أن $x \in R$ وأن $x \neq 0$, لأنه إذا كان $x = 0$ نجد أن $ax = abab = ab = 0$ ومنه $a = aba = 0a = 0$ وهذا غير ممكن. فضلاً عن ذلك, إن:

$$xax = (bab)a(bab) = b(aba)(bab) = b(aba)b = bab = x$$

وهذا يبين أن a قابل للقلب جزئياً في R وبحسب (5) يكون a شبه نظيف في R .

7 – ليكن $x \in R$ عنصراً $r-$نظيفاً في R , عندئذ فإن $x = a + e$ حيث $a \in R$ عنصر منتظم في R وأن $e \in R$ عنصر جامد ولما كان العنصر a منتظماً في R فإنه حسب (6) يكون العنصر a قابلاً للقلب جزئياً في R ومنه فإن x شبه نظيف في R .

8 – ليكن $a \in R$ عنصراً كاملاً في R , عندئذ يوجد $s, t \in R$ بحيث $sat = 1$ وهذا يبين أن $a \neq 0$. فضلاً عن ذلك, إن $(ts)a(ts) = ts$ حيث $ts \in R$ وأن $ts \neq 0$, لأنه إذا كان $ts = 0$ نجد أن $(ts)at = t = 0$ وهذا يبين أن $1 = sat = 0$ وهذا غير ممكن. ومنه فإن $ts \neq 0$ وهكذا نجد أن العنصر a قابل للقلب جزئياً في R وبحسب (5) يكون a شبه نظيف في R .

9 – ليكن $x \in R$ عنصراً f –نظيفاً في R , عندئذ $x = a + e$ حيث $a \in R$ عنصر كامل في R وأن $e \in R$ عنصر جامد ولما كان العنصر a كاملاً في R فإنه حسب (8) يكون العنصر a قابلاً للقلب جزئياً في R ومنه فإن العنصر x شبه نظيف في R .

10 – لدينا حسب التمهيدية(2−1) أن كل عنصر جامد هو عنصر قابل للقلب جزئياً في R وحسب (5) يكون كل عنصر جامد في R هو عنصر قابل للقلب جزئياً في R .

11 – ليكن $e \in R$ عنصراً جامداً, عندئذ فإن $2e - 1 \in R$ قابل للقلب في R , لأن:

$$(2e-1)(2e-1) = 4e^2 - 4e + 1 = 4e - 4e + 1 = 1$$

وبحسب (3) يكون العنصر $2e - 1 \in R$ شبه نظيف في R .

12 – ليكن $a \in R$ عنصراً عديم القوى في R , عندئذ فإن $a \neq 0$ وأنه يوجد عدد صحيح موجب n بحيث $a^n = 0$ وأن:

$$(a-1)(-1-a-a^2-\cdots-a^{n-1}) = -a^n + 1 = 1$$

لنضع $b = -1 - a - a^2 - \cdots - a^{n-1} \in R$ فنجد $(a-1)b = 1$ وأن $b(a-1)b = b$ كما أن $b \neq 0$ وهذا يبين أن العنصر $a - 1 \in R$ قابل للقلب جزئياً في R ولما كان $a = (a-1) + 1$ نجد أن العنصر a شبه نظيف في R .

اعتماداً على التمهيدية (2−2) يمكننا صياغة المبرهنة الآتية:

مبرهنـــــة 2−3.

القضايا الآتية صحيحة:

1 – كل حقل هو حلقة شبه نظيفة.

2 – كل حلقة نظيفة هي حلقة شبه نظيفة.

3 – كل حلقة منتظمة هي حلقة شبه نظيفة.

4 – كل حلقة r –نظيفة هي حلقة شبه نظيفة.

5 – كل حلقة f –نظيفة هي حلقة شبه نظيفة.

6 – كل حلقة شبه جامدة R لأجلها $J(R) = 0$ هي حلقة شبه نظيفة.

أمثلـــــة.

1 – لأجل أي عدد أولي p فإن الحلقة Z_p بالنسبة لعمليتي الجمع والضرب بالمقاس p هي حلقة شبه نظيفة.

2 – الحلقة $Z_4 = \{ 0, 1, 2, 3 \}$ بالنسبة لعمليتي الجمع والضرب بالمقاس 4 هي حلقة شبه نظيفة، لأن:

– العناصر القابلة للقلب في Z_4 هي $1, 3$ وهي عناصر شبه نظيفة.

– العناصر الجامدة في الحلقة Z_4 هي $0, 1$ وهي عناصر شبه نظيفة.

وأن $1+1=2$ عنصر شبه نظيف ومنه نجد أن الحلقة Z_4 شبه نظيفة.

3 – الحلقة $Z_6 = \{ 0, 1, 2, 3, 4, 5 \}$ بالنسبة لعمليتي الجمع والضرب بالمقاس 6 هي حلقة شبه نظيفة، لأن:

– العناصر القابلة للقلب في Z_6 هي $1, 5$ وهي عناصر شبه نظيفة في Z_6.

– العناصر الجامدة في Z_6 هي $0, 1, 3, 4$ وهي عناصر شبه نظيفة في Z_6.

فضلاً عن ذلك, نلاحظ أن $1+1=2$ وهو عنصر شبه نظيف. وهذا يبين أن الحلقة Z_6 هي حلقة شبه نظيفة.

4 – الحلقة $Z_9 = \{ 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 \}$ بالنسبة لعمليتي الجمع والضرب بالمقاس 9 هي حلقة شبه نظيفة، لأن:

– العناصر القابلة للقلب في الحلقة Z_9 هي $1, 2, 4, 5, 7, 8$ وهي عناصر شبه نظيفة في الحلقة Z_9.

– العناصر الجامدة في Z_9 هي $0, 1$ وهي عناصر شبه نظيفة في Z_9. فضلاً عن ذلك, إن $1+5=6$, $1+2=3$ وهي عناصر شبه نظيفة في Z_9. وهذا يبين أن الحلقة Z_9 هي حلقة شبه نظيفة.

5 – الحلقة $Z_8 = \{ 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 \}$ بالنسبة لعمليتي الجمع والضرب بالمقاس 8 هي حلقة شبه نظيفة، لأن:

– العناصر القابلة للقلب في Z_8 هي $1, 3, 5, 7$ وهي عناصر شبه نظيفة في Z_8.

- العناصر الجامدة في Z_8 هي $0,1$ وهي عناصر شبه نظيفة في Z_8.
فضلاً عن ذلك, نلاحظ أن $6=5+1$, $4=3+1$, $2=1+1$ وهي عناصر شبه نظيفة. وهذا يبين أن الحلقة Z_8 هي حلقة شبه نظيفة.

تمهيديـــــة 2-4.

لتكن R حلقة شبه نظيفة. عندئذ القضيتان الآتيتان صحيحتان:
1 – لأجل أي مثالي $I \subseteq J(R)$ للحلقة R فإن حلقة الخارج R/I شبه نظيفة.
2 – لأجل أي عنصر جامد مركزي $e \in R$ فإن الحلقة eRe شبه نظيفة.

البرهـــــان.

1 – ليكن I مثالياً في الحلقة R وأن $I \subseteq J(R)$ وليكن $\bar{x} \in R/I$, عندئذ $\bar{x}=x+I$ حيث $x \in R$. سوف نميز حالتين:
- إذا كان $x \in I$, عندئذ $\bar{x}=x+I=I=(-1+I)+(1+I)$ وأن $1+I \in R/I$ عنصر جامد في الحلقة R/I وأن $-1+I \in R/I$ قابل للقلب جزئياً في R/I, لأن:

$$-1+I=(-1+I)(-1+I)(-1+I)$$

وهذا يبين أن العنصر $\bar{x}$ شبه نظيف في الحلقة R/I.
- لنفرض أن $x \notin I$, لما كانت الحلقة R شبه نظيفة فإن $x=a+e$ حيث $e \in R$ عنصر جامد و $a \in R$ قابل للقلب جزئياً في R ومنه يوجد $b \in R$ بحيث $b=bab$ وأن $b \neq 0$, ومنه فإن $b+I=(b+I)(a+I)(b+I)$ وأن $b+I \neq I$, لأنه إذا كان $b+I=I$ نجد أن $b \in I \subseteq J(R)$ وبالتالي يكون $ab \in J(R)$ عنصر جامد مغاير للصفر وهذا غير ممكن. ومنه العنصر $a+I \in R/I$ قابل للقلب جزئياً في R/I وأن:

$$\bar{x}=x+I=(a+e)+I=(a+I)+(e+I)$$

مما سبق نجد أن الحلقة R/I شبه نظيفة.
2 – ليكن $e \in R$ عنصراً جامداً مركزياً وليكن $x_0 \in eRe$, عندئذ فإن $x_0=exe$ حيث $x \in R$. لما كانت الحلقة R شبه نظيفة فإن $x=a+f$ حيث $f \in R$ عنصر جامد وأن $a \in R$ عنصر قابل للقلب جزئياً في R ومنه فإن:

$$x_0=exe=e(a+f)e=eae+efe$$

ولما كان $a \in R$ عنصراً قابلاً للقلب جزئياً في R فإنه يوجد $b \in R$ بحيث $b = bab$ وأن $b \neq 0$ ومنه نجد أن $ebe \in eRe$ وأن $ebe \neq 0$ ويحقق:

$$ebe = (ebe)(eae)(ebe)$$

وهذا يبين أن العنصر $eae \in eRe$ قابل للقلب جزئياً في eRe. فضلاً عن ذلك, لما كان $f \in R$ عنصراً جامداً فإن $efe \in eRe$ هو أيضاً عنصر جامد, لأن:

$$(efe)^2 = efefe = ef^2e = efe$$

مما سبق نجد أن $x_0 = eae + efe$ عنصر شبه نظيف وبالتالي eRe حلقة شبه نظيفة.

مبرهنـــــة 2-5.

لتكن R حلقة. عندئذ الشرطان الآتيان متكافئان:

1 - الحلقة R شبه نظيفة.

2 - أياً كان $x \in R$ فإن العنصر x يمكن كتابته على الشكل $x = a - e$ حيث $e \in R$ عنصر جامد وأن $a \in R$ عنصر قابل للقلب جزئياً في R.

البرهـــــان.

$(1) \Leftarrow (2)$. لنفرض أن الحلقة R شبه نظيفة وليكن $x \in R$, عندئذ فإن $-x \in R$ ولما كانت الحلقة R شبه نظيفة فإن $-x = a + e$ حيث $e \in R$ عنصر جامد وأن $a \in R$ عنصر قابل للقلب جزئياً في R.

لما كان العنصر $a \in R$ عنصراً قابلاً للقلب جزئياً في R فإنه يوجد $b \in R$ بحيث $b \neq 0$ وأن $b = bab$ ومنه فإن $-b = (-b)(-a)(-b)$ وأن $-b \in R$ و $-b \neq 0$ وهذا يبين أن العنصر $-a \in R$ قابل للقلب جزئياً في R وأن $x = -a - e$ حيث $e \in R$ عنصر جامد.

$(2) \Leftarrow (1)$. ليكن $x \in R$, عندئذ فإن $-x \in R$ وحسب الفرض فإن $-x = a - e$ حيث $e \in R$ عنصر جامد و $a \in R$ عنصر قابل للقلب جزئياً في R. ومنه فإن $x = -a + e$ ولما كان العنصر a قابل للقلب جزئياً في R فإنه يوجد $b \in R$ بحيث $b \neq 0$ وأن $b = bab$ ومنه فإن $-b = (-b)(-a)(-b)$ وأن $-b \in R$ و $-b \neq 0$ وهذا يبين أن العنصر $-a \in R$ قابل للقلب جزئياً في R وأن $e \in R$ عنصر جامد وبالتالي يكون العنصر x شبه نظيف. وهكذا نجد أن الحلقة R شبه نظيفة.

تمهيديـــــة 2-6.

لتكن R حلقة و $x \in R$. عندئذ الشرطان الآتيان متكافئان:

1 – العنصر x شبه نظيف.

2 – العنصر $1-x$ شبه نظيف.

البرهـــــان.

$(1) \Longrightarrow (2)$. لنفرض أن العنصر x شبه نظيف. عندئذ فإن $x = a + e$ حيث $e \in R$ عنصر جامد وإن $a \in R$ قابل للقلب جزئياً في R . ومنه فإن $1-x = -a + (1-e)$ وأن $1-e \in R$ عنصر جامد وإن $-a \in R$ عنصر قابل للقلب جزئياً في R ومنه نجد أن العنصر $1-x$ شبه نظيف.

$(2) \Longrightarrow (1)$. لنفرض أن العنصر $1-x$ شبه نظيف. عندئذ فإن $1-x = a + e$ حيث إن $e \in R$ عنصر جامد وإن $a \in R$ عنصر قابل للقلب جزئياً في R . ومنه فإن $x = -a + (1-e)$ وأن $1-e \in R$ عنصر جامد وأن $-a \in R$ قابل للقلب جزئياً في R ومنه نجد أن العنصر x شبه نظيف.

مبرهنـــــة 2-7.

لتكن $R \neq 0$ حلقة عناصرها الجامدة هي $0,1$ فقط. عندئذ الشرطان الآتيان متكافئان:

1 – الحلقة R شبه نظيفة.

2 – أياً كان $x \in R$ فإنه إما x أو $1-x$ قابل للقلب جزئياً في R .

البرهـــــان.

$(1) \Longrightarrow (2)$. لنفرض أن الحلقة R شبه نظيفة وليكن $x \in R$, عندئذ فإن $x = a + e$ حيث $e \in R$ عنصر جامد وأن $a \in R$ قابل للقلب جزئياً في R . سوف نميز حالتين:

– إذا كان $e = 0$, عندئذ $x = a$ عنصر قابل للقلب جزئياً في R .

– إذا كان $e = 1$, عندئذ $x = a + 1$ ومنه فإن $1-x = -a$ ولما كان a قابلاً للقلب جزئياً في R فإنه يوجد $b \in R$ بحيث $b \neq 0$ وأن $b = bab$ ومنه فإن:

$$-b = (-b)(-a)(-b)$$

وأن $-b \in R$ و $-b \neq 0$ وهذا يبين أن العنصر $-a \in R$ قابل للقلب جزئياً في R وبالتالي فإن العنصر $1-x$ قابل للقلب جزئياً في R.

$(2) \Leftarrow (1)$. ليكن $x \in R$, عندئذ حسب الفرض إما x أو $1-x$ قابل للقلب جزئياً في R.

– إذا كان العنصر x قابلاً للقلب جزئياً في R فإنه بحسب التمهيدية $(2-2)$ يكون العنصر x شبه نظيف.

– لنفرض أن العنصر $1-x$ قابل للقلب جزئياً في R, عندئذ يوجد $b \in R$ بحيث $b = b(1-x)b$ وأن $b \neq 0$ ومنه $-b = (-b)(x-1)(-b)$ وأن $-b \in R$ و $-b \neq 0$ وهذا يبين أن العنصر $x-1$ قابل للقلب جزئياً ولما كان $x = (x-1)+1$ نجد أن العنصر x شبه نظيف. مما سبق نجد أن الحلقة R شبه نظيفة.

مبرهنـــــة 2-8.

لتكن $R \neq 0$ حلقة عناصرها الجامدة هي $0, 1$ فقط. عندئذ الشرطان الآتيان متكافئان:

1 – الحلقة R نظيفة.

2 – الحلقة R شبه نظيفة.

البرهـــــان.

$(1) \Leftarrow (2)$. لنفرض أن الحلقة R نظيفة, عندئذ حسب المبرهنة $(2-3)$ تكون الحلقة R شبه نظيفة.

$(2) \Leftarrow (1)$. لنفرض أن الحلقة R شبه نظيفة وليكن $x \in R$, عندئذ $x = a + e$ حيث $a \in R$ عنصر قابل للقلب جزئياً في R وأن $e \in R$ عنصر جامد. سوف نميز حالتين:

– إذا كان $a = 0$, عندئذ فإن $x = e = (2e-1) + (1-e)$ وأن $2e-1 \in R$ عنصر قابل للقلب في R و $1-e \in R$ عنصر جامد, وهذا يبين أن العنصر x نظيف.

– إذا كان $a \neq 0$, عندئذ يوجد عنصر مغاير للصفر $b \in R$ بحيث $b = bab$ ومنه فإن $ab \in R$ عنصر جامد وبحسب الفرض إما $ab = 0$ أو $ab = 1$. إذا كان $ab = 0$ نجد أن $b = bab = b0 = 0$ وهذا غير ممكن ومنه فإن $ab = 1$. بطريقة مشابهة نجد أن

$ba=1$ وهذا يبين أن a عنصر قابل للقلب في R ومنه فإن العنصر x نظيف وبالتالي فإن الحلقة R نظيفة.

تمهيديـــــة 2-9.

لتكن R حلقة و $x\in R$. عندئذ القضايا الآتية صحيحة:

1 - إذا كان $x\in J(R)$, عندئذ يكون العنصر x شبه نظيف.

2 - إذا كان $1-x\in J(R)$, عندئذ يكون العنصر x شبه نظيف.

3 - إذا كان العنصر x عديم القوى, عندئذ يكون العنصر x شبه نظيف.

البرهـــان.

1 - لنفرض أن $x\in J(R)$, عندئذ فإن العنصر $1-x\in R$ قابل للقلب في R وبالتالي يوجد عنصر مغاير للصفر $b\in R$ بحيث $b(1-x)=1$ وهذا يبين أن $b(1-x)b=b$, أي إن العنصر $1-x\in R$ قابل للقلب جزئياً في R ولما كان $x=(x-1)+1$ نجد أن العنصر x شبه نظيف.

2 - لنفرض أن $1-x\in J(R)$, عندئذ فإن العنصر $1-(1-x)=x$ قابل للقلب في R وبحسب التمهيدية (2-2) نجد أن العنصر x شبه نظيف.

3 - لنفرض أن العنصر x عديم القوى, عندئذ فإن $x\in J(R)$ وبحسب (1) يكون العنصر x شبه نظيف.

تمهيديـــــة 2-10.

كل حلقة محلية هي حلقة شبه نظيفة.

البرهـــان.

لنفرض أن R حلقة محلية وليكن $x\in R$, عندئذ إما العنصر x أو العنصر $1-x$ قابل للقلب في R .

- إذا كان العنصر x قابلاً للقلب في R , عندئذ حسب التمهيدية (2-2) يكون العنصر x شبه نظيف.

– إذا كان العنصر $1-x$ قابلاً للقلب في R, عندئذ يكون العنصر $x-1$ قابلاً للقلب في R ولما كان $x=(x-1)+1$ نجد أن العنصر x شبه نظيف. مما سبق نجد أن الحلقة R شبه نظيفة.

مبرهنـــــة 2-11.

لأجل أي حلقة R الشرطان الآتيان متكافئان:

1 – الحلقة R شبه نظيفة عناصرها الجامدة هي $0,1$ فقط.

2 – الحلقة R محلية.

البرهـــــان.

$(1)\Leftarrow(2)$. لنفرض أن الحلقة R شبه نظيفة عناصرها الجامدة هي $0,1$ فقط. ليكن $x\in R$, عندئذ $x=a+e$ حيث $a\in R$ عنصر قابل للقلب جزئياً في R وأن $e\in R$ عنصر جامد. سوف نميز حالتين:

– إذا كان $a=0$, عندئذ إما $x=0$ أو $x=1$ ومنه إما $1-x$ قابل للقلب أو x عنصر قابل للقلب في R.

– لنفرض أن $a\neq 0$, عندئذ يوجد عنصر مغاير للصفر $b\in R$ بحيث $b=bab$ ولما كان كل من $ab\in R$ و $ba\in R$ عنصر جامد مغاير للصفر نجد أن $ab=ba=1$ وهذا يبين أن العنصر a قابل للقلب في R.

– إذا كان $e=0$, عندئذ فإن $x=a$ عنصر قابل للقلب في R.

– إذا كان $e=1$, عندئذ فإن $x=a+1$ ومنه فإن $1-x=-a$ وأن $-a\in R$ عنصر قابل للقلب في R. مما سبق نجد أن الحلقة R محلية.

$(2)\Leftarrow(1)$. لنفرض أن الحلقة R محلية, عندئذ حسب التمهيدية $(2-10)$ تكون الحلقة R شبه نظيفة. لنبرهن على أن العناصر الجامدة في R هي $0,1$ فقط.

ليكن $e\in R$ عنصراً جامداً, لما كانت الحلقة R محلية, عندئذ إما e أو $1-e$ قابل للقلب في R.

– إذا كان e قابلاً للقلب في R, عندئذ يوجد $b\in R$ بحيث $eb=1$ ومنه نجد أن:

$$e=e(eb)=eb=1$$

- إذا كان $1-e$ قابلاً للقلب في R, عندئذ يوجد $c \in R$ بحيث $c(1-e)=1$ ومنه فإن $e=c(1-e)e=c(e-e)=0$ وبالتالي فإن العناصر الجامدة في R هي $0,1$ فقط.

مبرهنـــــة 2-12.

لتكن $R \neq 0$ حلقة عناصرها الجامدة هي $0,1$ فقط. عندئذ الشرطان الآتيان متكافئان:

1 – الحلقة R شبه نظيفة.

2 – الحلقة R هي f –نظيفة.

البرهـــــان.

$(1) \Leftarrow (2)$. لنفرض أن الحلقة R شبه نظيفة عناصرها الجامدة هي $0,1$ فقط. ليكن $x \in R$, عندئذ $x=a+e$ حيث $a \in R$ عنصر قابل للقلب جزئياً في R وأن $e \in R$ عنصر جامد. سوف نميز حالتين:

- إذا كان $a=0$, عندئذ فإن $x=e$ ولما كانت العناصر الجامدة هي $0,1$ فقط نجد أنه إما $x=0$ أو أن $x=1$.

- إذا كان $x=0$, عندئذ فإن $x=-1+1$ هو عنصر f –نظيف.

- إذا كان $x=1$, عندئذ فإن $x=1+0$ هو عنصر f –نظيف.

- لنفرض أن $a \neq 0$, عندئذ يوجد عنصر مغاير للصفر $b \in R$ بحيث $b=bab$ ومنه فإن كل من $ab \in R$ و $ba \in R$ هو عنصر جامد ولما كان $b \neq 0$ فإن $ab \neq 0$ وأن $ba \neq 0$ وبحسب الفرض فإن $ab=ba=1$. وهذا يبين أن العنصر a كامل في R.

- إذا كان $e=0$, عندئذ $x=a+0$ هو عنصر f –نظيف.

- إذا كان $e=1$, عندئذ $x=a+1$ هو عنصر f –نظيف.

مما سبق نجد أن الحلقة R هي f –نظيفة. $(2) \Leftarrow (1)$. ينتج من المبرهنة (2-3).

مبرهنـــــة 2-13.

لتكن $R \neq 0$ حلقة عناصرها الجامدة هي $0,1$ فقط. عندئذ الشرطان الآتيان متكافئان:

1 – الحلقة R شبه نظيفة.

2 – الحلقة R هي r –نظيفة.

البرهـــــان.

$(1) \Leftarrow (2)$. لنفرض أن الحلقة R شبه نظيفة عناصرها الجامدة هي $0,1$ فقط. ليكن $x \in R$, عندئذ $x = a + e$ حيث $a \in R$ عنصر قابل للقلب جزئياً في R وأن $e \in R$ عنصر جامد. سوف نميز حالتين:

- إذا كان $a = 0$, عندئذ فإن $x = e$ وحسب الفرض يكون $x = 1 + 0$ هو عنصر $r-$ نظيف.
- لنفرض أن $a \neq 0$, عندئذ يوجد عنصر مغاير للصفر $b \in R$ بحيث $b = bab$ ومنه فإن كل من $ab \in R$ و $ba \in R$ هو عنصر جامد ولما كان $b \neq 0$ فإن $ab \neq 0$ و $ba \neq 0$ وبحسب الفرض فإن $ab = ba = 1$ ومنه فإن $aba = a$ وهذا يبين أن العنصر a منتظم.
- إذا كان $e = 0$, عندئذ $x = a + 0$ هو عنصر $r-$نظيف.
- إذا كان $e = 1$, عندئذ $x = a + 1$ هو عنصر $r-$نظيف.

مما سبق نجد أن الحلقة R هي $r-$نظيفة. $(2) \Leftarrow (1)$. ينتج مباشرة من المبرهنة (2−3).

اعتماداً على المبرهنات (2−8) و(2−11) و(2−12) و(2−13) يمكننا صياغة النتيجة الآتية:

نتيجـــــة.

لأجل أي حلقة R القضايا الآتية متكافئة:

1 − الحلقة R محلية.

2 − الحلقة R نظيفة عناصرها الجامدة هي $0,1$ فقط.

3 − الحلقة R هي $r-$نظيفة عناصرها الجامدة هي $0,1$ فقط.

4 − الحلقة R هي $f-$نظيفة عناصرها الجامدة هي $0,1$ فقط.

5 − الحلقة R هي شبه جامدة عناصرها الجامدة هي $0,1$ فقط.

4 − الحلقة R هي شبه نظيفة عناصرها الجامدة هي $0,1$ فقط.

المـراجــع العــلميـــــة.

[1] – Anderson, F. W. and Fuller, K. R. " Rings and Categories of Modules ", New York. Springer (1973).

[2] – Ashrafi N. and Nasibi E., " Rings in Which Elements are Sum of an Idempotent and Regular Element ", Bulletin of the Iranian Mathematical Society. Vol. 39, No. 3, (2013), pp. 579 – 588.

[3] – Chen, W. and Cui, S." On Clean Rings and Clean Elements ", South. Asian Bull. Math. 32, (2008), no. 5, pp. 855 – 861.

[4] – Goodearl, K. R. " Von Neumann Regular Rings ", Pitman 1979 .

[5] – Hamza, H. " I_0 – Rings and I_0 – Modules ", Math. J. Okayama Univ. 40 .[2000] . 91 – 97 , p. (1998)

[6] – Hamza H., " P – Regular and P – Local Rings ", Journal of Algebra and Related Topic. Vol. 9, No. 2, (2021), pp. 1 – 19.

[7] – Kasch, F. " Modules and Rings ", London Math. Soc. Mono. 1982.

[8] – Lambek, J. " Lectures on Rings and Modules ", Blaisdell, Mass. 1966.

[9] – Li. B. and Feng. L. " f – Clean rings and rings having many full elements ", J. Korean Math. Soc. Vol. 47, No. (2), (2010), pp. 247–261.

[10] – Nicholson, W. K. " Lifting idempotent and exchange rings ", Trans. Amer. Math. Soc. Vol. 229, (1977), 269 – 278.

[11] – Zhang H. and Victor C. "On Clean Rings", Communications in Algebra, 44., (2016), pp. 2475 – 2481.