مسألة التنبؤ للعمليات العشوائية التحليلية

د. أحمد رستم الوسوف*

الملخص

ندرس في هذا العمل التنبؤ لتحديد قيمة ظاهرة موصوفة بعملية عشوائية تحليلية باستخدام الأنظمة المفتوحة، والتكافؤ الخطي الواحدي (unitary) للمؤثرات الخطية المحدودة المتخامدة في فضاء هلبرت، وتشمل الدراسة حالتي الطيف المتقطع والمستمر . وتبين أن هذه القيمة تعطى بسلسلة لانهائية متقاربة منها ، وجدودها توابع لطيف تلك العملية واللحظة المتنبأ بقيمة الظاهرة عندها .

الكلمات المفتاحية

التنبؤ – العمليات العشوائية التحليلية – الأنظمة المفتوحة – الطيف المتقطع – الطيف المستمر.

*أستاذ مساعد في قسم الاحصاء الرياضي بكلية العوم في جامعة تشرين

البريد الالكتروني: Email: ahmad58alwassouf@gmail.com:

prediction problem for analytic random processes

Dr. Ahmad Rostom Alwassouf*

Abstract

in this work, We study value production 0f a phenomena described by analytic random process using open systems, and unitary linear equivalence of dissipative linear bounded operators in Hilbert space, the study covers both cases of discrete and continues spectrum.

The findings of the study shows that the value is gives by unlimited convergent series of this value. As well as itit,s terms are functions of the process spectrum and the moment of predicted value of the phenomena .

Keywords:

Forecasting – analytic random processes - open systems – discrete spectrum – continues spectrum.

* Assistant Professor in Department of Mathematical Statistics, Science Faculty, Tishreen University, Lattakia, Syria.
Email: ahmad58alwassouf@gmail.com

مقدمة :

يعد التنبؤ بتطور الظواهر العشوائية من أهم العلوم التطبيقية المستخدمة في المجالات الاقتصادية والجيوفيزيائية والبيولوجية والفيزيائية، والتنبؤ بحالة الطقس وكذلك التنبؤ بتطور حالة مرضية ... الخ. إذ أن مسائل التنبؤ تحدد سلوك الظاهرة $X(t), t \in [0, T]$ في المستقبل، أي تحديد قيمتها في نقطة $t + \tau > T$ بشكل قصير أو متوسط أو في نقاط داخل الفترة الزمنية [0,T]التي لم تراقب قيم الظاهرة فيها من النموذج الرياضي الأفضل الذي يمكن التوصل اليه بطرائق مختلفة، كطرائق السلاسل الزمنية، طريقة ياغولم، وطريقة وينر :[8−12] .

كثيرة هي الأعمال التي درست التنبؤ بقيمة لعملية عشوائية فاستخدموا المعادلات التكاملية كطريقة Iagolm وطريقة

Weiner أو معادلات جبرية في فضاءات منتهية البعد. وفي السنوات الأخيرة اعتمدت الأبحاث التطبيقية في التنبؤ على السلاسل الزمنية ونماذج بوكس –جيكنيز بسبب وجود برامج معالجة للبيانات الاحصائية مثل spss ولغة R وغيرها [12]، ولكن لم أجد عمل استخدم النظرية الطيفية للمؤثرات والأنظمة المفتوحة والتكافؤ الخطي التي هي موضوع بحثنا.

ندرس في هذا العمل التنبؤ عن قيم ظاهرة موصوفة بعملية عشوائية تحليلية من الشكل $X(t) = e^{itA}x_0$ كعنصر من فضاء هلبرت و A مؤثر خطي محدود متخامد تماما و غير هرميتي في هذا الفضاء، من خلال نشرها بسلسلة لانهائية $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^k}{k!} X^{(k)}(\tau)$ متقاربة منها ، وتتحدد هذه السلسلة عند إيجاد المشتقات $X^{(k)}(\tau)$. ولإيجاد هذه المشتقات نحتاج إلى تقنيات متطورة من التحليل الدالي، وهي مفهوم التكافؤ الخطي للمؤثر A في فضاء هلبرت H مع الأشكال المثلثية $\dot{A}$ له المحددة بدلالة طيفها في الفضائين $L^2_{[0,l]}$ و l^2 والتي لها التوابع المميزة نفسها

[1−4,6,7]ونوضح ذلك من خلال التعاريف الأتية :

تعريف1:[1,4]

يقال عن التركيب (A, H, φ, E, J) إنه **عقدة مؤثراتية** ، إذا حقق الشرط $\frac{A-A^*}{i} = \varphi J \varphi^*$ حيث A مؤثرخطي ومحدود في فضاء هلبرت H ، و$\varphi: E \to H$ و $J: E \to E$ موثر يحقق الشرطين $J^2 = I, \quad J^* = J$

و $E = \frac{A-A^*}{i} H$ فضاء جزئي من H .

في عملنا هذا نستخدم التركيب $X = (A, H, , g_1, g_2, \dots, g_r, J)$ حيث $g_j \in E, \ j = 1,2, \dots, r$

عوضا عن العقدة السابقة.

تعريف 2:[1,4]

يقال عن المؤثر الخطي A في H إنه مكافئ خطياً للمؤثر $\dot{A}$ في$\dot{H} = UH$، إذا وجد مؤثر واحدي (unitary) U

$\dot{A} = \mathrm{UA}U^*$ بحيث ($U^* = U^{-1}$) .

تعريف 3 :[1,3,4]

نسمي $g_j \ , j = 1, \dots, r$ قناة للمؤثر A إذا حقق العلاقة

$2 \frac{A-A^*}{i} h = \sum_{j=1}^{r} (h, g_j) g_j$.

تعريف 4 :[1,4]

يقال عن المؤثر غير الهرميتي إنه متخامد إذا كان الجزء التخيلي لنقاطه الطيفية غير سالب، أما إذا كان الجزء التخيلي موجب يسمى المؤثر متخامد تماما.

ننتقل في العمل من فضاء هلبرت المجرد H للفضاء $\dot{H}$ الذي هو $L^2_{[0,l]}$ إذا كان طيف المؤثر A مستمراً تماماً، و l^2 إذا كان طيف A متقطعاً تماماً، وعندئذ نستخدم التركيب $(\dot{A}, \dot{H}, \ \dot{g}_1, \dots, \dot{g}_r, J)$ $\dot{g}_i, i = 1, \dots, r$ المكافئ واحديا للتركيب

$(A, H, g_1, g_2, \dots, g_r, J)$ ، إذا كان $\dim E = r$ ، و تسمى $g_i, i = 1, .., r$ قنوات المؤثر A [1].

طرائق البحث :

نعتمد في هذا البحث الطريقة التحليلية لإيجاد نموذج رياضي للعملية العشوائية، والأنظمة المفتوحة والعقد المؤثراتية ، والأشكال المثلثية للمؤثر A في فضاء هلبرت، وحلول المعادلات التفاضلية والمعادلات الفرقية.

أهداف البحث:

يهدف هدف البحث إلى التنبؤ بتطور الظاهرة الموصوفة بعملية عشوائية تحليلية $X(t) = e^{itA}x_0$ في المستقبل بالاعتماد على قيمها السابقة، باستخدام طريقة الأشكال المثلثية للمؤثرات غير الهرميتية المتخامدة تماماً في فضاء هلبرت في حالتين: الأولى الطيف متقطع تماماً والثانية الطيف مستمر تماماً.

المناقشة والنتائج:

لتكن$X(t) = e^{itA}x_0$عملية عشوائية تحليلية حيث$0 \le t \le T$ ، $E\,X(t) = 0, E|X(t)|^2 < \infty$ والمؤثر A خطي محدود متخامد تماماً[1] ، عندئذ تابع الارتباط لتلك العملية يكون تابعا تحليلياً، وبالتالي يمكن أن نضع $X(t)$ في سلسلة لا نهائية متقاربة منها بمفهوم التقارب بالمتوسط التربيعي، أي يكون لها المنشور الآتي:

$X(t) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k \,.\, t^k$ حيث $C_k \in l^2$ ، عندئذ يكون للعملية$X(t)$ في اللحظة $t + \tau$ >T منشوراً في النقطةτ من الشكل:

$$X(t + \tau) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^k}{k!} X^{(k)}(\tau)$$

وتتحدد هذه القيمة تماما عندما نحدد قيمة المشتقات $X^{(k)}(\tau)$ ، ونستخدم في تحديد المشتقات تلك النظرية الطيفية للمؤثرات والعقد المؤثراتية[1,2,6]، ونتناول الحالات التالية:

ا- عندما يكون طيف المؤثر A متقطع تماماً والمتغير العشوائي $x_0 \in H$

.

وبما أن

$$e^{i\tau A}x_0 = -\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma e^{i\tau\lambda}(A-\lambda I)^{-1}x_0\,d\lambda \qquad (*)$$

حيث γ هو المنحني البسيط المغلق الذي يحوي داخله جميع القيم الطيفية للمؤثر A [1] ولنعوض المشتقات $X^{(k)}(\tau)$ بقيمتها فتكون قيمة التنبؤ من الشكل الآتي:

$$X(t+\tau) = e^{i(\tau+t)A}x_0$$
$$= -\frac{1}{2\pi i}\sum_{k,l=1,}^{\infty}\frac{t^k}{k!}(i)^k\oint_\gamma e^{i\tau\lambda}(A-\lambda I)^{-1}x_0 \quad \lambda^k\,d\lambda$$

ولحساب هذه القيمة يجب أن نحدد القيمة

$$\boldsymbol{X^{(k)}(\tau) = -\frac{(i)^k}{2\pi i}\oint_\gamma e^{i\tau\lambda}(A-\lambda I)^{-1}}x_0\,\lambda^k d\lambda$$

ولنحسب صورة x_0 وفق المؤثر $(A-\lambda I)^{-1}$ بالانتقال للشكل المثلثي $\dot{A}$ للمؤثر A في الفضاء l^2 عندما يكون طيف **المؤثر** A متقطع تماماً، أي لنجد $\left(\dot{A}-\lambda I\right)^{-1}h = f$ حيث $\dot{A} = UAU^{-1}$ و المؤثر $U: H \to l^2$ ، ينقل $X(t)$ للشكل المثلثي $(t) =$ $\dot{X}\ e^{it\dot{A}}h$ ، و $\boldsymbol{U}x_0 = h$ من l^2 والمؤثر $\dot{A}$ معطى بالشكل:

$$(\dot{A}f)_k = \lambda_k\,f_\lambda(k) + i\,\sum_{j=k+1}^{\infty} f_\lambda(j)q_jJq_k^* \qquad (1)$$

[1,3] وبالتالي يكون

$$\boldsymbol{X^{(k)}(\tau) = -\frac{(i)^k}{2\pi i}\oint_\gamma e^{i\tau\lambda}}\left(\left(\dot{A}-\boldsymbol{\lambda I}\right)^{-1}h\right)_k\lambda^k d\lambda$$

لنرمز للمقدار $\left(\left(\dot{A}-\lambda I\right)^{-1}h\right)_k$ بالرمز $f_\lambda(k)$ ونميز الحالتين الآتيتين:

I.I - $Ux_0 = h$ عنصركيفي من l^2 :

نجد أن $\left(\left(\dot{A}-\lambda I\right)f_\lambda(k) = h_k\right.$ و q_k *هي مصفوفة ذات سطر واحد عدد عناصرها* r و λ_k *طيف المؤثر* A و $\lambda_k = \alpha_k + i\,\frac{\beta_k^2}{2}$ و $\sum_{k=1}^{\infty}\beta_k^2 < \infty$ و $= q_kJq_k^*$ $2\,I_m\lambda_k$ و J مصفوفة مرافقة لنفسها و من المرتبة $r\times r$ و $J^2 = I$. نعوض في (1) فنجد أن

$$(\lambda_k - \lambda)\, f_\lambda(k) + i\,\sum_{j=k+1}^{\infty} f_\lambda(j)\, q_jJq_K^* = h_k \qquad (2)$$

وبفرض أن $y(k) = i\sum_{j=k+1}^{\infty} f_\lambda(j)\, q_jJ$ *نجد المعادلة الفرقية التالية*

$$y(k) - y(k-1) = -i\, f_\lambda(k)\, q_kJ$$

ونعوض التابع $f_\lambda(k)$ بقيمته

$$f_\lambda(k) = \frac{1}{\lambda_k-\lambda}h_k - i\,\frac{1}{\lambda_k-\lambda}\sum_{j=k+1}^{\infty} f_\lambda(j)\, q_jJq_K^*$$

من العلاقة (2) فيكون

$$y(k) - y(k-1) = -i\left[\frac{1}{\lambda_k-\lambda}h_k - i\,\frac{1}{\lambda_k-\lambda}\sum_{j=k+1}^{\infty} f_\lambda(j)\, q_jJq_K^*\right] q_k$$

أي أن

$$y(k) - y(k-1) = -i\,\frac{1}{\lambda_k-\lambda}h_kq_kJ - \frac{1}{\lambda_k-\lambda}\sum_{j=k+1}^{\infty} f_\lambda(j)\, q_jJq_K^*\, q_kJ \qquad (3)$$

ومن أجل حل هذه المعادلة الفرقية نفرض أن $y(k) = R(k,\lambda).\, z_k$ حيث

$$R(k,\lambda) = \overleftarrow{\prod_{s=k+1}} \left(I + \frac{i}{\lambda-\lambda_s} q_s^* q_s\right)$$

(أي جداء مصفوفات من الدليل الأعلى الى الدليل الأدنى) [5]

نعوض بالعلاقة (3) فنجد المعادلة التالية

$$y(k) - y(k-1) = R(k,\lambda).z_k - R(k-1,\lambda).z_{k-1} \qquad (4)$$

نضيف ونطرح المقدار $R(k-1,\lambda).z_k$ فنكتب (4) على النحو

$$R(k,\lambda).z_k - R(k-1,\lambda).z_{k-1} = R(k-1,\lambda)(z_k - z_{k-1}) + z_k[R(k,\lambda) - R(k-1,\lambda)]$$

بالمطابقة مع (3) نجد أن

$$(z_k - z_{k-1})\, R(k-1,\lambda) = -i\frac{1}{\lambda_k-\lambda} h_k q_k J \qquad (5)$$

$$z_k[R(k,\lambda) - R(k-1,\lambda)] = \frac{1}{\lambda_k-\lambda}\sum_{j=k+1}^{\infty} f_\lambda(j)\, q_j J q_K^*\; q_k J \qquad (6)$$

نضرب العلاقة (5) بالمصفوفة $JR^*(k-1,\bar{\lambda}).J$ حيث $J^2 = I, J^* = J$ فيكون

$$z_k - z_{k-1} = -\frac{1}{\lambda_k-\lambda} h_k q_k J R^*(k-1,\bar{\lambda})J \qquad (7)$$

والتي تكتب على النحو:

$$z_{k-1} - z_k = \frac{1}{\lambda_k-\lambda} h_k q_k J R^*(k-1,\bar{\lambda})J$$

وعندما $N \mapsto \infty$ ، $z_N \mapsto 0$، نجد أن

$$z_k = i\sum_{r=k+1}^{\infty}\frac{h_k}{\lambda_r-\lambda}\, q_k J R^*(r-1,\bar{\lambda})J$$

ولذلك فنجد

$$y(k) = i \sum_{r=k+1}^{\infty} \frac{h_k}{\lambda_r-\lambda} q_k R^*(r-1,\bar{\lambda}) J R(k,\lambda)$$

ولـكـن

$$f_\lambda(k) = \frac{1}{\lambda_k-\lambda} h_k - i \frac{y(k)\, q_k^*}{\lambda_k-\lambda}$$

فيكون

$$f_\lambda(k) = \frac{1}{\lambda_k-\lambda} h_k - i \frac{1}{\lambda_k-\lambda} \sum_{r=k+1}^{\infty} \frac{h_k}{(\lambda_r-\lambda)(\lambda_k-\bar{\lambda})} q_k R^*(r-1,\bar{\lambda}) J R(k,\lambda)\ q_k^* \quad (8)$$

وبالتالي نجد القيمة المتنبأ بها للعملية $X(t)$ بالعلاقة التالية :

$$X(t+\tau) = \sum_{k,s=1}^{\infty} \frac{t^s}{s!} \left(\frac{(i)^{s+1}}{2\pi} \oint_\gamma \lambda^s e^{i\tau\lambda} f_\lambda(k)\, d\lambda \right)$$

أي

$$X(t+\tau) = \sum_{s,k=1}^{\infty} \frac{t^s}{s!} \frac{(i)^{s+1}}{2\pi} . L(s,k,\tau)$$

حيث

$$L(s,k,\tau) = \oint_\gamma \lambda^s e^{i\tau\lambda} f_\lambda(k)\, d\lambda)$$

I.II- $\boldsymbol{Ux_0 = h}$ قناة للمؤثر A من $\boldsymbol{l^2}$:

بما أن $h \in l^2$ هو **قناة** للمؤثر A **عندئذ يكون للقناة** h الشكل[1] :

$$h = (\beta_1, \beta_2, \beta_3, \dots \dots .., \beta_l, \dots)$$

وبما أن

$$e^{i\tau\dot{A}} g = -\frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma e^{i\tau\lambda} \left(\dot{A} - \lambda I\right)^{-1} g\, d\lambda$$

فيكون للقيمة المتنبأ بها الشكل الآتي:

$$X(t+\tau) = e^{i(\tau+t)A} x_0 = -\frac{1}{2\pi i} \sum_{k=1,}^{\infty} \frac{t^k}{k!} (i)^k \oint_\gamma e^{i\tau\lambda} \lambda^k ((\dot{A} - \lambda I)^{-1} g)_k\, d\lambda$$

ولنحسب القيمة $f_\lambda(k) = (\left(\dot{A} - \lambda I\right)^{-1} g)_k$ فنجد أن

$$f_\lambda(k) = \frac{\beta_k}{\lambda_k-\lambda} \prod_{j=k+1}^{\infty} \frac{\lambda-\overline{\lambda_j}}{\lambda-\lambda_j}$$

حيث النقاط الطيفية لها الشكل $\lambda_j = \alpha_j + i\ \frac{\beta_j^2}{2}$ وبالتالي يكون

$$X(t+\tau) = e^{i(\tau+t)A}x_0$$
$$= -\frac{1}{2\pi i}\sum_{k=1,}^{\infty}\frac{t^k}{k!}\,(i)^k\oint_{\gamma}\ e^{i\tau\lambda}\,\lambda^k\,\frac{\beta_k}{\lambda_k-\lambda}\prod_{j=k+1}^{\infty}\frac{\lambda-\overline{\lambda_j}}{\lambda-\lambda_j}\,d\lambda$$

ولنرمز للمقدار $-\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma}\ (\boldsymbol{i})^{\boldsymbol{k}}e^{i\tau\lambda}\,\lambda^k.\frac{\beta_k}{\lambda_k-\lambda}\prod_{j=k+1}^{\infty}\frac{\lambda-\overline{\lambda_j}}{\lambda-\lambda_j}\,d\lambda$ بالرمز $L\ \ (k,\tau,\lambda)$ فيكون

$$\boldsymbol{X(t+\tau)=\sum_{k=1,}^{\infty}\frac{t^k}{k!}\,L\ \ (k,\tau,\lambda)}.$$

وهي القيمة المتنبأ بها $\boldsymbol{X(t+\tau)}$ في النقاط $T < \boldsymbol{t+\tau}$.

مما سبق نصيغ المبرهنة التالية:

مبرهنة1:

إذا كانت العملية العشوائية $X(t) = e^{itA}x_0$ تحليلية و A مؤثر خطي متخامد تماما ومحدود وذو طيف متقطع تماما في فضاء هلبرت H ، عندئذ تكون القيمة المتنبأ بها من الشكل

$$X(t+\tau)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{t^k}{k!}\,.L(k,\lambda,\tau)$$

و

$$L(k,\lambda,\tau) = \oint_{\gamma}\ \frac{(i)^{k+1}}{2\pi}\lambda^k e^{i\tau\lambda}\,f_\lambda(k)\ d\lambda\ )$$

1- $\boldsymbol{Ux_0 = h}$ عنصر كيفي من $\boldsymbol{l^2}$:

$$f_\lambda(k) = \frac{1}{\lambda_k-\lambda}h_k - i\frac{1}{\lambda_k-\lambda}i\sum_{r=k+1}^{\infty}\frac{h_k}{(\lambda_r-\lambda)(\lambda_k-\bar{\lambda})}\ q_k R^*\big(r-1,\bar{\lambda}\big)JR(k,\lambda)\ q_k^*$$

2- $\boldsymbol{Ux_0 = h}$ قناة للمؤثر A من $\boldsymbol{l^2}$:

$$f_\lambda(k) = \frac{\beta_k}{\lambda_k-\lambda}\prod_{j=k+1}^{\infty}\frac{\lambda-\overline{\lambda_j}}{\lambda-\lambda_j}$$

II – عندما يكون للمؤثر A المحدود طيف مستمر تماما في فضاء هلبرت:

وجدنا أن

$$X(t+\tau) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{t^k}{k!}\,X^{(k)}(\tau) =$$

$$= -\frac{1}{2\pi i}\sum_{k=1,}^{\infty}\frac{t^k}{k!}\,(i)^k\oint_\gamma\ e^{i\tau\lambda}\,\lambda^k(A-\lambda I)^{-1}x_0\ d\lambda$$

ولنحسب صورة x_0 وفق المؤثر $(A-\lambda I)^{-1}$، فمن أجل ذلك ننتقل للشكل المثلثي $\dot{A}$ للمؤثر A في الفضاء $L^2_{[0,l]}$ عندما يكون طيف **المؤثر** A مستمر تماماً ، والمؤثر $U: H \to L^2_{[0,l]}$ هو مؤثر واحدي، ينقل $X(t)$ للشكل المثلثي $\dot{X}\ (t) = e^{it\dot{A}}\dot{x_0}$ ، حيث $\dot{A} = UAU^{-1}$ و $U^* = U^{-1}$ و $\boldsymbol{U}x_0 =$ $h(x)$عنصر من $L^2_{[0,l]}$ ،والمؤثر $\dot{A}$ معطى بالشكل :

$$\dot{A}f(x) = \alpha(x).f(x) + i\int_x^l f(t)q(t)Jq^*(x).dt$$

حيث $q(x)$ هي مصفوفة مربعة أو مستطيلة ذات rعمود وpسطر مستقلة ومعرفة على مجموعة ذات قياس موجب و $sp\,q^*(x).q(x) = 1$أثر المصفوفة $q(x)$ و $\alpha(x)$ تابع غير متناقص ومستمر من اليسار،

ومن أجل ذلك نفرض أن $\left(\dot{A}-\lambda I\right)^{-1}h(x) = f(x)$ ، ولنوجد *التابع* $f(x)$ من المعادلة $\left(\dot{A}-\lambda I\right)f(x) = h(x)$ حيث h(x) من الفضاء $L^2_{[0\,,l]}$

عندئذ تعطى المصفوفة المميزة للمؤثر A بالعلاقة :

$$S(x,\lambda)=\int_0^{\urcorner l} e^{\frac{i}{\lambda-\alpha(t)}.dE(t)}\ , E(t)=\int_0^t q^*(x).q(x).dx$$

ونحصل على المعادلة التكاملية الآتية:

$$(\alpha(x)-\lambda).f(x)+i\int_x^l f(t)q(t)Jq^*(x).dt=h(x)$$

ونحل هذه المعادلة بالحالتين الآتيتين:

II . I . $h(x)$ عنصركيفي من الفضاء $L^2_{[0,l]}$.

ولحل هذه المعادلة في هذه الحالة نفرض أن $i\int_x^l f(t).q(t)J\,dt=y(x)$ *المحقق للشرط* $y(l)=0$ فنجد أن قيمة المشتق هي $y'(x)=if(x).q(x)J$ *فنحصل علىالمعادلة* $(\alpha(x)-\lambda).f(x)+iy(x)q^*(x)=h(x)$ ومنها نحدد التابع $f(x,\lambda)$ بالعلاقة $f(x,\lambda)=\frac{h(x)}{\alpha(x)-\lambda}-\frac{-iy(x)q^*}{\alpha(x)-\lambda}$ ونحصل على معادلة تفاضلية عادية من المرتبة الأولى من الشكل :

$$y'(x)+\frac{y(x)q^*(x)q(x)}{\alpha(x)-\lambda}=i\frac{h(x)}{\alpha(x)-\lambda}\quad ,\mathrm{y(T)}=0$$

بإجراء التحويل $y(x)=z(x).S(x,\lambda)$ تحول المعادلةللشكل

$\frac{dy(x)}{dx}=z(x).\frac{dS(x,\lambda)}{dx}+S(x,\lambda).\frac{dz(x)}{dx}$ وبملاحظة أن$=\frac{dS(x,\lambda)}{dx}$ $i\frac{1}{\alpha(x)-\lambda}S(x,\lambda)q^*(x).q(x)J$ فنحصل على المعادلة التفاضلية

$$\frac{dz}{dx}\ .S(x,\lambda)=-i\frac{h(x)q(x)J}{\alpha(x)-\lambda}\ \ ,z(l)=0$$

بضرب هذه المعادلة بالمقدار $JS^*(x,\lambda)J$ فنجد المعادلة

$$\frac{dz(x)}{dx}=-i\frac{h(x)q(x)S^*(x,\lambda)J}{\alpha(x)-\lambda}$$

ومنها نجد الحل

$$z(x) = i\int_x^l \frac{h(x)q(t)S^*(t,\lambda)J}{\alpha(t)-\lambda}\,dt$$

وبالتعويض نجد التابع y(x) بالعلاقة

$$y(x) = i\int_x^l \frac{h(x)q(t)S^*(t,\lambda)JS(x,\lambda)}{\alpha(t)-\lambda}\,\mathrm{dt}$$

من هنا نجد أن

$$f(x,\lambda) = \frac{h(x)}{\alpha(x)-\lambda} - i\int_x^l \frac{h(x)q(t)S^*(t,\lambda)JS(x,\lambda)q^*(x)}{(\alpha(t)-\lambda).(\alpha(x)-\lambda)}\,\mathrm{dt}$$

وبالتالي نجد القيمة المتنبأ بها في النقطة $t^* = t+\tau$ بالعلاقة

$$X(t+\tau) = -\frac{1}{2\pi i}\sum_{k=1,}^{\infty}\frac{t^k}{k!}\,(i)^k\oint_\gamma e^{i\tau\lambda}\,\lambda^k f(x,\lambda)\,d\lambda = \sum_{k=1,}^{\infty}\frac{t^k}{k!}\,L(x,\tau,\lambda)$$

حيث $L(x,\tau,\lambda) = -\frac{(i)^{k+1}}{2\pi i}\oint_\gamma e^{i\tau\lambda}\,\lambda^k f(x,\lambda)\,d\lambda$.

.II.II $Ux_0 = \dot{h}(x)$ قناة للمؤثر A من الفضاء $L^2_{[0,l]}$.

أن القناة في هذه الحالة مساوي للواحد [1]، أي **$Ux_0 = \dot{h}(x) = 1$**

$$\begin{aligned} X(t+\tau) &= -\frac{1}{2\pi i}\sum_{k=1,}^{\infty}\frac{t^k}{k!}\,(i)^k\oint_\gamma e^{i\tau\lambda}\,\lambda^k\left(\dot{A}-\lambda I\right)^{-1}1\,.\,d\lambda \\ &= -\frac{1}{2\pi i}\sum_{k=1,}^{\infty}\frac{t^k}{k!}\,(i)^k\oint_\gamma e^{i\tau\lambda}\,\lambda^k.\,f(x,\lambda)\,d\lambda \\ &= \sum_{k=1,}^{\infty}\frac{t^k}{k!}\,(i)^k.\,L(x,\tau,\lambda)\,, \end{aligned}$$

$L(x,\tau,\lambda) = -\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma} \quad (i)^k\, e^{i\tau\lambda}\, \lambda^k . f(x,\lambda)\ d\lambda, \quad f(x,\lambda) = \frac{1}{\alpha(x)-\lambda} . e^{-i\int_x^l \frac{dt}{\alpha(t)-\lambda}}$

حيث $\alpha(x)$ تابع مستمر .

ملاحظة : عندما $\alpha(x) = 0$ نقول أن طيف المؤثر A متجمع في الصفر .

مبرهنة2:

إذا كانت العملية العشوائية $X(t) = e^{itA}x_0, t \in [0\ , T\ ]$ تحليلية وA مؤثر خطي ومتخامد تماماً ومحدود وذو طيف مستمر تماما في فضاء هلبرت H ، عندئذ تكون القيمة المتنبأ بها في نقطة

$T < \boldsymbol{t} + \boldsymbol{\tau}$ من الشكل :

$$X(t+\tau) = \sum_{k=1,}^{\infty} \frac{t^k}{k!}\ L(x,\tau,\lambda)$$

حيث $L(x,\tau,\lambda) = -\frac{(i)^{k+1}}{2\pi i}\oint_{\gamma} \ e^{i\tau\lambda}\, \lambda^k f(x,\lambda)\ d\lambda$

1- **إذا كان $\dot{\boldsymbol{h}}(\boldsymbol{x})$ عنصركيفي من الفضاء $\boldsymbol{L}^2_{[0,l]}$ فإن:**

$$f(x,\lambda) = \frac{\dot{\boldsymbol{h}}(x)}{\alpha(x)-\lambda} - i\int_x^l \frac{\dot{\boldsymbol{h}}(x)q(t)S^*(t,\lambda)JS(x,\lambda)q^*(x)}{(\alpha(t)-\lambda).(\alpha(x)-\lambda)}\ \mathrm{dt}$$

***1-* وعندما $\boldsymbol{Ux_0} = \dot{\boldsymbol{h}}(\boldsymbol{x}) = \mathbf{1}$ قناة للمؤثر $\boldsymbol{A}$من الفضاء $\boldsymbol{L}^2_{[0,l]}$ ،نجد أن :**

$$f(x,\lambda) = \frac{1}{\alpha(x)-\lambda} . e^{-i\int_x^l \frac{dt}{\alpha(t)-\lambda}}$$

النتائج والتوصيات:

1- لقد حصلنا على القيمة المتنبأ بها للعملية العشوائية بدلالة طيف تلك العملية مما يسمح لنا بدراسة التقارب باستخدام نصف القطر الطيفي لمنطقة توزع طيف المؤثر

2- نوصي بالتنبؤ عن قيمة للعملية العشوائية بدلالة طيفها بالحالة العامة.

References

1- LIVSIC M. S. , IANCEWICH A. A. Theory of operator colligation in Hilbert Space , J. Wiley N.Y, 1979 .

2- *АХЕИЕЗЕР Г. ,Глзман И.М.,Теория линейных операторов в Гильбертовом пространстве ;»Наука» 1982 .*

3- *Кужеель А.В.,О приведении неограниченных несамосопряженных операторов к треугольному виду . ДАН СССР,119:5,с.868-871.*

4- *Лившиц М.С. ,Янцевич А.А. Теория операторных узлов в гильбертвом пространстве,Изд. Харк.ун-та,1971.*

5- *Потапов В.П. Мультиипликативная структуура* $\mathfrak{J}-$ нерастягивающих *матриц-функцций. Труды мат. Общ. ,т.4(1955),с.125-236.*

6- *Бродский М.С., Унитарные операторные уззллы и их характеристиичческие функции. УМН 1978, 33,4 (202) , с. 141-168.*

7- *Гохберг И.Ц.,Крейн М.Г; Введение в Теорию линейных некамосопряженных операторов . «Наука», 1965.*

8- *Yousung P., Jaiwon C. and Hee-Young K.; Forecasting Cause-Age specific mortality using tow random processes ,Journaled the American Statistical Association,vol-101.No.474, pp.412-483,2006.*

9- *Jason B., Agential introduction to the random walk for times series forecasting with python, 2017.*

10- *Petrovska S., Development of a method for forecasting random events during instability periods, Technology Audit and production ,2020.*

11- الوسوف أ. الطوريات العشوائية (1)، منشورات جامعة تشرين، 2007−2008.

12- الوسوف ا. عليا ت. ، ابراهيم ن. تحليل السلسلة الزمنية باستخدام منهجية بوكس− جينكينز (دراسة تطبيقية على طلاب كلية العلوم في جامعة تشرين)، المجلد(42) العدد(3)، 2021.