تشكيل قاعدة للفضاءات $S(\mathbb{R})$ و $\acute{S}(\mathbb{R})$

بسمه هشام الحمدو[1], أ. د . ابراهيم ابراهيم[2]

[1] طالبة ماجستير في قسم الرياضيات, كلية العلوم, جامعة البعث, سوريا

[2] قسم الرياضيات, كلية العلوم, جامعة البعث, سوريا

الملخص

ندرس في هذا البحث أنواع خاصة من الفضاءات الخطية الطبولوجية مثل فضاء الدوال المتناقصة بسرعة أو فضاء شفارتز $S(\mathbb{R})$ و فضاء التوزيعات بطيئة التزايد $\acute{S}(\mathbb{R})$, كما ندرس تشكيل قاعدة لهذه الفضاءات, و نقدم أيضاً تعميماً لنشر دوال الفضاءات $L_p(\mathbb{R})$ حيث $1 \le \mathrm{p} \le \infty$ وفق دوال هرميت.

الكلمات المفتاحية:

الفضاءات الطبولوجية ، الفضاءات الخطية الطبولوجية ، القاعدة ، التوزيعات ، النشر بالدوال الخاصة .

Basis Construction of the Spaces $S(\mathbb{R})$ and $\acute{S}(\mathbb{R})$

Abstract

In this work we study special types of topological linear

Spaces such as the space of rapidly decreasing functions

or Schwartz space and the space of Tempered distributions and we also introduce a generalization of the expansions of the of $L_p(\mathbb{R})$ -functions, where $1 \le p \le \infty$ with respect to the Hermite functions

Key Words:

Topological Spaces, Topological Linear Spaces, Bases, Distributions, Expansions in Special Functions

هدف البحث:

سنعرف في هذا البحث فضاء الدوال المتناقصة بسرعة (أو فضاء شفارتز)$S(\mathbb{R})$ و فضاء التوزيعات بطيئة التزايد $\acute{S}(\mathbb{R})$, ثم نقوم ببناء قاعدة لهذه الفضاءات, و في النهاية سنعمم النشر وفق دوال هرميت في الفضاءات $L_p(\mathbb{R})$ من أجل كل قيم p حيث $1 \leq p \leq \infty$.

تعاريف أساسية: [1] و [2] و [4] و [5] و [7] و [8] و [10] .

- الفضاء الطبولوجي: لتكن X مجموعة غير خالية ولتكن τ أسرة من المجموعات الجزئية من X . عندئذ:

(أ) نقول إن τ طبولوجيا على X إذا تحققت الشروط التالية (التي تسمى موضوعات الطبولوجيا):

(1) المجموعة الكلية X و المجموعة الخالية ϕ تنتميان إلى τ .

(2) أي اجتماع لعناصر من τ هو من جديد عنصر في τ.

(3) تقاطع أي عنصرين من τ هو من جديد عنصر في τ.

(من هذا الشرط ينتج أن تقاطع أي عدد منته من عناصر τ هو من جديد عنصر في τ).

(ب) نسمي الثنائية (X , τ) فضاءً طبولوجياً، ونسمي عناصره نقاط الفضاء.

- الدالي الخطي: ليكن: $T: X \to \mathbb{K}$, حيث X فضاء خطي. نقول إن T دالي خطي إذا حقق ما يلي:

$$T(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = \lambda_1 T(x_1) + \lambda_2 T(x_2)$$

- التقارب المنتظم: نقول عن متتالية التوابع $f_n(x)$ أنها متقاربة من التابع f و نكتب: $f \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f_n$ تقارباً منتظماً على X إذا و فقط إذا كان من أجل $\varepsilon > 0$ يوجد $N_0(\varepsilon)$ ($N_0(\varepsilon)$ متعلقة ب ε فقط و غير متعلقة ب x) بحيث يكون:

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

و ذلك من أجل $n > N_0(\varepsilon)$ و $x \in X$.

- الفضاء $C^{\infty}(\mathbb{R})$: نرمز بـ $C^{\infty}(\mathbb{R})$ لمجموعة كل الدوال ذات القيم العقدية $\varphi: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ القابلة للاشتقاق عدداً لانهائياً من المرات بمشتقات مستمرة على $\mathbb{R}$.
- الفضاء $\mathcal{E}(\mathbb{R})$: هو الفضاء (الخطي الطبولوجي) $C^{\infty}(\mathbb{R})$ المزود بالطبولوجيا المنتجة بأسرة أنصاف النظم:

$$(1) \qquad p_{k,K_n}(\varphi) = \sum_{i=0}^{k} \sup_{x\in K_n} \left|\varphi^{(i)}(x)\right| \quad ; \quad \varphi \in C^{\infty}(\mathbb{R})$$

- الفضاء $\acute{\mathcal{E}}(\mathbb{R})$: هو فضاء الداليات الخطية المستمرة على $\mathcal{E}(\mathbb{R})$, و هو فضاء التوزيعات ذات الدعامات المتراصة.
- الفضاء $S(\mathbb{R})$: : يرمز $S(\mathbb{R})$ لمجموعة كل الدوال $\varphi \in \mathcal{E}(\mathbb{R})$ التي تحقق الشرط:

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} (1 + x^2)^k \sum_{i=0}^{\ell} \left|\varphi^{(i)}(x)\right| \leq c_{k,\ell,\varphi} < \infty \quad ; k, \ell = 0,1,2, \dots$$

حيث إن $c_{k,\ell,\varphi}$ ثابت موجب يتعلق بـ k و ℓ و φ، و يسمى فضاء شفارتز أو فضاء الدوال المتناقصة بسرعة, و هو فضاء خطي طبولوجي حيث الطبولوجيا فيه هي الطبولوجيا المنتجة بأسرة أنصاف النظم:

$$(2) \quad p_{k,\ell}(\varphi) = \sup_{x\in\mathbb{R}} (1+x^2)^k \sum_{i=0}^{\ell} \left|\varphi^{(i)}(x)\right| \; ; \; \varphi \in S(\mathbb{R})$$

- الفضاء $\acute{S}(\mathbb{R})$: هو الفضاء الثنوي للفضاء $S(\mathbb{R})$ أي فضاء الداليات الخطية المستمرة على $S(\mathbb{R})$ و هو فضاء التوزيعات بطيئة التزايد.
- الفضاء $L_p(\mathbb{R})$: من أجل $1 \le p < \infty$ ترمز $L_p(\mathbb{R})$ لمجموعة كل الدوال $f = f(x)$ المعرفة والقيوسة على $\mathbb{R}$ التي تحقق (التكامل بحسب لوبيغ):

$$\|f\|_p = \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p \, dx\right)^{1/p} < \infty \, .$$

وترمز $L_\infty(\mathbb{R})$ لمجموعة كل الدوال $f = f(x)$ المعرفة والقيوسة على $\mathbb{R}$ التي تحقق:

$$\|f\|_\infty = ess \; sup_{x\in[a,b]}|f(x)| < \infty$$

حيث إن :

$$ess \; sup_{x\in[a,b]}|f(x)| = inf\{\, c \; : \lambda(\{\, x \in [a,b]: |f(x)| \ge c \,\}) = 0 \,\}$$

حيث ترمز $\lambda(A)$ لقياس لوبيغ للمجموعة A .

- دعامة دالة $f: \Omega \to \mathbb{C}$ حيث Ω مجموعة جزئية (مفتوحة) في $\mathbb{R}$ هي غلاقة المجموعة

$\{x \in \Omega: f(x) \neq 0\}$ و نكتب:

$$supp(f) = \overline{\{x \in \Omega: f(x) \neq 0\}}$$

نقول إن الدالة f ذات دعامة متراصة إذا كانت المجموعة $supp(f)$ متراصة في $\mathbb{R}$.

- الفضاء $C_0^\infty(\mathbb{R})$: نرمز بـ $C_0^\infty(\mathbb{R})$ لمجموعة كل الدوال $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$ ذات الدعامات المتراصة.

♦ نقول إن المتتالية $\{\varphi_n\}$ متقاربة في $C_0^\infty(\mathbb{R})$ من الدالة φ إذا تحقق الشرطان التاليان:

(1) توجد مجموعة متراصة K بحيث إن:

$$supp(\varphi_n) \subset K \qquad ; n = 1,2, \dots ....$$

(2) متتالية المشتقات $\{\varphi_n^{(i)}(x)\}$ تتقارب بانتظام من المشتقات $\varphi^{(i)}(x)$.

♦ الفضاء $D(\mathbb{R})$: هو الفضاء $C_0^\infty(\mathbb{R})$ الخطي الطبولوجي حيث الطبولوجيا معرفة من خلال مفهوم التقارب المنتظم للدوال و مشتقاتها على مجموعة متراصة في $\mathbb{R}$ و هو المذكور في التعريف السابق.

♦ الفضاء $\acute{D}(\mathbb{R})$: هو فضاء الداليات الخطية المستمرة على $D(\mathbb{R})$, و هو فضاء التوزيعات بشكلها العام.

مبرهنة (1) $S(\mathbb{R})$: كثيفة في الفضاءات $L_p(\mathbb{R})$ من أجل $1 \le p < \infty$ ؛ , [8] . [10]

مبرهنة (2): الفضاءات $D(\mathbb{R})$ و $S(\mathbb{R})$ و $\mathcal{E}(\mathbb{R})$ تحقق ما يلي:

(1) $D(\mathbb{R}) \subset S(\mathbb{R}) \subset \mathcal{E}(\mathbb{R})$.

(2) $D(\mathbb{R})$ كثيف في $S(\mathbb{R})$.

(3) $D(\mathbb{R})$ كثيف في $\mathcal{E}(\mathbb{R})$.

(4) $S(\mathbb{R})$ كثيف في $\mathcal{E}(\mathbb{R})$.

الإثبات:

(1) ينتج مباشرة من تعريف الفضاءات.

(2) ليكن $\varphi \in S(\mathbb{R})$, و لنأخذ $\psi \in D(\mathbb{R})$ بحيث إن:

$$\psi(x) = 1 \quad ; x \in [-1, +1]$$

ثم تعرف الدوال φ_ε بالشكل:

$$\varphi_\varepsilon(x) = \varphi(x).\psi(\varepsilon x) \quad ; \varepsilon > 0$$

فنجد أن $\varphi_\varepsilon \in D(\mathbb{R})$, كما أن $\varphi_\varepsilon \to \varphi$ (في $S(\mathbb{R})$) عندما $\varepsilon \to 0$.

(3) ليكن $\varphi \in \mathcal{E}(\mathbb{R})$, و لتكن K_n المجموعة المتراصة المذكورة في تعريف النظيم p_{n,K_n} .

عندئذٍ: توجد دالة $\psi_n \in D(\mathbb{R})$ بحيث إن:

$$\psi_n(x) = 1 \quad ; x \in K_n$$

و يكون $\varphi\, \psi_n \in D(\mathbb{R})$. و بما أن:

$$p_{n,K_n}(\varphi - \varphi\, \psi_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

نحصل على المطلوب.

(4) ينتج مباشرة مما تقدم.

تشكيل قاعدة في الفضاءات $\boldsymbol{S}(\mathbb{R})$ و $\acute{\boldsymbol{S}}(\mathbb{R})$:

ننطلق من مؤثر هرميت التفاضلي [8]: $H_0: D(\mathbb{R}) \to L_2(\mathbb{R})$ المعرف بالشكل:

$$(3) \qquad H_0\varphi = -\acute{\acute{\varphi}} + x^2\varphi \quad ; \quad \varphi \in D(\mathbb{R})$$

هذا المؤثر:

(1) تناظري.

(2) موجب محدود.

(3) غلاقته مؤثر مترافق ذاتياً بطيف نقطي بحت (أي أن طيفه يحوي فقط القيم الخاصة).

سنرمز للغلاقة ب $H = \overline{H}_0$. قيمه الخاصة هي :

$$\lambda_n = 2n + 1 \quad ; n = 0,1,2, \dots \dots ..$$

و الدوال الخاصة الموافقة هي دوال هرميت $h_n(x)$: **[6]** و **[9]** :

$$h_n(x) = (-1)^n \left(2^n\, n!\, \sqrt{\pi}\right)^{-\frac{1}{2}} e^{\frac{x^2}{2}} \frac{d^n}{dx^n}\left[e^{-x^2}\right]; \qquad n = 0,1,2, \dots.$$

من الواضح أن الدوال $h_n(x)$ تنتمي للفضاء $S(\mathbb{R})$.

بحسب [8] فإن الدوال $\{h_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ تشكل جملة متعامدة منظمة و تامة في فضاء هيلبرت $L_2(\mathbb{R})$. هذا يعني أن كل دالة $f \in L_2(\mathbb{R})$ يمكن نشرها بسلسلة فورييه متقاربة من f نفسها:

$$(4) \quad f = \sum_{n=0}^{\infty} \langle f, h_n \rangle\, h_n$$

كما أن مساواة بارسيفال محققة:

$$(5) \quad \|f\|_{L_2}^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |\langle f, h_n \rangle|^2 \quad ; \quad f \in L_2(\mathbb{R})$$

إضافة لذلك فإن مجموعة تعريف المؤثر H هي:

$$(6) \qquad D(H) = \left\{ f \in L_2(\mathbb{R}) : \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n^2 |\langle f, h_n \rangle|^2 < \infty \right\}.$$

و يكون:

$$(7) \qquad Hf = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n \langle f, h_n \rangle h_n \quad ; \quad f \in D(H).$$

نعرف القوى الصحيحة للمؤثر H بالاعتماد على النظرية الطيفية كما يلي:

$$(8) \quad H^k f = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n^k \langle f, h_n \rangle h_n \quad ; f \in D(H^k)\, ; k = 0,1,2, \dots.$$

حيث إن:

$$(9)\quad D(H^k)=\left\{f\in L_2(\mathbb{R}):\sum_{n=0}^{\infty}\lambda_n^{2k}|\langle f,h_n\rangle|^2<\infty\right\}$$

جدير بالذكر أن السلاسل في (4) و (5) متقاربة في الفضاء $L_2(\mathbb{R})$, و سوف نبين بعد قليل أنه يوجد نشر مشابه في الفضاءات $S(\mathbb{R})$ و $\acute{S}(\mathbb{R})$. لذلك لا بد من بعض التمهيدات.

في البداية سنمدد المؤثر H_0 المعرف بالعلاقة (3) من $D(\mathbb{R})$ إلى $S(\mathbb{R})$ و ذلك بالاستفادة من المبرهنة $(2)/(2)$ و ملاحظة أن التقارب في هذين الفضائين هو التقارب المنتظم لمتتاليات الدوال.

بما أن $D(\mathbb{R})$ كثيف في $S(\mathbb{R})$ فإنه من أجل كل $f\in S(\mathbb{R})$ توجد متتالية $\{\varphi_n\}$ في $D(\mathbb{R})$ بحيث إن $\varphi_n\to f$ (التقارب في $S(\mathbb{R})$). و بناء على ذلك يتم تمديد H_0 .

تعريف(1): ليكن $f\in S(\mathbb{R})$ و لتكن $\{\varphi_n\}$ متتالية من عناصر $D(\mathbb{R})$ متقاربة من f (التقارب في $S(\mathbb{R})$). عندئذٍ نضع:

$$(10)\quad H_0f=\lim_{n\to\infty}H_0\varphi_n$$

ملاحظة(2): (1) التعريف السابق ذو معنى لأنه من أجل كل $\varphi_n\in D(\mathbb{R})$ يكون أيضاً:

$$H_0\varphi_n\in D(\mathbb{R})$$

و بحسب التقارب $\varphi_n\to f$ يكون لدينا:

$$H_0\varphi_n=-\acute{\acute{\varphi}}_n+x^2\varphi_n\ \longrightarrow\ -\acute{\acute{f}}+x^2f\in S(\mathbb{R})\ \ ;\ f\in S(\mathbb{R})$$

(2) H_0f مستقل عن اختيار المتتالية $\{\varphi_n\}$, لأنه إذا كان:

$$\varphi_n\longrightarrow f\ ,\qquad \psi_n\longrightarrow f\ \ ;\quad \varphi_n\,,\,\psi_n\in\ D(\mathbb{R})$$

فيكون لدينا:

$$\lim_{n\to\infty} H_0\varphi_n - \lim_{n\to\infty} H_0\psi_n$$
$$= \lim_{n\to\infty}\left(-\acute{\acute{\varphi}}_n + x^2\varphi_n\right) - \lim_{n\to\infty}\left(-\acute{\acute{\psi}}_n + x^2\psi_n\right)$$
$$= \left(-\acute{\acute{f}} + x^2 f\right) - \left(-\acute{\acute{f}} + x^2 f\right) = 0$$

أي أن:

$$H_0 f = \lim_{n\to\infty} H_0\varphi_n - \lim_{n\to\infty} H_0\psi_n$$

(3) نعرف القوى الصحيحة للمؤثر H_0 بالشكل المألوف:

$$(11)\quad (H_0)^0 f = f, (H_0)^1 f = H_0 f, \dots, (H_0)^k f = H_0 (H_0)^{k-1} f \;;\quad k = 1,2,\dots$$

فنجد أن $(H_0)^k f \in S(\mathbb{R})$ من أجل أي $f \in S(\mathbb{R})$. لذلك يصح النشر التالي بالاستفادة من (8):

$$(12)\quad H_0^k f = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n^k \langle f, h_n\rangle h_n \quad;\quad f \in S(\mathbb{R}) \subset L_2(\mathbb{R})$$

و الآن نشكل أسرة من أنصاف النظم بالاعتماد على النشر (12) , حيث نضع:

$$(13)\quad p_k(f) = \sup_n \left|\langle H_0^k f, h_n\rangle\right| \quad;\quad k = 0,1,2,\dots$$

(أي أن أنصاف النظم معرفة بواسطة عوامل فورييه للدوال $H_0^k f$), و هي تحقق المتراجحات:

$$(14)\quad p_0(f) \le p_1(f) \le \cdots \le p_k(f) \le p_{k+1}(f) \le \cdots$$

و إضافة لذلك يكون لدينا بحسب متراجحة شفارتز:

$$\left|\langle H_0^k f, h_n\rangle\right| \le \left\|H_0^k f\right\|_{L_2} \|h_n\|_{L_2} = \left\|H_0^k f\right\|_{L_2} \quad;\quad f \in S(\mathbb{R})$$

حيث إن $\|h_n\|_{L_2} = 1$ لأن الدوال h_n منظمة.

نقول إن المتتالية $\{f_n\}$ متقاربة من f بأسرة أنصاف النظم (13) إذا كانت متقاربة من أجل كل دليل k أي أن:

$$(15) \quad f_n \to f \iff p_k(f_n - f) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \quad ; \quad k = 0,1,2, \dots .$$

مبرهنة (3) : [8] و [10]: إذا كان $T: S(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$ دالياً خطياً, فإن الشرطين التاليين متكافئان:

(1) $T \in \acute{S}(\mathbb{R})$.

(2) يوجد عددان صحيحان $k, \ell \in \{0,1,2, \dots \dots \dots\}$ و يوجد عدد ثابت موجب c بحيث يكون:

$$|T(\varphi)| \leq c\, p_{k,\ell}(\varphi) \quad ; \forall \varphi \in S(\mathbb{R})$$

مبرهنة (4): كل دالة $f \in L_p(\mathbb{R})$, حيث $1 \leq \mathrm{p} \leq \infty$, تعرف توزيعاً T_f من $\acute{S}(\mathbb{R})$.

الإثبات:

من أجل كل $f \in L_p(\mathbb{R})$ نعرف الدالي T_f بالشكل:

$$T_f(\varphi) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x)dx \quad ; \varphi \in S(\mathbb{R})$$

(1) ليكن $f \in L_p(\mathbb{R})$, حيث $1 < p < \infty$, عندئذٍ يكون لدينا بحسب متراجحة هولدر:

$$\left|T_f(\varphi)\right| \leq \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\mathbb{R}} |\varphi(x)|^q dx\right)^{\frac{1}{q}} \; ; \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

$$= \|f\|_{L_p} \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+x^2} \left|(1+x^2)^{\frac{1}{q}}\varphi(x)\right|^q dx\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\leq c\, \|f\|_{L_p} \cdot \sup_{x\in\mathbb{R}} (1+x^2)^k |\varphi(x)| \quad ; \quad k \geq \frac{2}{q}$$

$$= c\ \|f\|_{L_p} p_{k,0}(\varphi) \quad ; \quad \varphi \in S(\mathbb{R})$$

و بحسب المبرهنة (3) يكون T_f توزيعاً من $\acute{S}(\mathbb{R})$.

(2) ليكن $f \in L_1(\mathbb{R})$. عندئذٍ:

$$\begin{aligned}
|T_f(\varphi)| &\le \int_{\mathbb{R}} |f(x)|.|\varphi(x)|dx \\
&\le \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x)|dx\right). \sup_{x \in \mathbb{R}} |\varphi(x)| \\
&\le \|f\|_{L_p}. \sup_{x \in \mathbb{R}} (1+x^2)|\varphi(x)| \\
&= \|f\|_{L_p}. p_{1,0}(\varphi) \quad ; \varphi \in S(\mathbb{R})
\end{aligned}$$

و حسب المبرهنة (3) يكون T_f توزيعاً من $\acute{S}(\mathbb{R})$.

(3) ليكن $f \in L_\infty(\mathbb{R})$. عندئذٍ يكون لدينا بحسب متراجحة هولدر :

$$\begin{aligned}
&|T_f(\varphi)| \le \|f\|_{L_\infty}. \|\varphi\|_{L_1} \\
&= \|f\|_{L_\infty} \int_{\mathbb{R}} |\varphi(x)|dx \\
&= \|f\|_{L_\infty} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+x^2}(1+x^2).|\varphi(x)|dx \\
&\le \|f\|_{L_\infty} \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{dx}{1+x^2}\right) \sup_{x \in \mathbb{R}} (1+x^2).|\varphi(x)| \\
&= \pi \|f\|_{L_\infty}. p_{1,0}(\varphi) \quad ; \varphi \in S(\mathbb{R})
\end{aligned}$$

و حسب المبرهنة (3) يكون T_f توزيعاً من $\acute{S}(\mathbb{R})$.

ملاحظة (2): نستفيد من المعلومات الموجودة في [3] .

فيما يلي نبين أنه يمكن مطابقة كل دالة $f \in L_p(\mathbb{R})$ مع التوزيع $T_f \in \acute{S}(\mathbb{R})$, و بالتالي يمكن اعتبار $L_p(\mathbb{R})$ كفضاءات جزئية من فضاء التوزيعات $\acute{S}(\mathbb{R})$ ،ويتم ذلك كما يلي:

لنعرف تطبيقاً Φ بالشكل:

$$\Phi: L_p(\mathbb{R}) \longrightarrow \acute{S}(\mathbb{R}) \quad ; \quad f \to T_f$$

هذا التطبيق متباين لأنه:

إذا كان $f,g \in L_p(\mathbb{R})$ و كان $T_f, T_g \in \acute{S}(\mathbb{R})$ التوزيعين الموافقين, و فرضنا $T_f = T_g$ فإن:

$$T_f(\varphi) = T_g(\varphi) \;\; ; \; \forall \varphi \in S(\mathbb{R})$$

و هذا يعني:

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x)dx = \int_{\mathbb{R}} g(x)\varphi(x)dx \;\; ; \;\; \forall \varphi \in S(\mathbb{R})$$

و بالتالي يكون:

$$\int_{\mathbb{R}} [f(x) - g(x)]\, \varphi(x)dx = 0 \;\; ; \;\; \forall \varphi \in S(\mathbb{R})$$

و ينتج من ذلك أن $f - g = 0(ae)$ و بالتالي $f = g(ae)$ (أي أن الدالتين f و g متساويتان تقريباً في كل مكان على $\mathbb{R}$. لذلك تكونا متساويتين في $L_p(\mathbb{R})$. أي أن:

$$T_f = T_g \;\Rightarrow f = g \;\; ; \;\; f,g \in L_p(\mathbb{R})$$

و هذا يعني أن التطبيق Φ متباين (واحد – لواحد). لذلك يمكن مقابلة كل دالة$f \in L_p(\mathbb{R})$ بتوزيع موافق $T_f \in \acute{S}(\mathbb{R})$, و بالعكس.

ملاحظة (3): لنفرض أنه من أجل كل$f \in L_p(\mathbb{R})$ يمكن تعريف الدالي T_f بالشكل: **[2] و [8] و [9]** :

$$(16) \quad T_f(\varphi) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x)dx \;\; ; \;\; \forall \varphi \in S(\mathbb{R})$$

و بما أن المطابقة $f \leftrightarrow T_f$ صحيحة فيمكن كتابة هذه العلاقة بالشكل:

$$(17) \;\; f(\varphi) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x)dx \;\; ; \; \varphi \in S(\mathbb{R})$$

و هذه العلاقة ستكون خطوة الانطلاق لبناء قاعدة في الفضاءات $S(\mathbb{R})$ و $\acute{S}(\mathbb{R})$ و أيضاً لتعميم النشر وفق دوال هرميت إلى الفضاءات $L_p(\mathbb{R})$ من أجل كل قيم p حيث $1 \le p \le \infty$.

لنأخذ $\varphi = h_n$ فنجد:

$$(18) \quad f(h_n) = \int_{\mathbb{R}} f(x)h_n(x)\,dx = a_n(f)\,; n = 0,1,2,\ldots$$

حيث $a_n(f)$ عوامل فورييه للدالة f .

الآن نأخذ $f = h_n$ فنجد:

$$(19) \quad h_n(\varphi) = \int_{\mathbb{R}} h_n(x)\,\varphi(x)dx = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x)h_n(x)dx = a_n(\varphi).$$

حيث $a_n(\varphi)$ عوامل فورييه للدالة $\varphi \in S(\mathbb{R})$.

و بما أن $S(\mathbb{R}) \subset L_p(\mathbb{R})$ من أجل $1 \le p \le \infty$ فيكون لدينا ما يلي:

$a_n(\varphi)$ عوامل فورييه للدالة φ إذا ما اعتبرنا أن $\varphi \in L_p(\mathbb{R})$ ،

و $a_n(\varphi) = \langle \varphi, h_n \rangle$ عوامل فورييه للدالة φ إذا ما اعتبرنا أن $\varphi \in L_2(\mathbb{R})$

.

مبرهنة (5): كل دالة $\varphi \in S(\mathbb{R})$ يمكن نشرها بسلسلة من الشكل:

$$\varphi = \sum_{n=0}^{\infty} \langle \varphi, h_n \rangle h_n$$

متقاربة من φ نفسه في الفضاء $S(\mathbb{R})$ (التقارب بأسرة أنصاف النظم p_k).

الإثبات: ليكن $\varphi \in S(\mathbb{R}) \subset L_2(\mathbb{R})$. عندئذٍ يكون (السلسلة متقاربة في $L_2(\mathbb{R})$).

$$\varphi = \sum_{n=0}^{\infty} \langle \varphi, h_n \rangle h_n$$

نضع الآن:

$$\varphi_N = \sum_{n=0}^{N} \langle \varphi, h_n \rangle h_n \quad ; \quad N = 1,2,\ldots$$

فنجد أن $\varphi_N \in S(\mathbb{R})$, كما أن:

$$\varphi - \varphi_N = \sum_{n=N+1}^{\infty} \langle \varphi, h_n \rangle h_n \;; \; N = 1,2,\ldots$$

لدينا الآن حسب متراجحة شفارتز:

$$p_k(\varphi-\varphi_N)=\sup_n \left|\langle H^k(\varphi-\varphi_N),h_n\rangle\right|$$
$$\le \sup_n \|H^k(\varphi-\varphi_N)\|_{L_2(\mathbb{R})}.\|h_n\|_{L_2(\mathbb{R})}$$
$$=\|H^k(\varphi-\varphi_N)\|_{L_2(\mathbb{R})}\xrightarrow[N\to\infty]{}0$$

بذلك يكون: $$p_k(\varphi-\varphi_N)\xrightarrow[N\to\infty]{}0$$

و منه نحصل على المطلوب.

و الآن نبين أن دوال هرميت $\{h_n(x)\}$ تشكل قاعدة للفضاء $\acute{S}(\mathbb{R})$.

من أجل $T\in\acute{S}(\mathbb{R})$ نضع:

$$a_n(T)=T(h_n)\quad ;\quad n=0,1,2,\dots\dots$$

و نسمي الأعداد $a_n(T)$ عوامل فورييه للتوزيع T .

مبرهنة (*6*): كل توزيع $T\in\acute{S}(\mathbb{R})$ يمكن نشره بسلسلة فورييه من الشكل:

$$(20)\qquad T=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(T)h_n\ ;$$

(التقارب في $\acute{S}(\mathbb{R})$).

الإثبات: بحسب المبرهنة (5) يكون لدينا من أجل أي $\varphi\in S(\mathbb{R})$:

$$\varphi=\sum_{n=0}^{\infty}\langle\varphi,h_n\rangle h_n=\lim_{N\to\infty}\sum_{n=0}^{N}\langle\varphi,h_n\rangle h_n$$

و بما أن T دالي خطي و مستمر فيكون لدينا:

$$T(\varphi)=T\left(\lim_{N\to\infty}\sum_{n=0}^{N}\langle\varphi,h_n\rangle h_n\right)=\lim_{N\to\infty}\mathrm{T}\left(\sum_{n=0}^{N}\langle\varphi,h_n\rangle h_n\right)=$$
$$=\lim_{N\to\infty}\sum_{n=0}^{N}\langle\varphi,h_n\rangle T(h_n)=\lim_{N\to\infty}\sum_{n=0}^{N}\langle\varphi,h_n\rangle a_n(T)\,.$$

و بالاستفادة من (19) نجد:

$$\mathrm{T}(\varphi)=\lim_{N\to\infty}\sum_{n=0}^{N}h_n(\varphi)a_n(T)=\left(\lim_{N\to\infty}\sum_{n=0}^{N}a_n(T)h_n\right)(\varphi)\,.$$

و منه نحصل على المطلوب.

الآن سنقوم بتعميم النشر وفق دوال هرميت إلى الفضاءات $L_p(\mathbb{R})$ من أجل $1 \leq p \leq$ ∞:

كل تابع $f \in L_p(\mathbb{R})$ ، حيث $\frac{4}{3} < p < 4$ ، يمكن نشره بسلسلة من الشكل:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(f)\, h_n(x)\,,$$

وهذا النشر لا يصح من أجل p خارج المجال $\left]\frac{4}{3}\,,4\right[$ ، [9] .

والآن سنقوم بتعميم هذا النشر ليصبح صحيحاً من أجل كل قيم p حيث $1 \leq p \leq$ ∞ و ذلك بالاستعانة بالفضاءات $S(\mathbb{R})$ و $\acute{S}(\mathbb{R})$:

ليكن $f \in L_p(\mathbb{R})$, فتكون عوامل فورييه له:

$$a_n(f) = \int_{\mathbb{R}} f(x) h_n(x) dx \quad ; \quad n = 0,1,2, \dots \dots$$

و ليكن $T_f \in \acute{S}(\mathbb{R})$ التوزيع الموافق لـ f بحسب المبرهنة (4). عندئذٍ:

$$a_n(T_f) = T_f(h_n) = \int_{\mathbb{R}} f(x) h_n(x) dx = a_n(f) \;\; ; \;\; n = 0,1,2, \dots .. \qquad (21)$$

و بحسب المبرهنة (6) يكون لدينا:

$$T_f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(T_f)\, h_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(f)\, h_n \quad ; \quad \left(f \in L_p(\mathbb{R})\right) \qquad (22)$$

و بحسب المطابقة $f \leftrightarrow T_f$ يكون ل f السلسلة التالية (المتقاربة في $\acute{S}(\mathbb{R})$).

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(f)\, h_n \quad ; f \in L_p(\mathbb{R}) \qquad (23)$$

بذلك نكون قد أوجدنا تعميماً لنشر دوال الفضاءات $L_p(\mathbb{R})$ وفق القاعدة $\{h_n\}$, حيث $1 \leq p \leq \infty$.

References المراجع

[1] V. I. Bogachev, O. G. Smolyanov: Topological Vector Spaces and their Applications. Springer Monographs in Mathematics, 2017.

[**2**] **B. Casselman:** Introduction to topological vector spaces. University of British Columbia, 2016.

[3] I. Ibrahim: On Eigenfunction Expansions of The Hermite Differential Operator on R^n. Int. Trans. Special Func. **Vol. 13** (2002), pp. 555–574.

[4] M. Infusino: Topological Vector Spaces University of Konstanz. 2016

[5] A. Kriegl: Higher Functional Analysis , locally Vector spaces and Spectral Theory. Vienna University, 2012

[6] N. M. Temme: Special Functions. An Introduction to the Classical Functions of Mathematical Physics. John Wiley & Sons, New York 1996

[7] J. F. Treves: Topological Vector Spaces, Distributions and Kernels. Academic Press, New York 1967.

[8] H. Triebel: Higher Analysis. J. A. Barth, Leipzig 1992.

[9] S. Thangavelu: Lectures on Hermite and Laguerre Expansions. Princeton University Press, 1993.

.**[10] J. Wloka:** Partial Differential Equations, Lokally Convex Spaces… BSB B.G Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1982.