حدود نوع ميلاس للقيم الذاتية لمؤثر لابلاس ديريخليه تحت حقل مغناطيسي ثابت

سهى علي سلامه[1], أ. د. ابراهيم ابراهيم[2], أ. د. ياسين خلوف[3]

[1]طالبة دكتوراه في قسم الرياضيات, كلية العلوم, جامعة البعث, سوريا

[2]قسم الرياضيات, كلية العلوم, جامعة البعث, سوريا

[3] قسم الرياضيات, كلية العلوم, جامعة البعث, سوريا

الملخص

نقدّم في هذا البحث نظرة عامة عن التقديرات الطيفية لمؤثر لابلاس ديريخليه على فترات محدودة. كما سنقدم مفهوم حدود نوع ميلاس التي هي نوع مميز من المتباينات لمجموع القيم الذاتية و أثرها. و سندرس مجموع القيم الذاتية لمؤثر لابلاس ديريخليه في ظل وجود حقل مغناطيسي ثابت على النطاق $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ مع حجم منتهٍ, ونثبت حدود نوع ميلاس لمجموع القيم الذاتية في هذه الحالة من دون فرضيات متباينة هاردي.

الكلمات المفتاحية:

مؤثر لابلاس ديريخليه, التقديرات الطيفية, متباينة Berezin, متباينة Li_Yau, حدود نوع ميلاس, حقل مغناطيسي.

Melas_type bound for the eigenvalue sum of the Dirichlet Laplacian in a constant magnetic field

Abstract

In this work we give an overview over spectral estimates for the Dirichlet Laplacian on bounded domains. In addition we introduce the term Melas_type bound, which is a special kind of inequality for the eigenvalue sum and its trace, and we study the eigenvalue sum of the Dirichlet Laplacian a constant magnetic field on a domain $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ with finite volume. We prove a Melas_type bound for the eigenvalue sum in this case and that will be without the assumption of a Hardy inequality.

Key Words:

Dirichlet Laplacian, the spectral estimates, Berezin inequality, Li_Yau inequality, Melas_type bound, magnetic field.

مقدمة:

لقد أصبح تحليل المؤثرات التفاضلية و طيفها واحداً من الأهداف الرئيسة في الفيزياء الرياضية, و ذلك لأهميتها في وصف العديد من الظواهر الفيزيائية مثل الاهتزازات الميكانيكية و الأصوات و حركة السوائل أو الجسيمات و غيرها... فمثلاً تم الاكتشاف في القرنين الثامن عشر و التاسع عشر أنه في الجمل الاهتزازية مثل ترددات الطبل فإن هذه الترددات تكون متوافقة مع الدوال الذاتية لمؤثر تفاضلي. حيث إن الموجات الموافقة هي الموصوفة رياضياً بالقاعدة المتعامدة من الدوال الذاتية للمؤثر التفاضلي, والتي تسفر عن تجزئة قانونية canonical decomposition لفضاء هيلبرت الرديف الذي يؤثر فيه المؤثر التفاضلي المترافق ذاتياً, وهذا ما يعرف الآن بمبرهنة التمثيل الطيفي و اختصاراً بالمبرهنة الطيفية.

في بداية القرن العشرين تم إحداث تقدم من قبل العالم Hermann Weyl الذي قام بتحليل القيم الذاتية لمؤثر لابلاس_ ديريخليه على نطاق محدود, و وجد أن السلوك التقاربي لدالة القيم الذاتية العدودة يتناسب مع حجم النطاق الموافق, ما أدى إلى أولى الارتباطات بين النظريات الكلاسيكية و ميكانيك الكم, لتكون تلك ساعة ولادة التحليل الطيفي spectral analysis.

هدف البحث:

إن هدفنا في هذا البحث هو دراسة مجموع القيم الذاتية لمؤثر لابلاس_ ديريخليه في وجود حقل مغناطيسي ثابت في نطاق ذي بعدين و ذي حجم منتهٍ, لننتقل بعدها إلى إثبات حدود نوع ميلاس لأجل هذا المجموع.

منهجية البحث:

قبل دراسة مجموع القيم الذاتية لمؤثر لابلاس في وجود حقل مغناطيسي ناقشنا مجموع القيم الذاتية لمؤثر لابلاس و ناقشنا التحسينات لأجلها و لأجل الأثر, ثم انطلقنا اعتماداً عليها للوصول لمناقشة تحسينات المتباينات الناتجة في حالة وجود حقل مغناطيسي.

1. مفاهيم لازمة:

تعريف1.1: [11] لتكن $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ نطاقاً محدوداً, و X حقلاً متجهاً على Ω و هو مؤثر تفاضلي جزئي من المرتبة الأولى و ذو قيم حقيقية له الشكل:

$$X = \sum_{j=1}^{n} a_j(x)\, \partial_{x_j}$$

حيث $a_j : \Omega \to \mathbb{R}$ دالة مستمرة حسب ليبشتز.

لتكن $m \in \mathbb{N}$ و $X_1, \dots, X_m$ حقولاً متجهة, عندئذٍ نفرض مجموع المؤثرات التفاضلية فيما يتعلق بشروط حدود ديريخليه على Ω بالشكل:

$$A(\Omega) := -\sum_{j=1}^{m} X_j^2 + V$$

حيث $V \in L^1_{loc}(\Omega)$ هو كمون (potential) غير سالب, و الحقول المتجهة لها الشكل:

$$X_j = \sum_{k=1}^{n} a_{j,k}(x)\, \partial_{x_k}$$

وتحقق الشرط الإضافي: $\partial_{x_k}\, a_{j,k}(x) = 0$ لأجل كل $k \in \{1, \dots, n\}$.

تعريف1.2: [5] نفرض تحويل ليجندر (Legendre transform) لدالة $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ و لأجل $p \geq 0$ مُعرف بالشكل:

$$f^*(p) := \sup_{x \geq 0} \left(px - f(x)\right).$$

تعريف1.3: متباينة هاردي [2]

أثبت G. H. Hardy في محاولته إيجاد إثبات أبسط لمتباينة هيلبرت أنه لأجل أي دالة موجبة $f \in L^p(0, \infty)$ حيث $p > 1$ تتحقق العلاقة:

$$\int_0^\infty \left(\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\, dt\right)^p \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \int_0^\infty \left(f(x)\right)^p dx$$

و قد سميت هذه المتباينة متباينة هاردي.

و تُعطى متباينة هاردي في الأبعاد العليا لأجل كل $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ و $n \geq 3$ بالشكل:

$$\frac{(n-2)^2}{4}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{|u(x)|^2}{\|x\|_e^2}\,dx \leq \int_{\mathbb{R}^n}|\nabla u(x)|^2\,dx$$

حيث $\|x\|_e$ ترمز إلى الطول (النظيم) الإقليدي لـ $x \in \mathbb{R}^n$ و ∇ تدرج الدالة u.

توطئة 1.1: [2] لنفرض نطاقاً محدوداً $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ عندئذٍ فإنه لأجل كل $u \in C_0^\infty(\Omega)$ توجد ثابت أصغر أمثلي $c(\Omega) > 0$ يحقق:

$$\int_\Omega \frac{|u(x)|^2}{\delta_e(x)^2}\,dx \leq c_e(x)^2\int_\Omega|\nabla u(x)|^2\,dx$$

حيث إن: $\delta_e(x) = dist(x,\partial\Omega)$ بالمعنى الإقليدي, و لأجل Ω محدبة يكون $c_e(x) = 2$.

تمهيدية 1.1: [11] لتكن $\{0\} \neq \Omega \subset \mathbb{R}^n$ نطاق ذي قياس منتهٍ $|\Omega| < \infty$ عندئذٍ يوجد نقطة $p \in \Omega$ بحيث: $B_{R_e(\Omega)}(p) \subseteq \Omega$

حيث $B_{R_e(\Omega)}(p) := \{y \in \mathbb{R}^n : \|p-y\|_e < R_e(\Omega)\}$

و $R_e(\Omega) := \sup_{x\in\Omega}\delta_e(x)$ و $\delta_e(x) := \inf_{y\in\partial\Omega}\|x-y\|_e$

تمهيدية 1.2: [11] لتكن $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ مجموعة محدبة مفتوحة و محدودة, عندئذٍ يكون لدينا:

$$\frac{|\Omega^\beta|}{\beta} \geq \frac{|\Omega|}{R_e(\Omega)}$$

و ذلك لأجل كل $\beta \in (0, R_e(\Omega)]$ و حيث $\Omega^\beta := \{x \in \Omega : \delta_e(x) < \beta\}$

و يُرمز لقياس ليبيغ بالبعد n لـ Ω بالرمز $|\Omega|$.

تمهيدية 1.3: $[1],[3]$ إن العلاقة الآتية محققة:

$$\int_{\mathbb{R}^2}\left(\int_{\Omega}\left|P_{k,B}(x,y)\right|^2 dy\right)dx = \int_{\Omega}\left(\int_{\mathbb{R}^2} P_{k,B}(x,y)\, P_{k,B}(x,y)\, dx\right)dy$$
$$= \int_{\Omega} P_{k,B}(y,y)dy = \frac{B}{2\pi}|\Omega|$$

حيث $P_{k,B}$ هي نواة التكامل للمسقط المتعامد في $L^2(\mathbb{R}^2)$ على سوية Landau (Landau level) الموافق لـ k و هو $B(2k-1)$ لهاملتوني Landau مع حقل مغناطيسي ثابت لأجل $B>0$ و $k\in\mathbb{N}$, و يكون:

$$P_{k,B}(y,y) = \frac{1}{2\pi}\,B \qquad ;y\in\mathbb{R}^2$$

تمهيدية 1.4: $[11]$ لتكن $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ نطاق بقياس منتهٍ, عندئذٍ يتحقق:

$$\left|\Omega^{\beta}\right| \geq \left|B_{R_e(\Omega)}(0)\right| - \left|B_{R_e(\Omega)-\beta}(0)\right| \geq \beta\, R_e(\Omega)\pi$$

و ذلك لأجل كل $\beta\in(0,R_e(\Omega)]$

المناقشة:

لتكن $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ نطاقاً مفتوحاً و محدوداً, و لنفرض مؤثر لابلاس ديريخليه (Dirichlet Laplacian) $-\Delta_{\Omega}$ على $L^2(\Omega)$ مرتبط مع الصيغة التربيعية نصف المحدودة (semi_bounded quadratic form) : $[7]$

$$a[u] := \int_{\Omega}|\nabla u(x)|^2 dx = \sum_{j=1}^{n}\int_{\Omega}\left|\partial_{x_j}u(x)\right|^2 dx$$

حيث مجموعة تعريفه فضاء جزئي من فضاء سوبوليف $H_0^1(\Omega)$.

و بما أن الغمر:

$$H_0^1(\Omega)\to L^2(\Omega)$$

متراص فإن طيف المؤثر غير السالب $-\Delta_{\Omega}$ يكون متقطع (discrete) و يتراكم فقط في اللانهاية.

لنرمز بـ $\{\lambda_j\}_{j\in\mathbb{N}} = \{\lambda_j(\Omega)\}_{j\in\mathbb{N}}$ لمتتالية موجبة غير متناقصة من القيم الذاتية لـ $-\Delta_\Omega$.

لقد درس العالم الألماني Hermann Weyl دالة عد القيم الذاتية (The eigenvalue counting function)

$$N(\lambda,\Omega) := \{j \in \mathbb{N};\, \lambda_j(\Omega) < \lambda\}$$

و أثبت النتيجة الأساسية الآتية:

$$\lim_{\lambda\to\infty} N(\lambda,\Omega)\,\lambda^{-\frac{n}{2}} = \frac{\tau_n}{(2\pi)^n}\,|\Omega| \qquad (1,1)$$

حيث $|\Omega|$ هو قياس ليبيغ بالبعد n لـ Ω, و τ_n هو حجم كرة الواحدة في $\mathbb{R}^n$.
تسمى النهاية في العلاقة $(1,1)$ بقانون وايل (Weyl's law) أو مقاربات وايل (Weyl asymptotitcs).

سندرس بشكل خاص ما يسمى بمتوسطات ريس (Riesz means) للقيم الذاتية, وتُعطى بالشكل: **[4]**, **[6]**

$$R_\gamma(\lambda,\Omega) = Tr(A(\Omega)-\lambda)_-^\gamma := \sum_{k\in\mathbb{N}:\,\lambda_k(\Omega)<\lambda} \left(\lambda - \lambda_k(\Omega)\right)^\gamma \qquad (1,2)$$

لأجل كل $\gamma \geq 0$.

و لأجل $\gamma = 0$ فإنها ببساطة تعطي دالة عد القيم الذاتية $\lambda > \lambda_j(\Omega)$.

إن متوسطات ريس هذه تحقق مقاربات وايل: **[4][7]** ,

$$Tr(A(\Omega)-\lambda)_-^\gamma = L_{\gamma,n}^{cl}|\Omega|\lambda^{\gamma+\frac{n}{2}} - \frac{1}{4}\,L_{\gamma,n-1}^{cl}|\partial\Omega|\lambda^{\gamma+\frac{(n-1)}{2}} + o\left(\lambda^{\gamma+\frac{(n-1)}{2}}\right) \qquad (1.3)$$

عندما $\lambda \to +\infty$, و يعرف ثابت Lieb_ Thirring الكلاسيكي بالشكل:

$$L_{\gamma,n}^{cl} := \frac{\Gamma(\gamma+1)}{(4\pi)^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\gamma+\frac{n}{2}+1\right)}$$

متباينة Berezin : [8]

لقد وضع التقدير الأول لمتوسطات ريس من قبل F. A. Berezin عام 1972 حيث أثبت أن النهاية شبه الكلاسيكية semi classical limit للمتغير الرئيس leading term في (1.3) تعطي حداً منتظماً لأجل بعض متوسطات ريس. وبشكل خاص لأجل النطاق $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ مع حجم منتهٍ, و لأجل كل $\gamma \geq 1$ يكون:

$$Tr(A(\Omega)-\lambda)_{-}^{\gamma} \leq L_{\gamma,n}^{cl}|\Omega|\lambda^{\gamma+\frac{n}{2}} \qquad (1.4)$$

حيث $\lambda \geq 0$.

تدعى هذه المتباينة متباينة Berezin أو تدعى متباينة Berezin_Lieb.

ملاحظة: إن تحويل ليجندر يحول المتباينات لأجل متوسطات ريس بالمرتبة واحد إلى متباينات لأجل مجموع القيم الذاتية.

متباينة Li_You: [9]

إن تحويل ليجندر يحول (1.4) لأجل $\gamma = 1$ إلى:

$$\sum_{j=1}^{k}\lambda_j(\Omega) \geq C_n|\Omega|^{-\frac{2}{n}}\ k^{1+\frac{2}{n}}\ ;\ C_n = (2\pi)^2\tau_n^{-\frac{2}{n}}\frac{n}{n+2}\ , k \in \mathbb{N} \quad (1.5)$$

و تدعى هذه المتباينة بمتباينة Li_You.

حدود نوع ميلاس the Melas_ type bound: [10]

سنناقش الآن وجود تحسينات لأجل الأثر و مجموع القيم الذاتية.

لقد تم الحصول على عدة نتائج في هذا الاتجاه سواء لأجل متباينة Berezin أو لأجل تقدير Li_Yau. و بشكل خاص فقد أثبت Melas أنه يوجد ثابت موجب M_n بحيث من أجل أي مجموعة مفتوحة محدودة Ω يتحقق:

$$\sum_{j=1}^{k} \lambda_j(\Omega) \geq C_n|\Omega|^{-\frac{2}{n}}\ k^{\frac{n+2}{n}} + M_n\ \frac{|\Omega|}{I(\Omega)}\ k \quad ;k \in \mathbb{N} \qquad (1.6)$$

وحيث $I(\Omega) := \min\limits_{a\in\mathbb{R}^n} \int_\Omega |x-a|^2 dx$

هي العزم الثاني للمجموعة Ω, و $M_n > 0$ تعتمد فقط على البعد.

و من ثنوية تحويل ليجندر نحصل على أنه لأجل كل $1 \leq \gamma$ و $0 \leq \lambda$ يتحقق:

$$Tr(A(\Omega)-\lambda)_-^{\gamma} \leq L_{\gamma,n}^{cl}|\Omega|\left(\lambda - M_n\ \frac{|\Omega|}{I(\Omega)}\right)^{\gamma+\frac{n}{2}} \qquad (1.7)$$

و يطلق على هذه المتباينات حدود نوع ميلاس.

2 . مؤثر لابلاس ديريخليه المغناطيسي

magnetic Dirichlet Laplacian [1], [3], [7]

سندرس حالة النسخة المغناطيسية $\mathcal{H}(\mathcal{A}) = (i\nabla + A(x))^2$ على $L^2(\Omega)$ لمؤثر لابلاس_ ديريخليه العادي, وهذه النسخة تكون مولدة بالصيغة التربيعية المغلقة:

$$\|(i\nabla + \mathcal{A})u\|_{L^2(\Omega)}^2 \ ;u \in H_0^1(\Omega) \qquad (2.1)$$

حيث $\mathcal{A}(x) := \frac{B}{2}(-x_2, x_1)^T$ أي $\mathcal{A}(x) = \begin{bmatrix} -\frac{B}{2}\ x_2 \\ \frac{B}{2}\ x_1 \end{bmatrix}$

لأجل $x := (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$

و $\nabla := \left(\partial_{x_1}, \partial_{x_2}\right)$ و $B > 0$

و الكمون (potential) $\mathcal{A}$ يحقق $curl\ \mathcal{A} = B$ محققاً حقلاً مغناطيسياً ثابتاً.

ويكون نظيم سوبوليف المغناطيسي على النطاق المحدود Ω مكافئاً لنظيره بالحالة غير المغناطيسية و المؤثر $\mathcal{H}(\mathcal{A})$ له طيف منفصل أيضاً. لنرمز لقيمه الذاتية في الحالة المغناطيسية بالرمز $\lambda_j(\Omega,\mathcal{A})$. و تكون متوسطات ريس محققة لنفس علاقة مقاربات وايل لأجل $n=2$, أي يتحقق:

$$\lim_{\lambda\to\infty} \lambda^{-1-\gamma}\, Tr(\mathcal{H}(\mathcal{A})-\lambda)_{-}^{\gamma} = L_{\gamma,n}^{cl}|\Omega|$$

حيث $L_{\gamma,n}^{cl} := \left(4\pi(\gamma+1)\right)^{-1}$

تقدير Li_Yau لمجموع القيم الذاتية لمؤثر لابلاس تحت حقل مغناطيسي: [11]

لأجل كل $n\in\mathbb{N}$ فإنه يتحقق:

$$\sum_{j=1}^{k}\lambda_j(\Omega,\mathcal{A}) \geq \frac{2\pi}{|\Omega|}n^2 \qquad (2.2)$$

حدود نوع ميلاس للقيم الذاتية لمؤثر لابلاس تحت حقل مغناطيسي:

لأجل ثابت $C(\Omega)$ و $0<\alpha<2$ فإنه يمكن إعطاء تحسين للمتباينة (2.2) بحيث يتحقق:

$$\sum_{j=1}^{k}\lambda_j(\Omega,\mathcal{A}) \geq \frac{2\pi}{|\Omega|}n^2 + C(\Omega)\, n^{\alpha}\ ;\ n\in\mathbb{N} \qquad (2.3)$$

و الآن نبدأ بإثبات أولى المبرهنات في البحث.

مبرهنة 2.1: لتكن $0<\beta\leq R_e(\Omega)$ عندئذٍ و بنفس فرضيات التمهيدية 1.4 تتحقق العلاقة الآتية:

$$\int_{A^{\beta}+p} |u(x)|^2\,dx \leq \beta^2 \int_{\Omega}\left|\left(i\nabla+\mathcal{A}(x)\right)u(x)\right|^2 dx \qquad (2.4)$$

و ذلك لأجل كل $u\in C_0^{\infty}(\Omega)$

وحيث:

$$A^{\beta} := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \exists (r,\varphi) \in E(\beta); (x_1, x_2) = \Phi(r,\varphi)\}$$

$$(x_1, x_2) = r(cos\varphi, sin\varphi) := \Phi(r,\varphi) \in \mathbb{R}^2$$

و $\varphi \in [0, 2\pi)$ و $r > 0$

و $E(\beta) := (b_{\varphi} - \beta, b_{\varphi}) \times [0, 2\pi)$

$$b_{\varphi} := inf\{t > 0, t(cos\varphi, sin\varphi) \notin \Omega\}$$

و يتم اختيار $p \in \mathbb{R}^2$ بحيث $B_{R_e(\Omega)}(p) \subseteq \Omega$.

الإثبات:

لتكن $u \in C_0^{\infty}(\Omega)$ و لنأخذ أولاً النقطة $p = (0,0)$.

لنأخذ التكامل على الطرف الأيسر و ننتقل إلى الإحداثيات القطبية لنصل إلى العلاقة:

$$\int_{A^{\beta}} |u(x)|^2\, dx = \int_0^{2\pi} \int_{b_{\varphi}-\beta}^{b_{\varphi}} |u(r,\varphi)|^2 r\, dr\, d\varphi$$

إن المجموعة $\{\varphi \in [0, 2\pi); b_{\varphi} = \infty\}$هي مجموعة خالية حيث $|\Omega|$ له حجم منتهٍ, و بالتالي فإن b_{φ} موجود تقريباً في كل مكان.

لأجل $u \in C_0^{\infty}(\Omega)$ لدينا $u(b_{\varphi}, \varphi) = 0$ تقريباً لأجل كل $\varphi \in [0, 2\pi)$, وبتطبيق متباينة هاردي الآتية:

$$\int_{b_{\varphi}-\beta}^{b_{\varphi}} |u(r,\varphi)|^2 r\, dr \le \beta^2 \int_{b_{\varphi}-\beta}^{b_{\varphi}} |\partial_r u(r,\varphi)|^2 r\, dr$$

التي تكون محققة إذا كانت العلاقة الآتية صحيحة:

$$\sup_{b_\varphi-\beta \le \tau \le b_\varphi} \left(\int_{b_\varphi-\beta}^{\tau} s\, ds\right)\left(\int_{\tau}^{b_\varphi} \frac{1}{s}\, ds\right) \le \frac{\beta^2}{4}$$

و الآن بالعودة إلى الإحداثيات السابقة نحصل على:

$$\int_{A^\beta} |u(x)|^2\, dx \ \le \beta^2 \int_\Omega |\nabla u(x)|^2\, dx$$

إن هذه المتباينة لا متغيرة الانسحاب, وهكذا فإننا نتخلص من الفرض $p = (0,0)$ و نحصل على:

$$\int_{A^\beta+p} |u(x)|^2\, dx \ \le \beta^2 \int_\Omega |\nabla u(x)|^2\, dx$$

حيث نعلم أن $|u| \in H_0^1(\Omega)$.

و بالتالي يكون:

$$\int_{A^\beta+p} |u(x)|^2\, dx \ \le \beta^2 \int_\Omega (\nabla |u(x)|)^2\, dx$$

و نحصل على المطلوب بتطبيق المتباينة المغناطيسية:

$$\big|\nabla |u(x)|\big| \le \big|\big(i\nabla + \mathcal{A}(x)\big)u(x)\big| \quad a.e.\ \ x \in \Omega$$

حيث $u \in H_0^1(\Omega)$.

نتيجة:

إن العلاقة الآتية محققة:

$$\left|A^\beta\right| = \int_0^{2\pi} \int_{b_\varphi-\beta}^{b_\varphi} r\, dr\, d\varphi \ge \int_0^{2\pi} \int_{R_e(\Omega)-\beta}^{R_e(\Omega)} r\, dr\, d\varphi$$
$$= \left|B_{R_e(\Omega)}(0)\right| - \left|B_{R_e(\Omega)-\beta}(0)\right| \qquad (2.5)$$

و ذلك لأجل كل $\beta \in (0, R_e(\Omega)]$.

تمهيدية 2.1:[7]

إن العلاقة الآتية محققة:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\big(\lambda - B(2k-1)\big)_{+} \le \frac{\lambda^2}{4B} \quad ;\lambda > 0$$

و الآن نثبت صحة المبرهنة الأساسية لهذا البحث.

مبرهنة:

ليكن $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ نطاق منتهٍ محدود عندئذٍ لأجل كل $n \in \mathbb{N}$ يتحقق:

$$\sum_{j=1}^{k}\lambda_j(\Omega,\mathcal{A}) \ge \frac{2\pi}{|\Omega|}n^2 + \frac{R_e(\Omega)^2}{32}\frac{\pi^2}{|\Omega|^2}\, n$$

الإثبات:

ليكن $\mathcal{H}(\mathcal{A})$ تمديد Friedrichs للصيغة التربيعية (2.1) حيث

$$\mathcal{H}(\mathcal{A})\,\Phi_j = \lambda_j(\Omega,\mathcal{A})\,\Phi_j$$

لأجل $j \in \mathbb{N}$.

و الدوال Φ_j فرضت بحيث تشكل قاعدة متعامدة في $L^2(\Omega)$.

لنضع:

$$f_{k,j}(x) := \int_{\Omega} P_{k,B}(x,y)\Phi_j(y)dy$$

و لنفرض:

$$Tr(\mathcal{H}(\mathcal{A})-\lambda)_{-} = \sum_{j:\lambda_j(\Omega,\mathcal{A})<\lambda}\left(\lambda\left\|\Phi_j\right\|_{L^2(\Omega)}^2 - \left\|(i\nabla+\mathcal{A})\Phi_j\right\|_{L^2(\Omega)}^2\right)$$

نقوم بتمديد هذه الدوال بواسطة العلاقة $\Phi_j(x) = 0$ لأجل $x \in \Omega^c$ لتطبيق المبرهنة الطيفية لـ $\mathcal{H}(\mathcal{A},\mathbb{R}^2)$.

لكي نعرف فيما إذا كانت Φ_j تقع ضمن نطاق $\mathcal{H}(\mathcal{A},\mathbb{R}^2)$ يجب أن نقرب Φ_j بواسطة الدوال $C_0^\infty(\Omega)$ فيما يتعلق بالصيغة التربيعية (2.1).

بتطبيق مبرهنة Fatou ينتج عندئذٍ:

$$Tr(\mathcal{H}(\mathcal{A})-\lambda)_{-} \leq \sum_{j:\lambda_j(\Omega,\mathcal{A})<\lambda}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\lambda\left\|f_{k,j}\right\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2-\left\|(i\nabla+\mathcal{A})f_{k,j}\right\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2\right)$$

$$\leq \sum_{j:\lambda_j(\Omega,\mathcal{A})<\lambda}\sum_{k=1}^{\infty}\big(\lambda-B(2k-1)\big)_+\left\|f_{k,j}\right\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\big(\lambda-B(2k-1)\big)_+\left(\sum_{j=1}^{\infty}\left\|f_{k,j}\right\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2-\mathcal{R}(\lambda,k)\right) \quad (2.6)$$

حيث

$$\mathcal{R}(\lambda,k):=\sum_{j:\lambda_j(\Omega,\mathcal{A})\geq\lambda}\left\|f_{k,j}\right\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 \quad (2.7)$$

وباستخدام متطابقة بارسيفال (Parseval) و خواص نواة التكامل $P_{k,B}$ المذكورة سابقاً في التمهيدية 1.3 نحصل على:

$$\sum_{j=1}^{\infty}\left\|f_{k,j}\right\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2=\int_{\mathbb{R}^2}\sum_{j=1}^{\infty}\left|\langle P_{k,B}(x,.),\Phi_j(.)\rangle_{L^2(\Omega)}\right|^2 dx$$

$$=\int_{\mathbb{R}^2}\int_{\Omega}\left|P_{k,B}(x,y)\right|^2 dy\,dx=\int_{\Omega}P_{k,B}(y,y)\,dy=\frac{B}{2\pi}|\Omega| \quad (2.8)$$

الخطوة التالية هي إعطاء حد أدنى لـ $\mathcal{R}(\lambda,k)$.

نلاحظ من خلال (2.8) أن:

$$\mathcal{R}(\lambda,k)=\frac{B}{2\pi}|\Omega|-\sum_{j:\lambda_j(\Omega,\mathcal{A})<\lambda}\left\|f_{k,j}\right\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2$$

$$=\int_{\mathbb{R}^2}\int_{\Omega}\left|P_{k,B}(x,y)-\sum_{j:\lambda_j(\Omega,\mathcal{A})<\lambda}f_{k,j}(x)\,\bar{\Phi}_j(y)\right|^2 dy\,dx$$

لتكن $p\in\mathbb{R}^2$ اختيارية بحيث $B_{R_e(\Omega)}(p)\subseteq\Omega$ عندئذٍ نستخدم الاحتواء الآتي $\Omega\supseteq A^{\beta}+p$, و نطبق $|a-b|^2\geq\frac{1}{2}|a|^2-|b|^2$ لأجل $a,b\in\mathbb{C}$.

و مرة ثانية باستخدام خواص نواة التكامل $P_{k,B}$ نحصل على:

$$\mathcal{R}(\lambda,k) \geq \frac{B}{4\pi}\left|A^{\beta}\right| - \int_{\mathbb{R}^2}\int_{A^{\beta}+p}\left|\sum_{j:\lambda_j(\Omega,\mathcal{A})<\lambda} f_{k,j}(x)\,\overline{\Phi}_j(y)\right|^2 dy\,dx$$

$$\geq \frac{B}{4}\beta\, R_e(\Omega) - \int_{\mathbb{R}^2}\int_{A^{\beta}+p}\left|\sum_{j:\lambda_j(\Omega,\mathcal{A})<\lambda} f_{k,j}(x)\,\overline{\Phi}_j(y)\right|^2 dy\,dx \quad (2.9)$$

إن التقدير الأخير هو نتيجة العلاقة (2.5) و التمهيدية 1.4.

و يمكن أن يتم تقدير الحد السالب المتبقي بتطبيق المبرهنة 2.1 حيث إن التركيب الخطي لـ Φ_j لا يزال في نطاق الصيغة لـ $\mathcal{H}(\mathcal{A})$, وتتحقق العلاقة:

$$\int_{\mathbb{R}^2}\int_{A^{\beta}+p}\left|\sum_{j:\lambda_j(\Omega,\mathcal{A})<\lambda} f_{k,j}(x)\,\overline{\Phi}_j(y)\right|^2 dy\,dx \leq \beta^2\int_{\mathbb{R}^2}\sum_{j:\lambda_j(\Omega,\mathcal{A})<\lambda}\lambda_j(\Omega,\mathcal{A})\left|f_{k,j}(x)\right|^2\,dx$$

و الأن نستخدم (2.8) مرة ثانية لنحصل على العلاقة:

$$\beta^2\int_{\mathbb{R}^2}\sum_{j:\lambda_j(\Omega,\mathcal{A})<\lambda}\lambda_j(\Omega,\mathcal{A})\left|f_{k,j}(x)\right|^2\,dx \leq \beta^2\lambda\int_{\mathbb{R}^2}\sum_{j=1}^{\infty}\left|f_{k,j}(x)\right|^2\,dx = \lambda\beta^2\frac{B}{2\pi}|\Omega|$$

و بأخذ هذا التقدير لأجل العلاقة (2.9) فإننا نحصل على الحد الأدنى الآتي:

$$\mathcal{R}(\lambda,k) \geq \frac{B}{4}\,\beta\,R_e(\Omega) - \lambda\,\beta^2\,\frac{B}{2\pi}|\Omega| = \frac{B}{4}\,\beta\,\left(R_e(\Omega) - \lambda\,\beta\,\frac{2}{\pi}\,|\Omega|\right) \quad (2.10)$$

نضع:

$$\beta = \frac{R_e(\Omega)\,\pi}{4\,|\Omega|\,\lambda} \quad (2.11)$$

و للتحقق من أن هذا نأخذ العلاقة (2.2) مما يؤدي للعلاقة:

$$\lambda_1(\Omega, \mathcal{A}) \geq \frac{2\pi}{|\Omega|}$$

فنحصل لأجل $\lambda \geq \lambda_1(\Omega, \mathcal{A})$ على العلاقة:

$$\beta = \frac{R_e(\Omega)\,\pi}{4\,|\Omega|\,\lambda} \leq \frac{R_e(\Omega)\,\pi}{4\,|\Omega|\,\lambda_1(\Omega, \mathcal{A})} \leq \frac{R_e(\Omega)}{8} \leq R_e(\Omega) \qquad (2.12)$$

و بالتالي فالحد الأدنى لـ $\mathcal{R}(\lambda, k)$ يصبح:

$$\mathcal{R}(\lambda, k) \geq \frac{R_e(\Omega)^2\,\pi\,B}{32\,|\Omega|\,\lambda} \qquad (2.13)$$

بتعويض العلاقتين (2.8) و (2.13) في المتباينة (2.6) نحصل على:

$$Tr(\mathcal{H}(\mathcal{A}) - \lambda)_- \leq \sum_{k=1}^{\infty} \left(\lambda - B(2k-1)\right)_+ \left(\frac{B}{2\pi}|\Omega| - \frac{R_e(\Omega)^2\,\pi\,B}{32\,|\Omega|\,\lambda}\right)$$

و باستخدام التمهيدية 2.1 يتم المطلوب.

نتيجة:

ليكن $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ نطاق منتهٍ عندئذٍ يكون:

$$Tr(\mathcal{H}(\mathcal{A}) - \lambda)_- \leq max\left\{0, \frac{|\Omega|}{8\pi}\,\lambda^2 - \frac{\pi\,R_e(\Omega)^2}{128\,|\Omega|}\,\lambda\right\}$$

المراجع

[1] إبراهيم إبراهيم, ياسين خلوف, سهى سلامه, 2021 التقديرات الطيفية لمؤثر لابلاس هايزنبرغ. مجلة جامعة البعث, سوريا.
[2] Aermark. L., 2011_ Spectral and Hardy inequalities for some sub-elliptic operatorsDissertation presented to Stockholm University.
[3] Erdös. L., and Loss. M., and Vougalter. V, 2000_ Diamagnetic behavior of sums Dirichlet eigenvalue. Ann. Inst. Fourier, Grenoble, 891-907.
[4] Frank. R., and Larson. S., 2020_ On the error in the two_term Weyl formula for the Dirichlet Laplacian. arXiv: 2001.01876 v1 (math. Sp).
[5] Frank. R., and Loss. M., and Weidl. T 2007_ Pólya,s conjecture in the presence of a constant magnetic field. arXiv: 0710.1078 v1(math. Sp).
[6] Jia. G., and Wang. J., and Xiong. Y, 2011_ On Riesz mean inequalities for sub-elliptic Laplacian. University of Shanghai for Science and Technology, Applied Mathematics, 694-689.
[7]] Kovařík. H., and Weidl. T., 2013_ Improved Berezin_ Li _ Yau inequality with magnetic field. arXiv1307.7091v1(math. Sp).
[8Larson. S., 2016_ On the remainder term of the Berezin inequality on a convex domain. arXiv1509.06705v3(math. Sp).
[9] Li. P., and Yau. S., 1983_ On the Schödinger equation and the eigenvalue problem. Comm. Math. Phys., 309-318.
[10] Melas. A., 2003_ A lower bound for sums of eigenvalues of the Laplacian. Proc. Amer. Math. Soc. No. 2, 631-636.
[11] Ruszkowski. B., 2017_ Spectral and Hardy inequalities for the Heisenberg Laplacian. Faculty of Mathematics and Physics, University of Stuttgart.