جامعة البعث

كلية العلوم

قسم رياضيات

دراسة استقرار حل جملة معادلات تكاملية_ تفاضلية من مرتبة كسرية باستخدام مبرهنة باناخ للنقطة الثابتة

إعداد

الطالبة ايمان احمد حسين

إشراف

الدكتور سامح العرجه

أستاذ في قسم الرياضيات – كلية العلوم

1442هـ- 2021 م

ملخص

نعرّف المفاهيم الأساسية في البحث: الاشتقاق الكسري، التكامل الكسري، النقطة الثابتة، تابع ميتاج- ليفلر، وندرس الخواص والقواعد الأساسية للمشتقات من مراتب كسرية. نقدّم أيضاً بعض العلاقات الأساسية المتعلقة بتحويل لابلاس وخواصه. في هذا البحث حصلنا على الشروط اللازمة لاستقرار حل جملة معادلات تفاضلية كسرية إضافةً إلى الشروط اللازمة لاستقرار حل جملة معادلات تكاملية- تفاضلية كسرية مدعماً ذلك بأمثلة.

الكلمات المفتاحية: مشتق كابتو، تكامل ريمان ليوفيل، تحويل لابلاس، دالة ميتاج ليفلر، مبرهنة النقطة الثابتة، الاستقرار .

Study of Stability Solution System of Fractional Integro- Differential Equations by Using Banach Fixed Point Theorem

Abstract:

In this paper, we define the basic concepts related in research: fractional derivation, fractional integration, fixed point, Mittag- Leffler function, and study some basic properties and rules for derivatives of fractional order. Also we present some basic relationships about Laplace transform and its properties.

We obtain necessary conditions for stability of solution of a fractional differential system, in addition to the necessary conditions for the stability of the solution of a fractional integro- differential system, supported by examples.

Keywords: Caputo derivative, Riemann-Liouville integral, Laplace transform, Mittag Leffler function, fixed point theorem, stability.

1- مقدمة:

يعد حساب التفاضل و التكامل الكسري فرع من فروع الرياضيات و قد جذب هذا الفرع الكثير من الاهتمام من قبل الباحثين و الدارسين لما له من أهمية تطبيقية في العديد من مجالات الحياة مثل الهندسة و العلوم و التطبيقات الفيزيائية [5] و الكيميائية [8] و البيولوجية [7]، إنَ التفاضل و التكامل الكسري هو تعميم للتفاضل من المرتبة $n \in \mathrm{N}$، و قد شهد هذا المجال تطورات بالغة الأهمية على يد عدة علماء و باحثين مثل ليوفيل، كابتو، لايبنز، أولر و غيرهم من العلماء.

تطرق الباحثون إلى إيجاد حل جملة معادلات تفاضلية من مرتبة كسرية من خلال عدة طرائق نذكر منها تحويل لابلاس، والتأكد من وجود الحل ووحدانية الحل باستخدام مبرهنة باناخ للنقطة الثابتة ومبدأ باناخ للتطبيقات الضاغطة، إنَ مبرهنة النقطة الثابتة أداة مهمة لتقدير وجود الحل ووحدانية الحل أيضاً لجمل المعادلات التفاضلية الكسرية، كما تمَ توظيف فكرة التطبيقات الضاغطة للحصول على استقرار حل جملة المعادلات التفاضلية الكسرية.

استخدام الباحثون تقنيات النقطة الثابتة لدراسة خواص الاستقرار للجمل المدروسة [11,10] ، نلاحظ من خلال الاطلاع على الأبحاث والدراسات السابقة بأنَ الباحثين قد درسوا أشكال مختلفة من جمل المعادلات التفاضلية، وتمّ الحصول على شروط استقرار مكافئة لشروط استقرار الحلول المقاربة تحت تأثير اضطرابات صغيرة.

2- أهمية البحث:

يهدف البحث إلى إظهار أهمية النقطة الثابتة وأهمية التطبيقات الضاغطة في دراسة استقرار حل الجمل المدروسة.

3- مشكلة البحث:

نظراً للاهتمام المتزايد بموضوع التفاضل والتكامل الكسري لما له من أهمية بالغة في الحياة العملية والدراسات التطبيقية، تأتي مشكلة البحث لتسلط الضوء على هذا الموضوع ولتوضح كيفية استخدام تقنيات وخواص النقطة الثابتة في دراسة جمل المعادلات التفاضلية الكسرية،

وتوظيف مبدأ النقطة الثابتة للحصول على استقرار حل جملة معادلات تكاملية- تفاضلية من مرتبة كسرية.

4- مواد البحث:

مفاهيم وتعاريف:[9]

تعريف (1): إنَ الدالة غاما تعرَف بالشكل:

$$\Gamma(Z)=\int_{0}^{\infty} t^{Z-1} e^{-t} dt \qquad ;\operatorname{Re}(Z)>0$$

وتحقق الدالة غاما الخواص التالية:

$$\Gamma(Z+1)=Z\Gamma(Z)$$

$$\Gamma(n+1)=n!$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$$

تعريف (2): من أجل التابع $f(t)\in L^{1}[a,b]$ نعرّف تكامل ريمان _ ليوفيل للتابع $f(t)$ بالعلاقة:

$$\mathrm{I}^{\alpha} f(t)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{t_0}^{t} f(\tau)\left(t-\tau\right)^{\alpha-1} d\tau ....(1)$$

حيث: $n\in\mathbb{N}\ ,\quad \alpha,t_0,t\in\mathbb{R}^{+},n-1<\alpha<n$

ويتحقق أنَ:

$$1)\,\mathrm{I}^{0} f(t)=f(t) \qquad ; \qquad \mathrm{I}^{0}=\mathrm{I}$$
$$2)\,\mathrm{I}^{\alpha}\left(\lambda f(t)\pm\beta g(t)\right)=\lambda\mathrm{I}^{\alpha} f(t)\pm\beta\mathrm{I}^{\alpha} g(t) \qquad ;\lambda,\beta\in\mathbb{R}$$

حيث I مؤثر المطابقة.

مثال (1): لنوجد تكامل ريمان – ليوفيل للتابع $f(t)=t$ باعتبار أنّ: $t_0=0,\alpha=\frac{1}{2}$

حسب العلاقة (1) نكتب:

$$\mathrm{I}^{\alpha} t = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \int_{0}^{t} \tau (t-\tau)^{-\frac{1}{2}} d\tau \qquad ; t-\tau = u$$

$$= \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \int_{0}^{t} (t-u) u^{-\frac{1}{2}} du = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)} t^{\frac{3}{2}} = \frac{4}{3} \frac{1}{\sqrt{\pi}} t^{\frac{3}{2}}$$

تعريف (3): الاشتقاق الكسري حسب ريمان – ليوفيل:

من أجل التابع $f(t) \in L^{1}[a,b]$ نعرّف مشتق ريمان _ ليوفيل للتابع $f(t)$ بالعلاقة:

$$D^{\alpha} f(t) = D^{n} \mathrm{I}^{n-\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^{n}}{dt^{n}} \int_{t_0}^{t} f(\tau)(t-\tau)^{n-\alpha-1} d\tau ....(2)$$

حيث:

$$; \alpha, t_0, t \in \mathbb{R}^{+}, \qquad n-1 < \alpha < n \in \mathbb{N}$$

ويتحقق ما يلي:

$$1) D^{0} f(t) = f(t) \qquad ; D^{0} = \mathrm{I}$$

$$2) D^{\alpha}\left(\lambda f(t) + \gamma g(t)\right) = \lambda D^{\alpha} f(t) + \gamma D^{\alpha} g(t) \qquad ; \lambda, \gamma \in \mathbb{R}$$

مثال (2): لنوجد مشتق ريمان – ليوفيل للتابع: $f(t) = t$ باعتبار أنّ:

$$t_0 = 0 \quad , \qquad \alpha = \frac{1}{2}$$

حسب العلاقة (2) نكتب:

$$D^{\frac{1}{2}}t=\frac{1}{\Gamma\left(1-\frac{1}{2}\right)}\cdot\frac{d}{dt}\int_0^t \tau\left(t-\tau\right)^{1-\frac{1}{2}-1}d\tau=\frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\cdot\frac{d}{dt}\int_0^t \tau\left(t-\tau\right)^{-\frac{1}{2}}d\tau$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{d}{dt}\int_0^t (t-\nu)\nu^{-\frac{1}{2}}d\nu=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{d}{dt}\int_0^t\left(t\nu^{-\frac{1}{2}}-\nu^{\frac{1}{2}}\right)d\nu=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{d}{dt}\left[2t\nu^{\frac{1}{2}}-\frac{2}{3}\nu^{\frac{3}{2}}\right]_0^t$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{d}{dt}\left[2t^{\frac{3}{2}}-\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\right]=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{4}{3}\cdot\frac{d}{dt}\left[t^{\frac{3}{2}}\right]=\frac{2}{\sqrt{\pi}}t^{\frac{1}{2}}$$

تعريف (4): الاشتقاق الكسري حسب كابتو:

يعرّف مشتق كابتو لتابع ما $f(t)\in L^1[a,b]$ بالعلاقة:

$$D_*^{\alpha}f(t)=\mathrm{I}^{n-\alpha}D^n f(t)=\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_{t_0}^{t} f^{(n)}(\tau)(t-\tau)^{n-\alpha-1}d\tau.........(3)$$

$$;\alpha,t_0,t\in\mathbb{R}^+,\qquad n-1<\alpha<n\in\mathbb{N}$$

ويتحقق لدينا:

$$1)\,D_*^0 f(t)=f(t)\qquad ;D_*^0=\mathrm{I}$$
$$2)\,D_*^{\alpha}\left(\lambda f(t)+\gamma g(t)\right)=\lambda D_*^{\alpha}f(t)+\gamma D_*^{\alpha}g(t)\qquad ;\lambda,\gamma\in\mathbb{R}$$

مثال (3): لنوجد مشتق كابتو للتابع: $f(t)=t^2$ باعتبار أنّ: $\alpha=\frac{1}{3}\quad,\quad t_0=0$

بالاعتماد على العلاقة (3) نكتب:

$$=\frac{1}{\Gamma\left(1-\frac{1}{3}\right)}\int_0^t 2\cdot\tau\left(t-\tau\right)^{1-\frac{1}{3}-1}d\tau=\frac{2}{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}\int_0^t \tau\left(t-\tau\right)^{-\frac{1}{3}}d\tau=\frac{2}{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}\int_0^t (t-\nu)\nu^{-\frac{1}{3}}d\nu\qquad ;t-\tau=\nu$$

$$=\frac{2}{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}\int_0^t\left(t\nu^{-\frac{1}{3}}-\nu^{\frac{2}{3}}\right)d\nu=\frac{2}{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}\left[\frac{3}{2}t\nu^{\frac{2}{3}}-\frac{3}{5}\nu^{\frac{5}{3}}\right]_0^t=\frac{2}{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}\left[\frac{3}{2}t^{\frac{5}{3}}-\frac{3}{5}t^{\frac{5}{3}}\right]=\frac{6}{5}\frac{1}{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}t^{\frac{5}{3}}$$

تعريف (5): الجداء الالتفافي لتابعين:

نسمي الجداء التالي للتابع $f(t)$ مع التابع $g(t)$ بالجداء الالتفافي:

$$f(t)*g(t)=\int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau=\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau$$

تعريف (6): تابع ميتاج ليفلر:

يعرّف تابع ميتاج ليفلر بوسيط واحد α بالعلاقة:

$$\mathrm{E}_\alpha(\mathrm{Z})=\sum_{\kappa=0}^{\infty}\frac{\mathrm{Z}^\kappa}{\Gamma(\alpha\kappa+1)} \qquad ;\alpha\in\mathbb{R}^+ ,\mathrm{Z}\in\mathbb{C}$$

كما يعطى تابع ميتاج ليفلر بوسيطين α,β بالعلاقة:

$$\mathrm{E}_{\alpha,\beta}(\mathrm{Z})=\sum_{\kappa=0}^{\infty}\frac{\mathrm{Z}^\kappa}{\Gamma(\alpha\kappa+\beta)} \qquad ;\alpha,\beta\in\mathbb{R}^+ ,\mathrm{Z}\in\mathbb{C}$$

و الصيغة العامة لتابع ميتاج ليفلر المعرّف بمصفوفة A من الشكل:

$$\mathrm{E}_{\alpha,\beta}(\mathrm{AZ})=\sum_{\kappa=0}^{\infty}\frac{(\mathrm{AZ})^\kappa}{\Gamma(\alpha\kappa+\beta)} \qquad ;\alpha,\beta\in\mathbb{R}^+ ,\mathrm{Z}\in\mathbb{C}$$

بعض الحالات الخاصة:

$$\mathrm{E}_0(\mathrm{Z})=\frac{1}{1-\mathrm{Z}} \quad ;|\mathrm{Z}|<1 \qquad , \qquad \mathrm{E}_1(\mathrm{Z})=e^{\mathrm{Z}}$$

$$\mathrm{E}_2(\mathrm{Z})=ch\left(\sqrt{\mathrm{Z}}\right) \qquad , \qquad \mathrm{E}_{1/2}(\mathrm{Z})=\frac{e^{\mathrm{Z}}-1}{\mathrm{Z}}$$

من تعريف تابع ميتاج− ليفلر يمكننا الحصول على أنّ:

(1): $\mathrm{E}_{\alpha,1}(\mathrm{Z})=\mathrm{E}_\alpha(\mathrm{Z})$

(2): إنّ دالة ميتاج ليفلر $\mathrm{E}_{\alpha,1}(-t^\alpha)$ هي دالة متناقصة بالنسبة ل t كما أنها محدودة بالعدد واحد أيّ أنّ: $\mathrm{E}_{\alpha,1}(-t^\alpha)\leq 1 \quad (0<\alpha\leq 1)$، يوضّح ذلك الرسم البياني التالي:

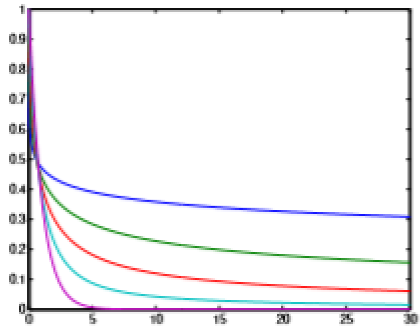

Figure 1: Graphs of $E_{\alpha,1}(-t^{\alpha})$ for $\alpha = 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1$.

تعريف (7): تحويل لابلاس:

يعطى تحويل لابلاس لتابع $f(t)$ بالصورة:

$$F(s) = \mathbf{L}\{f(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t)dt \qquad ; s \in \mathbb{C}$$

من خواصه:

$$1)\mathbf{L}\{\alpha f(t) \pm \beta g(t)\} = \alpha \mathbf{L}\{f(t)\} \pm \beta \mathbf{L}\{g(t)\} \qquad ; \alpha, \beta \in \mathbb{C}$$
$$2)\mathbf{L}\{f(t) * g(t)\} = \mathbf{L}\{f(t)\} \cdot \mathbf{L}\{g(t)\} = F(s) \cdot G(s)$$

تعريف (8): تحويل لابلاس العكسي:

يعطى تحويل لابلاس العكسي وفق العلاقة:

$$f(t) = \mathbf{L}^{-1}\{F(S)\} = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{st} \cdot F(s) \cdot ds \qquad ; c = \mathrm{Re}(s) > s_0 \;.......(4)$$

من خواصه:

$$1)\ \mathbf{L}^{-1}\{\alpha F(s) \pm \beta G(s)\} = \alpha \mathbf{L}^{-1}\{F(s)\} \pm \beta \mathbf{L}^{-1}\{G(s)\} \qquad ; \alpha, \beta \in \mathbb{C}$$
$$2)\ \mathbf{L}^{-1}\{F(s) \cdot G(s)\} = f(t) * g(t)$$

تحويلات لابلاس المستخدمة في الدراسة: [1]

$$1)\ \mathbf{L}\left\{J^{\alpha} f(t)\right\} = s^{-\alpha} F(s)$$

$$2)\ \mathbf{L}\left\{D_{*}^{\alpha} f(t)\right\} = s^{\alpha} F(s) - \sum_{\kappa=0}^{n-1} s^{\alpha-\kappa-1} f^{(\kappa)}(0) \qquad ; n-1 < \alpha < n$$

$$3)\ \mathbf{L}\left\{D^{\alpha} f(t)\right\} = s^{\alpha} F(s) - \sum_{\kappa=0}^{n-1} s^{\kappa} f^{(\alpha-\kappa-1)}(0) \qquad ; n-1 < \alpha < n$$

$$4)\ \mathbf{L}\left\{t^{\alpha p+\beta-1} \mathrm{E}_{\alpha,\beta}^{(p)}\left(\pm\lambda t^{\alpha}\right)\right\} = \frac{p!\, s^{\alpha-\beta}}{\left(s^{\alpha} \mp \lambda\right)^{p+1}} \quad ; \ \mathrm{Re}(s) > |\lambda|^{\frac{1}{\alpha}}$$

نذكر حالات خاصة للعلاقة الأخيرة:

- من أجل $p = 0$ نحصل على

$$\mathbf{L}\left\{t^{\beta-1} \mathrm{E}_{\alpha,\beta}\left(\pm\lambda t^{\alpha}\right)\right\} = \frac{s^{\alpha-\beta}}{s^{\alpha} \mp \lambda}$$

- من أجل $p = 0, \beta = \alpha$ نحصل على

$$\mathbf{L}\left\{t^{\alpha-1} \mathrm{E}_{\alpha,\alpha}\left(\pm\lambda t^{\alpha}\right)\right\} = \frac{1}{s^{\alpha} \mp \lambda}$$

- من أجل $p = 0, \beta = 1$ نحصل على

$$\mathbf{L}\left\{\mathrm{E}_{\alpha,1}\left(\pm\lambda t^{\alpha}\right)\right\} = \frac{s^{\alpha-1}}{s^{\alpha} \mp \lambda}$$

تعريف(9): النقطة الثابتة:

ليكن F تطبيقاً لمجموعة M في نفسها ندعو النقطة نقطة ثابتة بالنسبة للتطبيق F إذا كانت صورتها وفق التطبيق F هي النقطة ذاتها أي أنّ $\boxed{F(x) = x}$.

تعريف (10): التطبيق الضاغط:

ليكن (X, d) فضاءً مترياً وليكن التطبيق:

$$F : X \to X$$
$$\left(x , y\right) \to F\left(x , y\right) \quad ; x , y \in X$$

ندعو التطبيق F تطبيقاً ضاغطاً إذا وجد عدد $0<\alpha<1$ ومستقل عن x , y ويحقق

$$d\left(Fx , Fy\right) \le \alpha d\left(x , y\right)$$

تعريف 11: يكون الحل الصفري للمنظومة المدروسة مستقراً إذا وجد من أجل كل $\varepsilon>0$ عدد موجب $\delta=\delta\left(\varepsilon\right)$ بحيث إذا كان $\|x(t_0)\|<\delta$ عندئذٍ

$\|x(t)\|<\varepsilon$ وذلك من أجل كل $t>0$

تعريف 12: يكون الحل الصفري للمنظومة المدروسة مستقر استقراراً مقارباً إذا كان مستقراً ووجد عدد $\delta>0$ بحيث أنه إذا كان $\|x(t_0)\|<\delta$ فإنّ: $\lim\limits_{t\to\infty} x\left(t\right)=0$

مبرهنة (1): مبرهنة باناخ للنقطة الثابتة:

بفرض أنّ $\left(X , d\right)$ فضاء متري تام و F تطبيق ضاغط من الفضاء المتري في نفسه عندئذٍ التطبيق الضاغط F يملك نقطة ثابتة وحيدة.

تمهيدية: [2] لنفرض أنه من أجل التابعين $\phi\left(t\right)$ و $g\left(t\right)$ المستمرين على الفترة $\left[t_0 , t\right]$ وبحيث $g\left(t\right)\ge 0$ و $\lambda\ge 0, r\ge 0$ حيث λ, r ثوابت وإذا كان:

$$\phi\left(t\right) \le \lambda + \int_{t_0}^{t}\left[g\left(\tau\right).\phi\left(\tau\right)+r\right]d\tau$$

عندئذ نستطيع أنّ نكتب:

$$\phi\left(t\right) \le \left(\lambda + r\left(t_1 - t_0\right)\right)\exp\left(\int_{t_0}^{t} g\left(\tau\right)d\tau\right) \qquad ; t_0 \le t \le t_1 \;.......(4)$$

المتراجحة (4) تدعى متراجحة جرونوال وهي أداة هامة لتقدير تقارب الحل.

لازمة 1: تحقق دالة ميتاج- ليفلر الخواص التالية:

$$(1)\left\|\mathrm{E}_{\alpha}\left(\mathrm{A}t^{\alpha}\right)\right\| \le \mathrm{M}_1\left\|e^{\mathrm{A}t}\right\| \qquad ;0<\alpha<1$$
$$\left\|\mathrm{E}_{\alpha,\alpha}\left(\mathrm{A}t^{\alpha}\right)\right\| \le \mathrm{M}_2\left\|e^{\mathrm{A}t}\right\|$$
$$(2)\left\|\mathrm{E}_{\alpha,\beta}\left(\mathrm{A}t^{\alpha}\right)\right\| \le \left\|e^{\mathrm{A}t^{\alpha}}\right\| \quad ;\alpha\ge 1 \ ,\beta=1,2,\alpha$$

حيث $\mathrm{M}_1 , \mathrm{M}_2$ ثوابت موجبة.

لازمة 2: بفرض أنّ جميع القيم الذاتية للمصفوفة A تحقق: $\left|\arg\left(spec(\mathrm{A})\right)\right| > \frac{\alpha\pi}{2}$

عندئذٍ توجد ثوابت موجبة $\kappa_2>0,\kappa_1>0$ بحيث أنّ:

$$1)\int_0^t \left\|\theta^{\alpha-1}\mathrm{E}_{\alpha,\alpha}\left(\mathrm{A}\theta^{\alpha}\right)\right\| d\theta \le \kappa_1$$
$$2)\int_0^t \left\|\theta^{2\alpha-1}\mathrm{E}_{\alpha,2\alpha}\left(\mathrm{A}\theta^{\alpha}\right)\right\| d\theta \le \kappa_2$$

سنقوم الآن بدراسة منظومة المعادلات

$$D_*^{\alpha}x(t)+x(t)=\mathrm{A}\cdot x(t)+f\left(t,x(t)\right) \qquad ; \quad 0<\alpha\le 1$$

حيث سنوجد حل هذه المنظومة مستخدمين تحويل لابلاس لهذا الغرض، نوضح ذلك من خلال المبرهنة القادمة.

مبرهنة (2): [6,10] بفرض أنه لدينا منظومة المعادلات:

$$\begin{cases} D_*^{\alpha}x(t)+x(t)=\mathrm{A}\cdot x(t)+f\left(t,x(t)\right) \qquad ; \quad 0<\alpha\le 1 \\ x(0)=x_0 \end{cases} \qquad ....(5)$$

حيث A مصفوفة الأمثال الموافقة للمنظومة المدروسة $\left(\mathrm{A}\in\mathbb{R}^{n}\right)$، $t\in[0,\infty)$، وأنّ: $x,x_0\in\mathbb{R}^{n}$

$f:[0,\infty)\times\mathbb{R}^{n}\to\mathbb{R}^{n}$ تابع معطى فرضاً، إنّ حل المنظومة (5) موجود ويعطى وفق العلاقة:

$$x(t)=\mathrm{E}_{\alpha,1}\left(-t^{\alpha}\right)x(0)+\mathrm{A}\int_{0}^{t}(t-\tau)^{\alpha-1}\mathrm{E}_{\alpha,\alpha}\left(-(t-\tau)^{\alpha}\right)x(\tau)d\tau+$$

$$+\int_{0}^{t}(t-\tau)^{\alpha-1}\mathrm{E}_{\alpha,\alpha}\left(-(t-\tau)^{\alpha}\right)F(\tau,x(\tau))d\tau\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(6)$$

الإثبات: بأخذ تحويل لابلاس لطرفي العلاقة (5):

$$\mathbf{L}\left\{D_{*}^{\alpha}x(t)\right\}+\mathbf{L}\left\{x(t)\right\}=\mathbf{L}\left\{\mathrm{A}\cdot x(t)\right\}+\mathbf{L}\left\{f(t,x(t))\right\}$$

$$s^{\alpha}X(s)-s^{\alpha-1}x(0)+X(s)=\mathrm{A}\cdot X(s)+F(s,x(s))$$

$$X(s)=\frac{s^{\alpha-1}}{s^{\alpha}+1}x(0)+\frac{\mathrm{A}}{s^{\alpha}+1}X(s)+\frac{1}{s^{\alpha}+1}F(s,x(s))$$

بأخذ تحويل لابلاس العكسي:

$$\mathbf{L}^{-1}\left\{X(s)\right\}=\mathbf{L}^{-1}\left\{\frac{s^{\alpha-1}}{s^{\alpha}+1}x_{0}\right\}+\mathbf{L}^{-1}\left\{\frac{\mathrm{A}}{s^{\alpha}+1}X(s)\right\}+\mathbf{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^{\alpha}+1}F(s,x(s))\right\}$$

$$x(t)=\mathrm{E}_{\alpha,1}\left(-t^{\alpha}\right)\cdot x_{0}+\mathrm{A}\cdot t^{\alpha-1}\mathrm{E}_{\alpha,\alpha}\left(-t^{\alpha}\right)*x(t)+t^{\alpha-1}\mathrm{E}_{\alpha,\alpha}\left(-t^{\alpha}\right)*F(t,x(t))$$

$$\Rightarrow x(t)=\mathrm{E}_{\alpha,1}\left(-t^{\alpha}\right)\cdot x_{0}+\mathrm{A}\int_{0}^{t}(t-\tau)^{\alpha-1}\mathrm{E}_{\alpha,\alpha}\left(-(t-\tau)^{\alpha}\right)\cdot x(\tau)d\tau$$

$$+\int_{0}^{t}(t-\tau)^{\alpha-1}\mathrm{E}_{\alpha,\alpha}\left(-(t-\tau)^{\alpha}\right)F(\tau,x(\tau))d\tau$$

ملاحظة: باعتبار أنّ $\boxed{\beta=1}$ حل منظومة المعادلات (5) يصبح بالشكل:

$$x(t)=\mathrm{E}_{\alpha,1}\left(-t^{\alpha}\right)\cdot x_{0}+\mathrm{A}\int_{0}^{t}\mathrm{E}_{\alpha,1}\left(-(t-\tau)^{\alpha}\right)\cdot x(\tau)d\tau+\int_{0}^{t}\mathrm{E}_{\alpha,1}\left(-(t-\tau)^{\alpha}\right)F(\tau,x(\tau))d\tau\cdots\cdots(7)$$

مبرهنة (3): [1,2,6] ليكن f تابع مستمر حيثُ: $f:[0,\infty)\times\mathbb{R}^{n}\to\mathbb{R}^{n}$ ، وبفرض وجود تابع موجب $\gamma(t)$، إذا حقق التابع f الشروط التالية:

1) $f\left(t,0\right)=0$

2) $\left\|f\left(t,x\left(t\right)\right)\right\|\le\gamma\left(t\right)\cdot\left\|x\right\|$

3) $\int_0^t\left(t-\tau\right)^{\alpha-1}\gamma\left(\tau\right)d\tau\underset{t\to\infty}{\to}0$

وبفرض أنّ المصفوفة A مستقرة (القيم الذاتية لـ A قسمها الحقيقي سالب) عندئذٍ يكون الحل الصفري للمنظومة (5) مستقراً.

الإثبات: إنّ حل المنظومة (5) يعطى بالعلاقة (6)

بأخذ نظيم الطرفين نحصل على:

$$\left\|x\left(t\right)\right\|\le\left\|x_0\right\|+\left\|\mathrm{A}\right\|\int_0^t\left\|\left(t-\tau\right)^{\alpha-1}\mathrm{E}_{\alpha,\alpha}\left(-(t-\tau)^{\alpha}\right)\right\|\cdot\left\|x\left(\tau\right)\right\|d\tau+\int_0^t\left(t-\tau\right)^{\alpha-1}\gamma\left(\tau\right)\left\|\mathrm{E}_{\alpha,\alpha}\left(-(t-\tau)^{\alpha}\right)\right\|\cdot\left\|x\left(\tau\right)\right\|d\tau$$

بفرض أنّ:

$$\left\|\left(t-\tau\right)^{\alpha-1}\mathrm{E}_{\alpha,\alpha}\left(-(t-\tau)^{\alpha}\right)\right\|\le M_1\qquad\&\qquad\left\|\mathrm{E}_{\alpha,\alpha}\left(-(t-\tau)^{\alpha}\right)\right\|\le M_2$$

(لاحظ هنا أنً $\left\|\left(t-\tau\right)^{\alpha-1}\right\|\cdot M_2\le M_1$)

حسب متراجحة جرونوال نكتب:

$$(t)\|\le\left\|x_0\right\|+\int_0^t\left(\left\|\mathrm{A}\right\|\cdot M_1+M_2\cdot(t-\tau)^{\alpha-1}\gamma(\tau)\right)\cdot\left\|x\left(\tau\right)\right\|d\tau\le\left\|x_0\right\|\exp\left(\int_0^t\left(M_2\left(t-\tau\right)^{\alpha-1}\gamma\left(\tau\right)+\left\|\mathrm{A}\right\|\cdot M_1\right)d\tau\right)$$

باستخدام شرط المبرهنة $\int_0^t\left(t-\tau\right)^{\alpha-1}\gamma\left(\tau\right)d\tau\underset{t\to\infty}{\to}0$ نجد $\mathrm{M}_2\int_0^t\left(t-\tau\right)^{\alpha-1}\gamma\left(\tau\right)d\tau\underset{t\to\infty}{\longrightarrow}0$

وحيث أنّ A مصفوفة مستقرة $e^{\int_0^t\left\|\mathrm{A}\right\|\mathrm{M}_1 d\tau}\underset{t\to\infty}{\to}0$

حيث أنّ: M_1,M_2 ثوابت موجبة.

مما سبق نجد بأنّ $\underset{t\to\infty}{Lim}\|x(t)\|=0$ ، إذاً الحل الصفري للمنظومة (5) مستقر.

مبرهنة (4): [4,10] بفرض أنه لدينا التابع المستمر: $f:[0,\infty)\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ ، والذي يحقق الشروط التالية:

$$(1)\quad f(t,0)=0$$

$$(2)\quad \|f(t,x)-f(t,y)\|\le\gamma(t)\cdot\|x-y\|$$

$$(3)\quad \int_0^t\gamma(\tau)d\tau\underset{t\to\infty}{\longrightarrow}0$$

حيث أنّ $\gamma(t)$ تابع موجب، عندئذٍ المنظومة المدروسة (5) تملك حل وحيد $x(t)$ والحل الصفري لها يكون مستقراً.

الإثبات: لنفرض أنّ: $r\ge\dfrac{\|x_0\|}{1-M_1-M_2}$ حيث $M_1+M_2<1$ ، لنأخذ المجموعة: $\mathcal{E}=\mathcal{E}\left([0,T],\mathbb{R}^n\right)$ وهي عبارة عن فضاء كل التوابع المتجهية المستمرة والمعرفة على الفترة $[0,T]$ مع النظيم: $\|x\|=\sup_{t\in[0,T]}\|x(t)\|_{\mathbb{R}^n}$

حيث: $x(t)=\left(x_1(t),x_2(t),.......,x_n(t)\right)$

إنّ $\mathcal{E}$ عملياً يمثّل فضاء باناخ مع النظيم السابق.

لنعرّف التطبيق: $F:\mathcal{E}\to\mathcal{E}$ بالشكل:

$$F(x(t))=x_0\mathrm{E}_{\alpha,1}\left(-t^\alpha\right)+\mathrm{A}\int_0^t\mathrm{E}_{\alpha,1}\left(-(t-\tau)^\alpha\right)x(\tau)d\tau+\int_0^t\mathrm{E}_{\alpha,1}\left(-(t-\tau)^\alpha\right)f(\tau,x(\tau))d\tau$$

لنأخذ كرة مغلقة B_r نصف قطرها r في الفضاء $\mathcal{E}$:

$$\mathrm{B}_r=\left\{x\in\varepsilon;\|x\|\le r\right\}$$

نلاحظ أنّ:

$$,x)\| = \|f(t,x)-f(t,0)+f(t,0)\| \le \|f(t,x)-f(t,0)\| + \|f(t,0)\| \le \gamma(t)\cdot\|x-0\|+0 = \gamma(t)\|x\|$$

من أجل $x \in \mathrm{B}_r$ لنثبت الآن أنّ: $F(x)\in \mathrm{B}_r$ أي لنثبت أن: $F(\mathrm{B}_r)\subseteq \mathrm{B}_r$

$$(x(t))\| \le \left\|x_0 \mathrm{E}_{\alpha,1}\left(-t^{\alpha}\right)\right\| + \|\mathrm{A}\|\int_0^t \mathrm{E}_{\alpha,1}\left(-(t-\tau)^{\alpha}\right)\cdot\|x(\tau)\|\cdot d\tau + \int_0^t \mathrm{E}_{\alpha,1}\left(-(t-\tau)^{\alpha}\right)\cdot\|f(\tau,x(\tau))\|d\tau$$

$$\le \|x_0\| + r\cdot\|\mathrm{A}\|\cdot T + r\int_0^t \gamma(\tau)d\tau \le r(1-M_1-M_2)+r(M_1+M_2)=r$$

$$\Rightarrow F(x(t))\in \mathrm{B}_r$$

حيث اعتبرنا $\int_0^t \gamma(\tau)d\tau \le M_1 \quad ; \quad \|\mathrm{A}\|\cdot T \le M_2$

لنثبت الآن بأنّ F ضاغط:

$$\begin{aligned}\|F(x)-F(y)\| &\le \|\mathrm{A}\|\int_0^t \mathrm{E}_{\alpha,1}\left(-(t-\tau)^{\alpha}\right)\cdot\|x-y\|d\tau + \int_0^t \mathrm{E}_{\alpha,1}\left(-(t-\tau)^{\alpha}\right)\gamma(\tau)\|x-y\|d\tau \\ &\le \left(\|\mathrm{A}\|\cdot T + M_1\right)\cdot\|x-y\| \\ &\le \underbrace{\left(M_2+M_1\right)}_{<1}\cdot\|x-y\|\end{aligned}$$

كون $M_1+M_2<1$ إذاً F ضاغط إذن المنظومة (5) تملك حلاً وحيداً.

لنثبت الآن بأنّ $F(x(t))\underset{t\to\infty}{\longrightarrow}0$

لدينا:

$$\left\|\int_0^t \mathrm{E}_{\alpha,1}\left(-(t-\tau)^{\alpha}\right) f\left(\tau, x(\tau)\right) d\tau\right\| \le \int_0^t \left\|\mathrm{E}_{\alpha,1}\left(-(t-\tau)^{\alpha}\right)\right\| \cdot \left\| f\left(\tau, x(\tau)\right)\right\| d\tau$$

$$\le \int_0^t \gamma\left(\tau\right) \cdot \left\| x(\tau)\right\| d\tau \ \le r\int_0^t \gamma\left(\tau\right) d\tau$$

باستخدام شرط المبرهنة $\int_0^t \gamma\left(\tau\right) d\tau \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0$

نجد أنّ:

$$\left\|\int_0^t \mathrm{E}_{\alpha,1}\left(-(t-\tau)^{\alpha}\right) f\left(\tau, x(\tau)\right) d\tau\right\| \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

كما أنّ $\left\| x_0\right\| \mathrm{E}_{\alpha,1}\left(-t^{\alpha}\right) \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0$

$$\Rightarrow F\left(x(t)\right) \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

كون F ضاغط حسب مبرهنة باناخ للنقطة الثابتة $F\left(x(t)\right) = x(t)$ إذن $x(t) \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0$

إذاً الحل الصفري للمنظومة (5) مستقر.

مبرهنة (5): بفرض أنه لدينا المنظومة:

$$D_*^{\alpha} x\left(t\right) + x\left(t\right) = \mathrm{A}x\left(t\right) + \mathrm{I}^{\alpha} f\left(t, x\left(t\right)\right) \ldots\ldots\ldots\ldots(8)$$

مع الشرط الابتدائي: $x(0) = x_0$ ، $0 < \alpha \le 1$

إنّ حل المنظومة (8) موجود ويعطى وفق العلاقة:

$$x(t) = \mathrm{E}_{\alpha,1}\left(-t^{\alpha}\right) x_0 + \mathrm{A}\int_0^t \left(t-\tau\right)^{\alpha-1} \mathrm{E}_{\alpha,\alpha}\left(-(t-\tau)^{\alpha}\right) x\left(\tau\right) d\tau + \int_0^t \left(t-\tau\right)^{2\alpha-1} \mathrm{E}_{\alpha,2\alpha}\left(-(t-\tau)^{\alpha}\right) f\left(\tau, x(\tau)\right) d\tau$$

الإثبات: نطبق تحويل لابلاس على طرفي العلاقة (8) فنحصل على:

$$\mathbf{L}\left\{D_*^{\alpha}x(t)\right\}+\mathbf{L}\left\{x(t)\right\}=\mathrm{A}\cdot\mathbf{L}\left\{x(t)\right\}+\mathbf{L}\left\{\mathrm{I}^{\alpha}f\left(t,x(t)\right)\right\}$$

$$s^{\alpha}X(s)-s^{\alpha-1}x_0+X(s)=\mathrm{A}X(s)+s^{-\alpha}F\left(s,x(s)\right)$$

$$X(s)=x_0\frac{s^{\alpha-1}}{s^{\alpha}+1}+\mathrm{A}\frac{X(s)}{s^{\alpha}+1}+\frac{1}{s^{\alpha}+1}s^{-\alpha}F\left(s,x(s)\right)$$

نطبق تحويل لابلاس العكسي:

$$\mathbf{L}^{-1}\left\{X(s)\right\}=\mathbf{L}^{-1}\left\{x_0\frac{s^{\alpha-1}}{s^{\alpha}+1}\right\}+\mathbf{L}^{-1}\left\{\mathrm{A}\frac{X(s)}{s^{\alpha}+1}\right\}+\mathbf{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^{\alpha}+1}s^{-\alpha}F\left(s,x(s)\right)\right\}$$

$$x(t)=x_0\mathrm{E}_{\alpha,1}\left(-t^{\alpha}\right)+\mathbf{L}^{-1}\left\{\frac{\mathrm{A}}{s^{\alpha}+1}\right\}*\mathbf{L}^{-1}\left\{X(s)\right\}+\mathbf{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^{\alpha}+1}\right\}*\mathbf{L}^{-1}\left\{s^{-\alpha}F\left(s,x(s)\right)\right\}$$

$$x(t)=x_0\mathrm{E}_{\alpha,1}\left(-t^{\alpha}\right)+\mathrm{A}t^{\alpha-1}\mathrm{E}_{\alpha,\alpha}\left(-t^{\alpha}\right)*x(t)+t^{\alpha-1}\mathrm{E}_{\alpha,\alpha}\left(-t^{\alpha}\right)*\mathrm{I}^{\alpha}f\left(t,x(t)\right)$$

$$=x_0\mathrm{E}_{\alpha,1}\left(-t^{\alpha}\right)+\mathrm{A}\int_0^t(t-\tau)^{\alpha-1}\mathrm{E}_{\alpha,\alpha}\left(-(t-\tau)^{\alpha}\right)x(\tau)d\tau+$$

$$+\int_0^t(t-s)^{\alpha-1}\mathrm{E}_{\alpha,\alpha}\left(-(t-s)^{\alpha}\right)\mathrm{I}^{\alpha}f\left(s,x(s)\right)ds$$

$$=x_0\mathrm{E}_{\alpha,1}\left(-t^{\alpha}\right)+\mathrm{A}\int_0^t(t-\tau)^{\alpha-1}\mathrm{E}_{\alpha,\alpha}\left(-(t-\tau)^{\alpha}\right)x(\tau)d\tau+$$

$$+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t\left[(t-s)^{\alpha-1}\cdot\mathrm{E}_{\alpha,\alpha}\left(-(t-s)^{\alpha}\right)\int_0^s(s-\tau)^{\alpha-1}f\left(\tau,x(\tau)\right)d\tau\right]ds$$

لنحسب التكامل:

$$\mathrm{I}=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t\left[(t-s)^{\alpha-1}\mathrm{E}_{\alpha,\alpha}\left(-(t-s)^{\alpha}\right)\int_0^s(s-\tau)^{\alpha-1}f\left(\tau,x(\tau)\right)d\tau\right]ds$$

$$\mathrm{I}=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t\int_0^s(t-s)^{\alpha-1}(s-\tau)^{\alpha-1}\mathrm{E}_{\alpha,\alpha}\left(-(t-s)^{\alpha}\right)f\left(\tau,x(\tau)\right)d\tau ds$$

$$\mathrm{I}=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t f(\tau,x(\tau))\sum_{\kappa=0}^{\infty}\frac{(-1)^{\kappa}}{\Gamma(\alpha\kappa+\alpha)}\int_{\tau}^{t}(t-s)^{\alpha\kappa+\alpha-1}(s-\tau)^{\alpha-1}dsd\tau$$

حيث:

$$\mathrm{E}_{\alpha,\alpha}\left(-(t-s)^{\alpha}\right)=\sum_{\kappa=0}^{\infty}\frac{(-1)^{\kappa}(t-s)^{\alpha\kappa}}{\Gamma(\alpha\kappa+\alpha)}$$

لنحسب التكامل:

$$\mathrm{I}_1=\int_{\tau}^{t}(t-s)^{\alpha\kappa+\alpha-1}(s-\tau)^{\alpha-1}ds$$

بفرض $t-s=y \Leftarrow ds=-dy$

إذاً:

$$\mathrm{I}_1=\int_{t-\tau}^{0}y^{\alpha\kappa+\alpha-1}(t-\tau-y)^{\alpha-1}(-dy)=\int_{0}^{t-\tau}y^{\alpha\kappa+\alpha-1}(t-\tau-y)^{\alpha-1}dy$$

$$=(t-\tau)^{\alpha-1}\int_{0}^{t-\tau}y^{\alpha\kappa+\alpha-1}\left(1-\frac{y}{t-\tau}\right)^{\alpha-1}dy$$

باعتبار $\frac{y}{t-\tau}=z$

$$\mathrm{I}_1=(t-\tau)^{\alpha-1}\int_0^1(t-\tau)^{\alpha\kappa+\alpha-1}z^{\alpha\kappa+\alpha-1}(1-z)^{\alpha-1}(t-\tau)dz$$

$$=(t-\tau)^{\alpha\kappa+2\alpha-1}\beta(\alpha\kappa+\alpha,\alpha)=(t-\tau)^{\alpha\kappa+2\alpha-1}\cdot\frac{\Gamma(\alpha\kappa+\alpha)\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha\kappa+2\alpha)}$$

نعوض فنحصل على:

$$\mathrm{I}=\int_0^t(t-\tau)^{2\alpha-1}\cdot\sum_{\kappa=0}^{\infty}\frac{\left(-(t-\tau)^{\alpha}\right)^{\kappa}}{\Gamma(\alpha\kappa+2\alpha)}f(\tau,x(\tau))d\tau=\int_0^t(t-\tau)^{2\alpha-1}\mathrm{E}_{\alpha,2\alpha}\left(-(t-\tau)^{\alpha}\right)f(\tau,x(\tau))d\tau$$

إذن حل المنظومة المدروسة

$$(t)=\mathrm{E}_{\alpha,1}\left(-t^{\alpha}\right)x_{0}+\mathrm{A}\int_{0}^{t}\left(t-\tau\right)^{\alpha-1}\mathrm{E}_{\alpha,\alpha}\left(-(t-\tau)^{\alpha}\right)x\left(\tau\right)d\tau+\int_{0}^{t}\left(t-\tau\right)^{2\alpha-1}\mathrm{E}_{\alpha,2\alpha}\left(-(t-\tau)^{\alpha}\right)f\left(\tau,x(\tau)\right)d\tau$$

مبرهنة (6): بفرض أنه لدينا التابع المستمر: $f:[0,\infty)\times\mathbb{R}^{n}\to\mathbb{R}^{n}$

والذي يحقق الشرط $f\left(t,0\right)=0$ وبفرض وجود تابع موجب: $\gamma\left(t\right)$ فإذا تحققت الشروط التالية:

$$1)\left\|f\left(t,x\right)\right\|\leq\gamma\left(t\right)\cdot\left\|x\right\|$$

$$2)\int_{0}^{t}\left(t-\tau\right)^{2\alpha-1}\gamma\left(\tau\right)d\tau\underset{t\to\infty}{\longrightarrow}0$$

وبفرض أنّ المصفوفة A مستقرة (القيم الذاتية لـ A قسمها الحقيقي سالب)، عندئذ الحل الصفري للمنظومة (8) مستقر.

الإثبات: إنّ حل المنظومة (8) يعطى بالشكل:

$$(t)=\mathrm{E}_{\alpha,1}\left(-t^{\alpha}\right)x_{0}+\mathrm{A}\int_{0}^{t}\left(t-\tau\right)^{\alpha-1}\mathrm{E}_{\alpha,\alpha}\left(-(t-\tau)^{\alpha}\right)x\left(\tau\right)d\tau+\int_{0}^{t}\left(t-\tau\right)^{2\alpha-1}\mathrm{E}_{\alpha,2\alpha}\left(-(t-\tau)^{\alpha}\right)f\left(\tau,x(\tau)\right)d\tau$$

بأخذ نظيم الطرفين نحصل على:

$$\left\|x(t)\right\|\leq\left\|\mathrm{E}_{\alpha,1}\left(-t^{\alpha}\right)x_{0}\right\|+\left\|\mathrm{A}\right\|\int_{0}^{t}\left\|\left(t-\tau\right)^{\alpha-1}\mathrm{E}_{\alpha,\alpha}\left(-(t-\tau)^{\alpha}\right)\right\|\cdot\left\|x\left(\tau\right)\right\|d\tau+\int_{0}^{t}\left\|\mathrm{E}_{\alpha,2\alpha}\left(-(t-\tau)^{\alpha}\right)\right\|\left(t-\tau\right)^{2\alpha-1}\gamma\left(\tau\right)\left\|x\left(\tau\right)\right\|d\tau$$

$$\Rightarrow\left\|x\left(t\right)\right\|\leq\left\|x_{0}\right\|+M_{1}\cdot\left\|\mathrm{A}\right\|\int_{0}^{t}\left\|x\left(\tau\right)\right\|d\tau+M_{2}\int_{0}^{t}\left(t-\tau\right)^{2\alpha-1}\gamma\left(\tau\right)\left\|x\left(\tau\right)\right\|d\tau$$

حسب متراجحة جرونوال:

$$\|x(t)\| \le \|x_0\| \exp\left(\int_0^t \left(\mathrm{M}_2 (t-\tau)^{2\alpha-1} \gamma(\tau) + M_1 \cdot \|\mathrm{A}\|\right) d\tau\right)$$

باستخدام شرط المبرهنة $\int_0^t (t-\tau)^{2\alpha-1} \gamma(\tau) d\tau \underset{t\to\infty}{\to} 0$ نجد

$$\mathrm{M}_2 \int_0^t (t-\tau)^{2\alpha-1} \gamma(\tau) d\tau \underset{t\to\infty}{\to} 0$$

وحيث أنّ A مصفوفة مستقرة $e^{\int_0^t \|\mathrm{A}\| \mathrm{M}_1 d\tau} \underset{t\to\infty}{\to} 0$

حيث أنّ: M_1, M_2 ثوابت موجبة.

مما سبق نجد بأنّ $\underset{t\to\infty}{Lim} \|x(t)\| = 0$ ، إذاً الحل الصفري للمنظومة (8) مستقر.

مثال (1): بفرض أنه لدينا منظومة المعادلات التفاضلية الكسرية:

$$D_*^{\alpha} x(t) + x(t) = \mathrm{A}x(t) + f(t, x(t)) \qquad ; x(t) = (x_1(t), x_2(t))$$

مع الشرط الابتدائي: $x(0) = 0$

بحيث أن: $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, f(t, x(t)) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(t+1)^{-\frac{11}{4}} (x_1^2 + x_2^2)^{\frac{1}{2}} \\ \frac{1}{2}(t+1)^{-\frac{11}{4}} (x_1^2 + x_2^2)^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix}, \alpha = \frac{1}{2}$

نلاحظ أنّ: $f(t, 0) = 0$

$$\|f(t, x(t))\| = \sqrt{\frac{1}{2}\left((t+1)^{-\frac{11}{4}} (x_1^2 + x_2^2)^{\frac{1}{2}}\right)^2 + \frac{1}{2}\left((t+1)^{-\frac{11}{4}} (x_1^2 + x_2^2)^{\frac{1}{2}}\right)^2} \le \gamma(t) \cdot \|x\|$$

حيث أنّ: $\gamma(t) = \frac{1}{2}(t+1)^{-\frac{11}{4}}$

كما أنّ:

$$\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\gamma(s)ds=\int_0^t (t-s)^{-\frac{1}{2}}\frac{1}{2}(s+1)^{-\frac{11}{4}}ds\le\frac{1}{2}\int_0^t (t-s)^{-\frac{1}{2}}s^{-\frac{11}{4}}ds=\frac{\Gamma\left(-\frac{7}{4}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(-\frac{5}{4}\right)}t^{-\frac{9}{4}}$$

حيث أنّ:

$$\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)=\left(-\frac{3}{4}\right)\left(-\frac{7}{4}\right)\Gamma\left(-\frac{7}{4}\right)\qquad,\qquad\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)=\left(-\frac{1}{4}\right)\left(-\frac{5}{4}\right)\Gamma\left(-\frac{5}{4}\right)$$

$$\Rightarrow\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\gamma(s)d\,s=\frac{\Gamma\left(-\frac{7}{4}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{2\Gamma\left(-\frac{5}{4}\right)}=\frac{5\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}{42\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}\sqrt{\pi}\,t^{-\frac{9}{4}}\underset{t\to\infty}{\longrightarrow}0$$

إذاً: $\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\gamma(s)ds\underset{t\to\infty}{\longrightarrow}0$

والحل مستقر بحسب المبرهنة (3)

مثال (2): بفرض أنه لدينا منظومة المعادلات التفاضلية التكاملية الكسرية:

$$D_*^{\alpha}x(t)+x(t)=\mathrm{A}x(t)+\mathrm{I}^{\alpha}f(t,x(t))\qquad;\ x\left(x_1(t),x_2(t)\right)^T$$

$$\mathrm{A}=\begin{pmatrix}1&2\\0&3\end{pmatrix},f(t,x(t))=\begin{pmatrix}\frac{1}{5}(t+1)^{-\frac{3}{4}}\frac{|x_1(t)|}{1+|x_1(t)|}\\\frac{1}{5}(t+1)^{-\frac{3}{4}}\frac{|x_2(t)|}{1+|x_2(t)|}\end{pmatrix},\alpha=\frac{1}{4}$$

نلاحظ بأنّ: $f(t,0)=0$

$$\left\|f\left(t,x(t)\right)\right\|^2=\left(\frac{1}{5}(t+1)^{-\frac{3}{4}}\frac{|x_1(t)|}{1+|x_1(t)|}\right)^2+\left(\frac{1}{5}(t+1)^{-\frac{3}{4}}\frac{|x_2(t)|}{1+|x_2(t)|}\right)^2$$

$$\leq\left[\frac{1}{5}(1+t)^{-\frac{3}{4}}\right]^2\left[|x_1(t)|^2+|x_2(t)|^2\right]=\left[\frac{1}{5}(1+t)^{-\frac{3}{4}}\right]^2\|x\|^2$$

$$\Rightarrow\left\|f\left(t,x(t)\right)\right\|\leq\left[\frac{1}{5}(1+t)^{-\frac{3}{4}}\right]\|x\|\ ;\ \gamma(t)=\frac{1}{5}(1+t)^{-\frac{3}{4}}$$

$$\int_0^t(t-s)^{2\alpha-1}\gamma(s)ds=\int_0^t(t-s)^{-\frac{1}{2}}\frac{1}{5}(s+1)^{-\frac{3}{4}}ds\leq\frac{1}{5}\int_0^t(t-s)^{-\frac{1}{2}}s^{-\frac{3}{4}}ds=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}{5\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}t^{-\frac{1}{4}}$$

إذاً: $\int_0^t(t-s)^{2\alpha-1}\gamma(s)ds\underset{t\to\infty}{\to}0$

والحل مستقر حسب المبرهنة (6).

الخلاصة:

من خلال هذه الدراسة توصلنا إلى إمكانية تطبيق مبدأ النقطة الثابتة لباناخ المستخدم في دراسة استقرار حل جملة معادلات تفاضلية من مرتبة $n\in N$ على دراسة استقرار حل جملة معادلات تفاضلية من مرتبة كسرية

قائمة المراجع:

[1].Abu Skhail, E. and Mater, M. M., 2018-On Stability Of Nonautonomous Perturbed Semilinear Fractional Differential Systems Of Order $\alpha \in (1,2)$, Journal Of Mathematics, 2018(1): 10p.

[2].Agarwal, R. P, Li, C., Qian, M. and Wong, J. Y., 2010- Stability Analysis Of Fractional Differential System With Riemann-Liouville Derivative, Mathematical And Computer Modeling, 52: 862-874.

[3].Concezzi, M. and Spigler, R., 2015-Some Analytical And Numerical Properties Of The Mittag Leffler Functions, Fractional Calculus And Applied Analysis, 18(1): 64-94.

[4].Chen, F. and Zhou, Y., 2011-Attractivity Of Fractional Differential Equations, Computers And Mathematics With Applications, 62: 1359-1369.

[5].Hilfer, R., 2000-Applications Of Fractional Calculus In Physics, World Scientific, Germany, 472p.

[6].Li, C. and Zhang, F., 2011-Stability Analysis Of Fractional Differential Systems With Order Lying In (1,2), Advances In Difference Equations, 17p.

[7].Magin, R. L., 2010-Fractional Calculus Models Of Complex Dynamics In Biological Tissues, Computers And Mathematics With Applications, 59(5): 1586- 1593.

[8].Oldham, K.B.,2010-Fractional Differential Equations In Electrochemistry, Advances In Engineering Software, 41(1): 9-12.

[9].Podlubny, I., 1999-Fractional Differential Equations, Academic Press, San Diego, 340p.

[10].Seemb, A. and UR Rehman, M., 2018-Exitence And Stability Analysis By Fixed Point Theorems For A Class Of Non Linear Caputo Fractional Differential Equations, Dynamic systems and applications, 27(3): 445-456.

[11]. ZHOU, Y., 2009-Existence And Uniqueness Of Solutions For A System Of Fractional Differential Equations, An International Journal For Theory And Applications, 12(2): 195-204