تقريب الدوال بكثيرات حدود ليجندر المتعامدة متعددة المتحولات

[1] د. حامد عباس [2] لينا حمره

جامعة البعث_ كلية العلوم_ قسم الرياضيات

ملخص البحث

يهتم البحث بدراسة تقريب الدوال متعددة المتغيرات، حيث تم عرض صيغة كثيرة حدود ليجندر بمتحول واحد وبعض خواصه. ثم تم التوصل إلى صيغة كثيرات حدود من نمط ليجندر بمتحولين. وتمت دراسة بعض من خواص كثيرات حدود *ليجندر بمتحولين*، وتوصلنا إلى علاقة كثيرات حدود ليجندر بثلاثة متحولات بطريقة تدريجية، وأيضاً تم تعميم ذلك بـ n من المتحولات. وفي النهاية تم التوصل إلى حساب علاقة الثوابت (ثوابت كثيرات حدود من نمط– ليجندر بمتحولين) وتعميم علاقة الثوابت بكثيرات حدود من نمط– ليجندر بـn متحول وذلك في الفضاء R^n .

الكلمات المفتاحية: الدوال المتعامدة، حدوديات ليجندر متعددة المتحولات تقريب الدوال لكثيرات الحدود المتعامدة

[1] عضو هيئة تدريسية_ جامعة البعث_ كلية العلوم_ قسم الرياضيات.

[2] طالبة ماجستير_ جامعة البعث_ كلية العلوم_ قسم الرياضيات

Approximation function by Legendre polynomial multi variables

[1] Dr. Hamed Abbas [2] Lina Hamra

AL Baath university – Faculty Of Science- Department Of Mathematics .

abstract:

This work is concerned with presenting a Legendre polynomial formula with one variable and some of its properties. Then we concluded a Legendre polynomial formula with two variables. Some properties of a Legendre polynomial with two variables were studied. We also found Legendre polynomials with three variables and this was generalized to n variables. Finally, and it resulted in formulating the relationship of the constants (coefficients of Legendre-type polynomials two variables) and generalized this to $\boldsymbol{R^n}$ space.

key word: Orthogonal function. Legendre polynomials. Approximating functions.

1 Faculty member_ Al-baath University_Department Of Mathematics.

[2]Master Student _ Al-baath University_Department Of Mathematics.

هدف البحث:

يهدف البحث إلى تقريب الدوال بعدة متحولات بكثيرات حدود ليجندر المتعامدة بـ n متحول. لذلك يجب إيجاد كثيرات حدود ليجندر متعددة المتحولات من درجات مختلفة وفق مبدأ غرام شميت، بعد ذلك سوف نستخدم كثيرات الحدود هذه في تقريب الدوال بعدة متحولات متبعين مبدأ المربعات الصغرى في التقريب لأن كثيرات الحدود المتعامدة الناتجة هي دوال ذات قوى صحيحة ومستمرة على الفضاء R^n .

مقدمة البحث:

نهتم بهذا البحث بتقريب الدوال متعددة المتحولات لكثيرات حدود ليجندر المتعامدة متعددة المتحولات معتمدين بذلك على إيجاد كثيرات الحدود هذه بطريقة غرام شميت حيث إن كثيرات حدود ليجندر بمتحولين تعطى بالعلاقة التالية:

$$F_{nm}(x,y)=\frac{1}{n!.m!.2^{n+m}}.\frac{\partial^n}{\partial x^n}(x^2-1)^n.\frac{\partial^m}{\partial y^m}(y^2-1)^m$$

وأيضاً كثيرات حدود ليجندر بثلاثة متحولات تعطى بالشكل:

$$F_{nmk}(x,y,z)=\frac{1}{n!.m!.k!.2^{n+m+k}}.\frac{\partial^n}{\partial x^n}(x^2-1)^n.$$
$$.\frac{\partial^m}{\partial y^m}(y^2-1)^m.\frac{\partial^k}{\partial z^k}(z^2-1)^k$$

وهكذا فإن كثيرات حدود ليجندر بـ n من المتحولات تعطى بالصيغة العامة الآتية:

$$F_{n_1,n_2,....n_n}(x_1,x_2,...,x_n)=\frac{1}{\mu\ .\ 2^{\lambda}}.\prod_{i=1}^{n}\frac{\partial^{n_i}}{\partial x^{n_i}}(x_i^2-1)^{n_i}$$

حيث إن:

$$\lambda = \sum_{i=1}^{n} n_i \quad , \quad \mu = \prod_{i=1}^{n} n_i \, !$$

نطبق مبدأ المربعات الصغرى لتقريب الدوال. فنحصل على الثوابت الموافقة، حيث إن:

$$P_{nm}(x,y) = \sum_{i=1,j=1}^{n\,,\,m} a_{ij} \, .L_{ij}(x,y)$$

و $L_{ij}(x,y)$ هي كثيرات حدود ليجندر بمتحولين.

ثم تم إيجاد الوسطاء a_{nm} بمتحولين بالشكل الآتي:

$$a_{nm} = \frac{(2n+1)(2m+1)}{4} \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} f(x,y).p_{nm}(x,y)dxdy$$

ثم بثلاثة متحولات ، وتمكنا من إيجاد الوسطاء $a_{nm\,k}$بالشكل التالي:

$$a_{nm} = \frac{(2n+1)(2m+1)(2k+1)}{8} \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} f(x,y,z).p_{nmk}(x,y,z)dxdydz$$

تمكنا من كتابة تلك الوسطاء بصورة عامة، عندما تكون كثيرة الحدود تابعة ل n من المتحولات. ثم تم تقريب الدوال بكثيرات الحدود المتعامدة من نمط ليجندر بمتحولين وذلك باستخدام المربعات الصغرى في حالة الدوال المستمرة, واستنتجنا الثوابت الموافقة في حالة المتحولين ،ثم ثلاث متحولات ثم اخذنا الثوابت في الفضاء R^n ، وتم تطبيق هذا المبدأ لحل بعض الأمثلة، وتم رفقها بجداول وتم تزويدها برسوم توضح ذلك.

طريقة ومراحل البحث:

1-اعتماد طريقة غرام شميدث للتعامد والنظيم لإيجاد دوال من نمط ليجندر بمتحولين بالشكل:

$$F_{nm}(x,y)=\frac{1}{2^{n+m}.n!.m!}.\frac{\partial^n}{\partial x^n}(x^2-1)^n.\frac{\partial^m}{\partial y^m}(y^2-1)^m$$

2-استخدام طريقة المربعات الصغرى في التقريب من أجل الدوال المستمرة على اعتبار أن دوال ليجندر هي دوال مستمرة على المنطقة $[-1,1]^2$.

3-استنتاج ثوابت التقريب وتعميمها في الفضاء R^n.

4-تطبيقات بسيطة حول ذلك.

5-ايضاحات باستخدام بعض الرسوم البيانية.

طريقة البحث:

نعرض كثيرات حدود ليجندر بمتحول واحد وبعض خصائصها للاستفادة منها في دراسة كثيرات حدود ليجندر بمتحولين وبعدة متحولات ودراسة خصائصها.

من المعلوم أن كثيرة حدود ليجندر بمتحول واحد تكتب وفق صيغة رودريغ بالشكل الآتي [4]

$$\mathrm{P}_n(x)=\frac{1}{2^n.n!}.\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n \qquad (1)$$

بفرض أن الدالة $y=f(x)$ قابلة للمكاملة على المجال $[-1,1]$ عندئذٍ:

$$\int_{-1}^{1} f(x).p_n(x)dx=\frac{1}{2^n.n!}.\int_{-1}^{1} f(x).\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n dx$$

نجري عملية التكامل بالتجزئة، لذلك نفرض أن :

$$u = f(x) \Rightarrow du = df(x)$$
$$dv = \frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n dx \Rightarrow v = \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(x^2-1)^n dx$$

بالتبديل في القانون:

$$\int_{-1}^{1} u.dv = [u.v]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} v.du$$

نجد إن:

$$\int_{-1}^{1} f(x).p_n(x).dx =$$
$$= \frac{1}{2^n.n!}\left[f(x)\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(x^2-1)^n\right]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} f'(x).\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(x^2-1)^n.dx$$

بالتبديل في حدود التكامل نجد أن الحد الأول يساوي الصفر، وبالتالي:

$$\int_{-1}^{1} f(x).p_n(x).dx = \frac{-1}{2^n.n!}.\int_{-1}^{1} f'(x).\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(x^2-1)^n.dx$$

نجري عملية التكامل مرة أخرى بطريقة التجزئة:

من أجل ذلك نفرض أن:

$$u = f'(x) \Rightarrow du = f''(x)\mathrm{dx}$$
$$dv = \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(x^2-1)^n dx \Rightarrow v = \frac{d^{n-2}}{dx^{n-2}}(x^2-1)^n$$

بالتبديل في دستور التكامل بالتجزئة يكون:

$$\int_{-1}^{1} f(x).p_n(x) =$$

$$= \frac{-1}{2^n.n!}\left[f'(x).\frac{d^{n-2}}{dx^{n-2}}(x^2-1)^n \right]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} f''(x).\frac{d^{n-2}}{dx^{n-2}}(x^2-1)^n dx$$

الحد الأول يساوي الصفر، وأثناء التبديل بحدود التكامل يكون:

$$\int_{-1}^{1} f(x).p_n(x)dx = \frac{(-1)^2}{2^n.n!}.\int_{-1}^{1} f''(x).\frac{d^{n-2}}{dx^{n-2}}(x^2-1)^n dx$$

وهكذا بإجراء المكاملة n مرة متتالية بطريقة التجزئة، نجد إن:

$$\int_{-1}^{1} f(x).p_n(x)dx = \frac{(-1)^n}{2^n.n!}.\int_{-1}^{1} (x^2-1)^n.f^{(n)}(x)dx \qquad (2)$$

وهي الخاصة الأولى

دراسة الخاصة الثانية:

$$\int_{-1}^{1} x^n.p_n(x)dx = \frac{2^{n+1}.(n!)^2}{(2n+1)!}$$

الإثبات:

إذا كان $f(x) = x^n$ نجد إن:

$$\int_{-1}^{1} f(x).p_n(x)dx = \frac{(-1)^n}{2^n.n!}.\int_{-1}^{1} (x^2-1)^n.\frac{d^n}{dx^n}x^n dx$$

ولكن: $$\frac{d^n}{dx^n}(x^n).dx = n!$$

بالتبديل في العلاقة السابقة يكون:

$$\int_{-1}^{1} f(x).p_n(x).dx = \frac{(-1)^n.n!}{2^n.n!}.\int_{-1}^{1}(x^2-1)^n dx = \frac{(-1)^{2n}}{2^n}.\int_{-1}^{1}(1-x^2)^n dx$$

حيث إن: $(-1)^n = 1$ وذلك مهما تكن n زوجية أو فردية.

لحساب هذا التكامل نفرض أن:

$$x = \sin t \Rightarrow dx = \cos t.dt$$

وعند

ما:

$$x = -1 \Rightarrow t = -\frac{\pi}{2} \quad \& \quad x = 1 \Rightarrow t = \frac{\pi}{2}$$

عندئذ:

$$\int_{-1}^{1} x^n.p_n(x)dx = \frac{1}{2^n}.\int_{-1}^{1}\cos t^{\,2n+1}dt = \frac{2}{2^n}.\int_{-1}^{1}\cos t^{\,2n+1}dt$$

$$= \frac{2}{2^n}\left[\frac{(2^n)^2.(n!)^2}{(2n+1)!}\right] = \frac{2^{n+1}.(n!)^2}{(2n+1)!}$$

وبالتالي:

$$\int_{-1}^{1} x^n.p_n(x)dx = \frac{2^{n+1}.(n!)^2}{(2n+1)!} \qquad (3)$$

الخاصة الثالثة:

$$\int_{-1}^{1} p_n^2(x)dx = \frac{2}{2n-1}$$

الإثبات:

نبدل في (2) كل $f(x) = p_n(x)$ ، نجد إن:

$$\int_{-1}^{1} p_n^2(x)dx = \frac{(-1)^n}{2^n.n!}.\int_{-1}^{1}(x^2-1)^n.\frac{d^n p_n(x)}{dx^n}dx \qquad (4)$$

ولكن

$$\frac{d^n p_n(x)}{dx^n} = \frac{d^n}{dx^n}\left[\frac{1}{2^n.n!}.\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n\right]$$

وبملاحظة أن:

$$\frac{d^{2n}}{dx^{2n}}(x^2-1)^n = (2n)!$$

يكون:

$$\frac{d^n p_n(x)}{dx^n} = \frac{(2n)!}{2^n.n!}$$

بالتبديل عن هذه القيمة في (4) نجد إن:

$$\int_{-1}^{1} p_n^2(x)dx = \frac{(-1)^n.(2n)!}{2^n.n!.2^n.n!}.\int_{-1}^{1}(x^2-1)^n dx$$

ولكن:

$$\int_{-1}^{1}(x^2-1)^n dx = \frac{2.(2^n)^2.(n!)^2}{(2n+1)!}$$

يكون بالاختصار:

$$\int_{-1}^{1} p_n^2(x) = \frac{2}{2n+1} \qquad (5)$$

وهذه الخاصة موجودة في كتاب التحليل عددي (2) 2018

ننتقل الآن لدراسة خواص كثيرات حدود ليجندر بمتحولين:

من المعلوم أن كثيرات حدود ليجندر بمتحولين تعطى وفق العلاقة التالية:

$$P_{nm}(x,y)=\frac{1}{2^{n+m}.n!.m!}\frac{\partial^n}{\partial x^n}(x^2-1)^n.\frac{\partial^m}{\partial y^m}(y^2-1)^m \qquad (6)$$

الخاصة الأولى:

نحسب التكامل التالي:

$$\varphi=\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}f(x,y).p_{nm}(x,y)dxdy=$$

$$=\frac{1}{2^{n+n}.n!.m!}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}f(x,y).\frac{\partial^n}{\partial x^n}(x^2-1)^n.\frac{\partial^m}{\partial y^m}(y^2-1)^m dxdy=$$

$$=\frac{1}{2^{n+m}.n!.m!}.\int_{-1}^{1}\left[\int_{-1}^{1}f(x,y).\frac{\partial^n}{\partial x^n}(x^2-1)^n dx\right].\frac{\partial^m}{\partial y^m}(y^2-1)^m dy$$

لنحسب التكامل ما بين القوسين المتوسطين. والذي نرمز له بالرمز I فيكون حسب الخاصة (2) أن:

$$\mathrm{I}=\int_{-1}^{1}f(x,y).\frac{\partial^n}{\partial x^n}(x^2-1)^n dx=(-1)^n\int_{-1}^{1}(x^2-1)^n.\frac{\partial^n}{\partial x^n}f(x,y)dx$$

وبالتالي نجد إن:

$$\Phi=\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}f(x,y).p_{nm}(x,y)dxdy=\frac{1}{2^{n+m}.n!.m!}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}f(x,y)$$

$$.\frac{\partial^n}{\partial x^n}(x^2-1)^n.\frac{\partial^m}{\partial y^m}(y^2-1)^m dxdy$$

$$=\frac{1}{2^{n+m}.n!.m!}.\int_{-1}^{1}\left[\int_{-1}^{1}f(x,y).\frac{\partial^n}{\partial x^n}(x^2-1)^n dx\right].\frac{\partial^m}{\partial y^m}(y^2-1)^m dy$$

نحسب التكامل بين القوسين المتوسطين والذي نرمز له بـ Ω:

$$\Omega=\int_{-1}^{1} f(x,y)\frac{\partial^n}{\partial x^n}(x^2-1)^n dx=(-1)^n\int_{-1}^{1}(x^2-1)^n.\frac{\partial^n}{\partial x^n}f(x,y)dx$$

وحسب العلاقة (2) يكون:

$$\Omega=\frac{1}{2^{n+m}.n!.m!}(-1)^n.\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}(x^2-1)^n.\frac{\partial^n}{\partial x^n}f(x,y).$$
$$.\frac{\partial^m}{\partial y^m}(y^2-1)^m dxdy$$

وبالتالي:

$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} f(x,y).p_{nm}(x,y)=$$
$$=\frac{(-1)^{n+m}}{2^{n+m}.n!.m!}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}(x^2-1)^n(y^2-1)^m\frac{\partial^n}{\partial x^n}(\frac{\partial^m}{\partial y^m}f(x,y)dxdy \quad (7)$$

نبدل الآن $f(x,y)$ بـ $p_{nm}(x,y)$ نجد إن:

$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} p_{nm}^2(x,y)dxdy=$$
$$\frac{(-1)^{n+m}}{2^{n+m}.n!.m!}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}(x^2-1)^n(y^2-1)^m\frac{\partial^n}{\partial x^n}(\frac{\partial^m}{\partial y^m}p_{nm}(x,y))dxdy$$

باشتقاق $p_{nm}(x,y)$ ، n مرة بالنسبة لـ x ،و m مرة بالنسبة لـ y نجد:

$$\frac{\partial^m}{\partial y^m}p_{nm}(x,y)=$$
$$=\frac{1}{2^{n+m}.n!.m!}.\frac{\partial^m}{\partial y^m}\left[\frac{\partial^n}{\partial x^n}(x^2-1)^n.\frac{\partial^m}{\partial y^m}(y^2-1)^m\right]$$
$$=\frac{1}{2^{n+m}.n!.m!}.\frac{\partial^n}{\partial x^n}(x^2-1)^n.\frac{\partial^{2m}}{\partial y^{2m}}(y^2-1)^m$$

باعتبار أن $\frac{\partial^{2m}}{\partial y^{2m}}(y^2-1)^m=(2m)!$, نجد إن:

$$\frac{\partial^m}{\partial y^m}p_{nm}(x,y)=\frac{(2m)!}{2^{n+m}.n!.m!}.\frac{\partial^n}{\partial x^n}(x^2-1)^n$$

باشتقاق هذا المقدار n مرة بالنسبة ل x نجد:

$$\frac{\partial^n}{\partial x^n}\left[\frac{\partial^m}{\partial y^m}p_{nm}(x,y)\right]=(2n)!.(2m)!$$

بالتبديل يكون:

$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}p_{nm}^2(x,y)\,\mathrm{dxdy}=$$
$$=\frac{(-1)^{n+m}.(2n)!.(2m)!}{2^{2n+2m}.(n!)^2.(m!)^2}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}(x^2-1)^n.(y^2-1)^m dxdy$$

بالاعتماد على التكامل التالي:

$$\int_{-1}^{1}(x^2-1)^n dx=(-1)^n\int_{-1}^{1}(1-x^2)^n dx$$

وبفرض أن:

$$x=\sin t\Rightarrow dx=\cos t dt$$

نجد بعد تبديل حدود التكامل إن:

$$\int_{-1}^{1}(x^2-1)^n dx=(-1)^n.\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2n+1}t dt=(-1)^n.2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2n+1}t dt$$

$$=\frac{2.(2^n)^2(n!)^2}{(2n+1)!}=\frac{2^{2n+1}.(n!)^2}{(2n+1)!}$$

وكذلك الأمر بالنسبة للتكامل $\int_{-1}^{1}(y^2-1)^m dy$, بالتبديل يكون:

$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}p_{nm}^2(x,y)dxdy=$$

$$=\frac{(-1)^{2n+2m}.(2n)!.(2m)!}{2^{2n+2m}.(n!)^2.(m!)^2}.2^{2n+1}.\frac{(n!)^2}{(2n+1)!}.\frac{2^{2m+1}.(m!)^2}{(2m+1)!}$$

بالاختصار يكون بعد ملاحظة أن:

$$(-1)^{2n+2m}=1$$

نجد إن:

$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}p_{nm}^2(x,y)dxdy=\frac{4}{(2n+1)(2m+1)} \qquad (8)$$

بمقارنة (1) مع (6) يمكن كتابة كثيرات الحدود من نوع ليجندر بثلاث متحولات:

$$p_{nml}(x,y,z)=\frac{1}{2^{n+m+l}.n!.m!.l!}.\frac{\partial^n}{\partial x^n}(x^2-1)^n\frac{\partial^m}{\partial y^m}(y^2-1)^m.$$
$$.\frac{\partial^l}{\partial z^l}(z^2-1)^l$$

وبالتالي:

$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} p_{nm}^{2}(x,y,z)dxdydz=\frac{8}{(2n+1)(2m+1)(2l+1)} \tag{9}$$

بمقارنة العلاقات (5) و(8) مع (9) يمكننا كتابة ما يلي:

$$\int_{-1}^{1}\dots\int_{-1}^{1} p_{n_1,n_2,\dots\dots,n_k}(x_1,x_2,..,x_k)dx_1dx_2..dx_k =$$

$$=\frac{2^k}{(2n_1+1)(2n_2+1)\dots.(2n_k+1)}=\frac{2^k}{\prod_{i=1}^{n}(2n_i+1)}$$

الآن بتبديل (9) في العلاقة التالية:

$$a_{nm}=\frac{\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} f(x,y).p_{nm}(x,y)dxdy}{\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} p_{nm}^{2}(x,y)dxdy}$$

نجد إن:

$$a_{nm}=c\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} f(x,y).p_{nm}(x,y)dxdy$$

$$a_{nm}=\frac{(2n+1)(2m+1)}{4}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} f(x,y).p_{nm}(x,y)dxdy \tag{10}$$

الخطأ المرتكب أثناء تقريب الدوال بكثيرات الحدود المتعامدة:

إن الخطأ المرتكب عند تقريب الدوال بكثيرات الحدود المتعامدة هو الخطأ المرتكب عند تقريب المربعات الصغرى في الحلة المستمرة ويساوي الفرق ما بين الدالة وكثيرة حدود التقريب بالقيمة المطلقة, أي أن:

$$R = \| f(x_1,...,x_n) - P_m(x_1,...,x_n) \|$$

ولهذا الخطأ المرتكب صيغ متعددة، وباعتبار التقريب للدوال المستمرة وكثيرات حدود ليجندر هي دوال مستمرة فإن الخطأ المرتكب يعطى بالعلاقة التالية:

$$R = \sqrt{\int_{-1}^{1} ... \int_{-1}^{1} [f(x_1,...,x_n) - P_m(x_1,...,x_n)]^2 dx_1 ... dx_n} \qquad \textbf{(11)}$$

حيث إن $f(x_1,...,x_n)$ الدالة المراد تقريبها , و $P_m(x_1,...,x_n)$ كثيرة حدود التقريب الناتج عن كثيرات الحدود المتعامدة على المجال $[-1,1]^n$.

كحالة خاصة عندما يكون التقريب لدالة بمتحولين تصبح العلاقة (10)بالشكل:

$$R = \sqrt{\int_{-1}^{1} . \int_{-1}^{1} [f(x,y) - P_m(x,y)]^2 dxdy}$$

تطبيق:

استخدم كثيرات حدود ليجندر بمتحولين، ضمن المربع $[-1\,,+1]^2$ من أجل تقريب الدالة

$$f(x) = e^{x+y}$$

بكثيرة حدود من الدرجة الأولى.

الحل:

بما أن كثيرة حدود التقريب من الدرجة الأولى، فإن كثيرات حدود ليجندر المطلوبة:

$$p_{00}(x.y)=1 \quad , \quad p_{10}(x,y)=x \quad , p_{01}(x,y)=y$$

كثيرة حدود التقريب المطلوبة من الشكل:

$$P_1(x,y)=a_{00}p_0(x,y)+a_{10}p_1(x,y)+a_{01}p_1(x,y)$$

من العلاقة (10)لنحسب كلاً من الثوابت: a_{00} , a_{10} . a_{01} نجد:

$$\boldsymbol{a}_{00}=\frac{1}{4}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\boldsymbol{e}^{x+y}\boldsymbol{dxdy} \ =\frac{1}{4}(\boldsymbol{e}-\frac{1}{\boldsymbol{e}})^2=\mathbf{1.381097846}$$

$$\boldsymbol{a}_{10}=\frac{3}{4}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\boldsymbol{e}^{x+y}\ \boldsymbol{.x\,.dxdy}=1.296997075$$

$$\boldsymbol{a}_{01}=\frac{3}{4}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\boldsymbol{e}^{x+y}\ \boldsymbol{.y\,.dxdy}=1.296997075$$

أي أن كثيرة حدود التقريب هي:

$$P_1(x,y)=1.381097846+1.296997075\ (x+y)$$

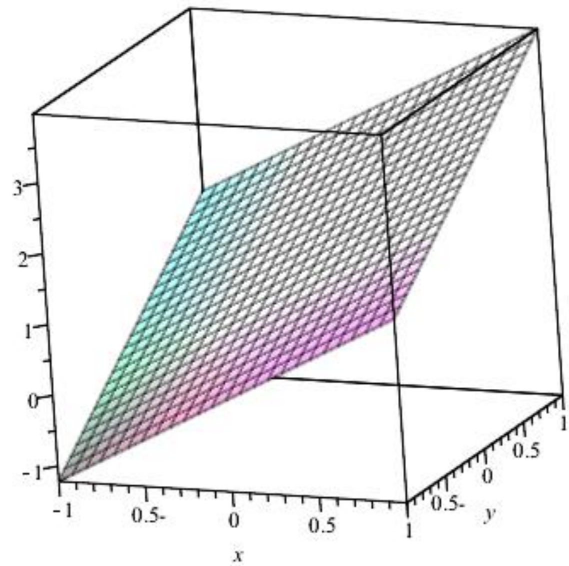
حساب الخطأ المرتكب :

$$\boldsymbol{R}=\sqrt{\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\left[\boldsymbol{f}\ (\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}-\boldsymbol{p}_m(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\right]^2\boldsymbol{dxdy}}=$$

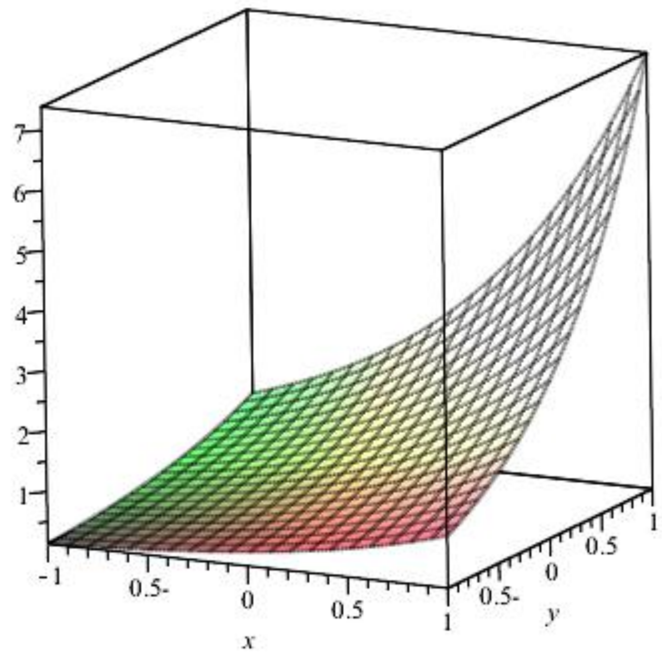
$$=\sqrt{\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\begin{bmatrix}\boldsymbol{e}^{x+y}-\mathbf{(}1.381097846+\\ 1.296997075\boldsymbol{(x+y)}\end{bmatrix}^2\boldsymbol{dxdy}}$$

$$=\sqrt{1.03852095}=1.019078481$$

لنوضح هذا التقريب بشكلين ، الشكل الأول معادلة المستوي $P_1(x,y)$ والشكل الثاني الرسم البياني للدالة $z=e^{x+y}$



شكل مستوي التقريب



الدالة المقربة $z = e^{x+y}$

الاقتراحات والتوصيات:

1-تقريب كثيرات الحدود المتعامدة من نوع آخر مثل هيرميت وتشيبيشيف متعددة المتحولات.

2-حساب الثوابت الموافقة أو المعاملات وتعميم ذلك.

3-حساب الأخطاء المرتكبة.

المراجع العلمية:

[1]–د. حامد عباس كتاب التحليل العددي (2) جامعة البعث2018

[2]–د. ابراهيم ابراهيم كتاب الدوال الخاصة جامعة البعث2004–2005

3]– د. هاشم عبد اللي كتاب تحليل عددي (2) جامعة حلب1991-1992

المراجع المستخدمة:

[4]. M ysovskikh.I.P.2018 Interpolation cubature formulas Nowak . Mowscou.336.p

[5].cege.g.1975 orthogonal polynomials Mowscou.500.p.

[6].Mysovskih.I.p.Abbas.H.A.1991 about. method reproducing Kernel cubature Formulas .vestnig Leningrad univer _N7 P 3-11

[7].Kryov .1967 approximation Numerical for lintegration.Hawka.Mowscou.500.

[8] Richard L . Burden , J. Douglas Faires. Numerical analyses 9 ed 2005.

[9] Kolmagorof .A.N , Fomin.C.V ,Elements of the theory functions and functional analysis- Moscow .1989 .623 p