دور المصفوفات في إيجاد كثيرات حدود ليجندر بطرائق جبرية خطية

طالبة الدراسات العليا: صنوان طعمة

كلية العلوم – جامعة البعث

الدكتور المشرف: أ.د. محمد عامر

الملخص :

يهدف البحث إلى إيجاد كثيرات حدود ليجندر بطرائق جبرية خطية تعتمد على مبرهنة ليوفيل –شتورم سوف نحاول إيجاد مصفوفة المؤثر التفاضلي لهذه الكثيرات والقيم الذاتية والمتجهات الذاتية المقابلة لها .

الكلمات المفتاحية : المصفوفات والعمليات عليها– كثيرات حدود ليجندر – القيم والمتجهات الذاتية – المعادلة فوق الهندسية .

The Role of matrices in finding Legender polynomials by linear algebraic methods

Abstract:

This research aims to find Legender polynomials by linear algebraic methods based on the Liouville-Sturm theorem by finding the differential operator matrix for these polynomials, their eigenvalues and their corresponding eigenvectors.

Keywords:

Matrixs and their operations – Legender polynomials – eigenvalues and eigenvectors – a hypergeometric equation

مقدمة :

كما نعلم إن كثيرة حدود ليجندر معروفة لكثير من الذين يعملون في حقل الرياضيات نظراً لاستخداماتها المتعددة ،ويمكن العثور عليها بطرائق جبرية خطية معروفة تستند على مبرهنة ليوفيل – شتورم [7,8] ،وسوف نحاول إيجاد مصفوفة المؤثر التفاضلي لهذه الكثيرات والقيم الذاتية المقابلة لها ،وهذه الطريقة تختلف عن الطرائق القياسية الأخرى التي تعتمد على حل معادلة ليجندر التفاضلية باستخدام متسلسلات القوى والدالة المولدة وصيغة رودريج.

كما إن كثيرة حدود ليجندر هي حلول لمعادلة تفاضلية عادية مثل المعادلة فوق الهندسية التي تظهر عند حل معادلة لابلاس في الإحداثيات الكروية وحل معادلة شرودينجر بثلاث أبعاد [1].

يمكن كتابة المعادلة فوق الهندسية بالشكل :

$$s(x)\acute{\acute{F}}(x) + t(x)\acute{F}(x) + \lambda \mathrm{F}(x) = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.(1)$$

حيث F دالة حقيقية معرفة بالصورة : $F: U \to \mathcal{R}$ حيث $U \subset \mathcal{R}$

و $\boldsymbol{\lambda} \in \mathcal{R}$ كقيمة ذاتية لها .

إن $t(x)$ و $s(x)$ كثيرات حدود حقيقية من الدرجة الثانية والأولى على الأكثر.

وتوجد حالات مختلفة تعتمد على نوع الدالة $s(x)$:

الحالة الأولى :

عندما تكون $s(x)$ ثابتة تصبح المعادلة (1) بالشكل :

$$\acute{\acute{F}}(x) - 2\alpha x\acute{F}(x) + \lambda F(x) = 0$$

حيث إن $s(x) = const$ وإذا كانت $\alpha = 1$ نحصل على كثيرة حدود هرميت .

الحالة الثانية :

عندما $s(x)$ تكون كثيرة حدود من الدرجة الأولى تصبح المعادلة (1) بالشكل :

$$x\acute{\acute{F}}(x) + (-\alpha x + \beta + 1)\acute{F}(x) + \lambda F(x) = 0$$

إذا كانت $\alpha = 1$ و $\beta = 0$ نحصل على كثيرة حدود لاجير .

الحالة الثالثة :

عندما تكون $s(x)$ كثيرة حدود من الدرجة الثانية يوجد لها ثلاث حالات مختلفة :

1)- عندما يكون لها جذرين مختلفين تأخذ المعادلة (1) الشكل :

$$(1 - x^2)\acute{\acute{F}}(x) + [\beta - \alpha - (\alpha + \beta + 2)x]\acute{F}(x) + \lambda F(x) = 0$$

وهذه معادلة جاكوبي .

ولأجل قيم مختلفة لكل من α وβ يكون :

- عندما $\alpha = \beta$ نحصل على كثيرة حدود جينجنباور.
- عندما $\alpha = \beta = 0$ نحصل على كثيرة حدود ليجندر .

- عندما $\alpha = \beta = \mp\frac{1}{2}$ نحصل على كثيرة حدود تشيبشيف.

2)- عندما يكون لها جذر مضاعف تأخذ المعادلة (1) الشكل :

$$\mathbf{x^2\acute{\acute{F}}(x) + [(\alpha + 2)x + \beta]\acute{F}(x) + \lambda F(x) = 0}$$

إذا كان $\alpha = -1$ و $\beta = 0$ نحصل على كثيرة حدود بيسل .

3)- عندما يكون لها جذور عقدية المعادلة (1) تأخذ الشكل :

$$\mathbf{(1 - x^2)\acute{\acute{F}}(x) + (2\alpha x + \beta)\acute{F}(x) + \lambda F(x) = 0}$$

وهي معادلة رومنفسكي [2] .

كما إن مبرهنة ليوفيل-شتورم تخدم الفيزياء المتقدمة والهندسة وتأخذ معادلة القيمة الذاتية أحياناً الشكل العام لمرافق ذاتي وفق الصيغة :

$$\boldsymbol{LU}(x) + \boldsymbol{\lambda W}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{U}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}$$

حيث L المؤثر التفاضلي :

$$LU(x) = \frac{d}{dx}\left[P(x)\frac{dU(x)}{dx}\right] + q(x)U(x)$$

و $\boldsymbol{\lambda}$ هي القيمة الذاتية لها.

$W(x)$ هي دالة الوزن .

تحليل هذه المعادلة وحلولها يطلق عليها مبرهنة ليوفيل –شتورم .

والأشكال الخاصة ل $P(x)$ و $q(x)$ و $W(x)$ و $\boldsymbol{\lambda}$ تعطي المعادلات المعرّفة لكل من ليجندر و هرميت ولاجير .

يوجد شبه ارتباط وثيق بين هذه المبرهنة والمفاهيم الجبرية الخطية الأخرى ،فمثلاً الدوال تأخذ دور المتجهات في حين المؤثرات تأخذ دور المصفوفات والتقطير لمصفوفة متناظرة حقيقية تقابل حل معادلة تفاضلية عادي ،تعرّف هذه المصفوفة من خلال مؤثر المرافق الذاتي حيث تكون الدوال الذاتية لها مستمرة والتي تقابل المتجهات الذاتية [2,3].

تدرس دوال ليجندر في معظم العلوم كما أسلفنا والتي تركز على المعادلات التفاضلية والدوال الخاصة ،وهنا سوف نحصل على مصفوفة المؤثر التفاضلي لليجندر بالإضافة إلى القيم الذاتية والمتجهات الذاتية

ومن شكل المتجهات نحصل على كثيرات حدود ليجندر ويمكن أن نطبق هذه الطريقة على كثيرات حدود أخرى مثل لاجير وهرميت وتشيبشيف [3,4,5,6].

كثيرات حدود ليجندر مع المصفوفة الجبرية :

كثيرة الحدود الجبرية العامة من الدرجة n لها الشكل :

$$\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \cdots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots + \alpha_n x^n \qquad (2)$$

حيث إن: $\alpha_0, \alpha_1, \ldots \ldots \ldots, \alpha_n \epsilon \mathcal{R}$

تمثل على شكل متجه

$$\begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} \qquad (3)$$

كما إن المشتق الأول والثاني لكثيرة الحدود (2) هي :

$$\frac{d}{dx} \rightarrow \frac{d}{dx}[\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \cdots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots + \alpha_n x^n] = \alpha_1 + 2\alpha_2 x + 3\alpha_3 x^2 + \cdots \ldots \ldots \ldots \ldots + n\alpha_n x^{n-1} \qquad (4)$$

$$\frac{d^2}{dx^2} \to \frac{d}{dx}[\alpha_1 + 2\alpha_2 x + 3\alpha_3 x^2 + \cdots \dots \dots \dots \dots + n\alpha_n x^{n-1}] = 2\alpha_2 + 6\alpha_3 x + 12\alpha_4 x^2 + \cdots \dots \dots \dots \dots + n(n-1)\alpha_n x^{n-2} \quad (5)$$

التمثيل المصفوفي لمؤثر المشتق الأول :

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \cdots \\ \alpha_{n-1} \\ \alpha_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ 2\alpha_2 \\ 3\alpha_3 \\ \dots \\ n\alpha_n \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6)$$

أو

$$\frac{d}{dx} \to \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad (7)$$

التمثيل المصفوفي للمشتق الثاني :

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 & .. & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & .. & 0 & 0 \\ .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. \\ 0 & 0 & 0 & 0 & .. & 0 & n(n-1) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & .. & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & .. & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \dots \\ \alpha_{n-1} \\ \alpha_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\alpha_2 \\ 6\alpha_3 \\ 12\alpha_4 \\ .. \\ n(n-1)\alpha_n \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (8)$$

أو

$$\frac{d^2}{dx^2} \to \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 & .. & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & .. & 0 & 0 \\ .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. \\ 0 & 0 & 0 & 0 & .. & 0 & n(n-1) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & .. & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & .. & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad (9)$$

نستبدل المعادلات (7) و(9) في مؤثر ليجندر التفاضلي :

$$(1-x^2)\frac{d^2}{dx^2} - 2x\frac{d}{dx}$$

حيث إن :

$$\begin{aligned}(1-x^2)\frac{d^2}{dx^2} - 2x\frac{d}{dx} &= (1-x^2)[2\alpha_2 + 6\alpha_3 x + 12\alpha_4 x^2 \\ &+ \cdots \ldots \ldots \ldots \ldots + n(n-1)\alpha_n x^{n-2}] \\ &- 2x[\alpha_1 + 2\alpha_2 x + 3\alpha_3 x^2 + \cdots \ldots \ldots \ldots \ldots \\ &+ n\alpha_n x^n] \\ &= 2\alpha_2 + (-2\alpha_1 + 6\alpha_3)x \\ &+ (-6\alpha_2 + 12\alpha_4)x^2 + \cdots \ldots \ldots \ldots \\ &+ (-n(n-1) - 2n)\alpha_n x^n\end{aligned}$$

نحصل على التمثيل المصفوفي لمؤثر ليجندر التفاضلي :

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & .. & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 6 & 0 & 0 & .. & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 0 & 12 & 0 & .. & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -12 & 0 & 20 & .. & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -20 & 0 & .. & 0 \\ .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & .. & n(n-1) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & .. & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & .. & -n(n-1)-2n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ .. \\ \alpha_{n-2} \\ \alpha_{n-1} \\ \alpha_n \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2\alpha_2 \\ -2\alpha_1 + 6\alpha_3 \\ -6\alpha_2 + 12\alpha_4 \\ -12\alpha_3 + 20\alpha_5 \\ .. \\ n(n-1)\alpha_n \\ 0 \\ [-n(n-1)-2n]\alpha_n \end{bmatrix} \qquad (10)$$

أو

$$(1-x^2)\frac{d^2}{dx^2}-2x\frac{d}{dx}$$
$$\rightarrow\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & .. & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 6 & 0 & 0 & .. & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 0 & 12 & 0 & .. & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -12 & 0 & 20 & .. & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -20 & 0 & .. & 0 \\ .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & .. & n(n-1) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & .. & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & .. & -n(n-1)-2n \end{bmatrix}$$

كمثال بسيط لنأخذ مؤثر ليجندر التفاضلي من الرتبة 4×4 وهو يمثل المصفوفة :

$$M=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -12 \end{bmatrix} \qquad (12)$$

بما إن هذه المصفوفة هي مصفوفة مثلثية فأن القيم الذاتية لهذه المصفوفة هي عناصر القطر الرئيسي وهي :

$$\lambda_1=0\,,\qquad \lambda_2=-2\,,\qquad \lambda_3=-6\,,\qquad \lambda_4=-12$$

حيث القيم الذاتية تحقق المعادلة :

$$det(M - \lambda I) = 0$$

والمتجهات الذاتية المقابلة لهذه القيم هي حلول المعادلة :

$$(M - \lambda_i I)v = 0$$

حيث v المتجه الذاتي:

$$v = \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 - \lambda_i & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 - \lambda_i & 0 & 6 \\ 0 & 0 & -6 - \lambda_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -12 - \lambda_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (13)$$

نستبدل القيمة الذاتية $\lambda_1 = 0$ في المعادلة (13) نحصل :

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

نجد المتجه الذاتي المقابل لها

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

وهي تقابل كثيرة حدود ليجندر $P_0(x) = 1$.

نستبدل القيمة الذاتية $\lambda_2 = -2$ في المعادلة (13) نحصل على :

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

نجد المتجه الذاتي المقابل لها :

$$v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

وهي تقابل كثيرة حدود ليجندر : $P_1(x) = x$.

نستبدل القيمة الذاتية $\lambda_3 = -6$ في المعادلة (13) نحصل على :

$$\begin{bmatrix} 6 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

نجد المتجه الذاتي المقابل لها :

$$v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

وهي تقابل كثيرة حدود ليجندر: $P_2(x) = \frac{(3x^2-1)}{2}$.

نستبدل القيمة الذاتية $\lambda_4 = -12$ في المعادلة (13) نحصل على:

$$\begin{bmatrix} 12 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

نجد المتجه الذاتي المقابل لها :

$$v_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \\ -5 \end{bmatrix}$$

وهي تقابل كثيرة حدود ليجندر: $P_3(x) = \frac{(3x^3-3x)}{2}$.

لأجل أي قيمة .... ,$n = 0,1,2$ في صيغة رودريج= P_n
$\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$.

وأخيراً هنا تم الحصول على كثيرات حدود ليجندر بطريقة مباشرة باستخدام مفاهيم الجبر الخطي الأساسية مثل القيمة الذاتية والمتجه الذاتي لمصفوفة ،بمجرد الحصول على المصفوفة المقابلة للمؤثر التفاضلي لليجندر يتم العثور على القيم الذاتية لهذه المصفوفة والمتجهات الذاتية التي تقابل هذه القيم التي تتوافق مع معاملات كثيرات حدود ليجندر وتم الحصول على ما سبق بطريقة لا تستخدم الطرائق الكلاسيكية والتي تعتمد على حل معادلة ليجندر باستخدام متسلسلات القوى وصيغة رودريج والدالة المولدة .

اقتراحات و توصيات :

نوصي باستخدام هذه الطريقة التي تم اتباعها في هذا البحث على كثيرات حدود أخرى مثل كثيرات الحدود المتعامدة وخاصة كثيرات الحدود الكلاسيكية تشيبشيف – لاجير – هرميت – جاكوبي .

المراجع :

[1] L. C. Andrews, Special functions of mathematics for engineers, SPIE, USA, (1998)

[2] A. P.Raposo et al., Romanovski polynomials in selected physics problems, Central European journal of physics, 5(3), (2007), 253-284

[3] V. Aboites, Laguerre polynomials and linear algebra, Memorias sociedad Matematica Mexicana 52 (2017), 3-13.

[4] V. Aboites, Hermite polynomials through linear algebra, International Journal of Pure and Applied Mathematics 114 (2017) , 401-406.

[5] V. Aboites , Easy Route to tchebycheff polynomials, Rev . Mex. Fis., (2018)

[6] M. Ramirez, Simple Approach to Gegenbauer polynomials, International Journal of Pure and Applied Mathematics , (2018) Ref . AP2017-31-5266,

[7] أ. د. موفق دعبول – نظرية المعادلات – الطبعة الثانية –جامعة دمشق 1991-1992

[8] أ. د . محمد بن عبد الرحمن القويز – الطرائق الرياضية في تحليل فورييه – 1997-1998