التكاملات في المناطق الكروية في الفضاء $\Re^n$ بطريقة النواة المولدة

د. حامد عباس [1] هبه زكريا اصلان [2]

جامعة البعث_ كلية العلوم_ قسم الرياضيات

ملخص:

تم في هذه المقالة إيجاد قيم التكاملات في المنطقة الكروية في الفضاء $\Re^n$ باستخدام طريقة النواة المولدة وذلك بإيجاد الدستور التكاملي, الذي نعتمد عليه في عمليات التعامد والنظيم من أجل إيجاد كثيرات الحدود المتعامدة والمنظمة على الكرة $B_n^{(r)}$ التي نصف قطرها r , ومن ثم تشكيل النواة المولدة التي تساعد في إيجاد ثوابت العلاقة التكعيبية والتي تفيد في تشكيل دستور يساعد في إيجاد قيمة التكاملات المضاعفة لأي دالة في المنطقة $B_n^{(r)}$.

الكلمات المفتاحية: طريقة النواة المولدة, العلاقة التكعيبية, كثيرات الحدود المتعامدة والمنظمة.

[1] عضو هيئة تدريسية, جامعة البعث_ كلية العلوم_ قسم الرياضيات

[2] طالبة دكتوراة, معيدة موفدة, جامعة البعث_كلية العلوم_قسم الرياضيات

The Integrals In Spherical Regions In The Space $\Re^n$ By The Generative Kernal Method

[1] Dr, Hamed Abbas [2] Hiba Zakaria Aslan

Albaath University_ Faculty Of Science_ Department f Mathematics

Abstract:

In this article, the values of the integrals in the spherical region in space $\Re^n$ were found by using The Generative Kernal Method by finding the integrative constitution that we adopt in the orthogonal and regular operations in order to find Orthonormal Polynomials on the sphere with radius r, then forming the Generative Kernal that helps in finding the constants of the Cubature Formulae and that is useful in forming a relation that helps in finding the values of the double integrals of any function in $B_n^{(r)}$

Key words: By The Generative Kernal Method, Cubature Formulae, Orthonormal Polynomials.

[1] A Faculty member_ Albaath university_faculty of science_ department of mathematics

[2] Doctoral student__ Albaath university_faculty of science_ department of mathematics

1. مقدمة:

اكتشفت طريقة النواة المولدة للمرة الأولى عام 1968على يد العالم ميسوفسكيخ من أجل حساب التكاملات المضاعفة في المناطق التي تمتلك مركز تناظر والتي لا تمتلك مركز تناظر[5,6], أمّا التطور الهام لطريقة النواة المولدة حصل عليه ميولر عام 1973حيث تمكن من إثبات المبرهنات, وأوجد العلاقة التكعيبية بـ $2k+1$ دقة جبرية في حالة المناطق المتناظرة, و $2k$ في حالة المناطق غير المتناظرة [2,3,4], وفي عام 1975 تمكن غيغل من إيجاد العلاقة التكعيبية من أجل الكرة الواحدية في الفضاء رباعي الأبعاد, إنَّ البحوث الجارية في هذا المجال تدور حول دراسة خواص النواة المولدة وتطبيق هذه الطريقة في مناطق تكاملية أوسع، والحصول على علاقات تكعيبية جديدة يمكن استخدامها من أجل حساب القيمة التقريبية للتكاملات المضاعفة.

2. هدف البحث:

يهدف البحث إلى إيجاد القانون العام للدستور التكاملي الذي سوف نستخدمه في عمليات التعامد والنظيم في المنطقة الكروية $B_n^{(r)}$, وإيجاد الصيغة العامة لكثيرات الحدود المتعامدة والمنظمة المطلوبة على المنطقة التكاملية المفروضة بـ nمتغير ومن عدة درجات, واستنتاج الصيغة العامة لكل درجة, ثم تشكيل النواة المولدة واستنتاج الدستور العام لها, والذي يزداد صعوبة كلما زادت درجة كثيرة الحدود.

3. مواد البحث:

3-1. بعض المبرهنات والتعاريف الهامة:

قبل عرض طريقة النواة المولدة لتشكيل العلاقات التكعيبية، لابد من توضيح بعض المفاهيم الأساسية, إن العلاقة التكعيبية هي مساواة تقريبية من الشكل:

$$\int_{\Omega} \omega(x)\, f(x)\, dx \cong \sum_{j=1}^{N} C_j\ f(x_j) \qquad (1)$$

حيث إنَّ x_j هي نقاط مختلفة مثنى مثنى وتدعى نقاط المكاملة (النقاط التكاملية) أو عقد العلاقة التكعيبية, N عدد النقاط التكاملية و c_jالثوابت الموافقة لتلك النقاط, $f(x)$الدالة المراد مكاملتها و $\omega(x)$دالة الوزن، أما Ω فهي المنطقة التكاملية.

مبرهنة (1): [7] بفرض أن Ω منطقة تحوي نقاط داخلية, وبفرض أن $\omega(x)$ تحقق الشرط: $x\in\Omega$; $\omega(x)\geq 0 \,\&\, \int_{\Omega}\omega(x)dx>0$ ، والعلاقة التكعيبية (1) تملك دقة جبرية [1] d, ومن أجل $d\geq 0$ ، عند ذلك يكون:

$$N \geq \partial = M(n,k) = \frac{(n+k)!}{n!.k!} \quad : \quad k = \left\lfloor \frac{d}{2} \right\rfloor$$

الرمز $k=\left\lfloor \frac{d}{2} \right\rfloor$ يعني القسم الصحيح من الكسر $\frac{d}{2}$, n بعد الفضاء.

تعريف (2): [7] النواة المولدة هي كثيرة حدود من الدرجة k تحتوي على $2n$ من المتحولات يرمز لها بـ $k_k(u,x)$ حيث $x=(x_1,x_2,....,x_n)$ و $u=(u_1,u_2,...,u_n)$ تدعى مولدة لأنها تحقق الخاصة التالية:

$$F(u) = \int_{\Omega}\omega(x).K_K(u,x).F(x)dx$$

حيثُ $dx = dx_1.dx_2 \; ....dx_n$ و k هي درجة كثيرة الحدود المتعامدة النظامية $F(x)$

يمكننا إيجاد النواة المولدة بالشكل التالي:

---

[1] نقول عن العلاقة التكعيبية (1) إنها تمتلك دقة جبرية d, إذا تحولت إلى مساواة صحيحة, بحيث تكون درجة كثيرة الحدود المُكاملة $f(x)$ لا تتجاوز d

$$\widetilde{K}_k(u,x)=\sum_{j=1}^{n'} F_j^k(u)F_j^k(x) \tag{2}$$

حيثُ إنَّ إشارة الفتحة فوق المجموع تعني أن عملية الجمع بـ j التي توافق كثيرة الحدود $F_j^k(x)$ والتي تمتلك نفس الفردية (الزوجية) مع k في حال كان k عدد فردي (زوجي), و $\widetilde{K}_k(u,x)$ كثيرة حدود ذات $2n$ متغير, درجتها k والتي تمتلك نفس الفردية (الزوجية) مع k, ويمكننا من خلالها تشكيل العلاقة التكعيبية بدقة جبرية $2k$ ولتشكيل العلاقة التكعيبية بدقة فردية $2k+1$ نستخدم الصيغة:

$$K_k(u,x)=\widetilde{K}_k(u,x)+\widetilde{K}_{k-1}(u,x) \tag{3}$$

نستخدم الدقة الزوجية في حالة كون كل من الوزن $\omega(x)$ والمنطقة Ω تمتلك خاصة التناظر المركزي, أي أن :

$$x\in\Omega\Rightarrow -x\in\Omega \quad ,\omega(x)=\omega(-x) \tag{4}$$

نظرية 1:

لنفرض أن $\omega(x)$ تحقق $\omega(x)\geq 0$ & $\int_\Omega \omega(x)dx>0$, وتمتلك Ω نقاط داخلية, فإذا كانت العلاقة التكعيبية (1) تمتلك m دقة جبرية, فإن N عدد عقد العلاقة التكعيبية تحقق المتراجحة:

$$N\geq \chi = M(n,k)=\frac{(n+k)!}{n!\,k!} \qquad ;k=\left[\frac{m}{2}\right]$$

نظرية 2:

لنفرض أن $\omega(x)$ تحقق $\omega(x)\geq 0$ & $\int_\Omega \omega(x)dx>0$, وتمتلك Ω نقاط داخلية, بحيث $\omega(x),\Omega$ تحققان الخاصة التناظرية بالنسبة لـ $\theta=(0,0,.......,0)$ كما في (4)

فإذا كانت العلاقة التكعيبية (1) تمتلك $d = 2k+1$ دقة جبرية, وإذا لم تكن θ من بين عقد العلاقة التكعيبية, فإن عدد عقد العلاقة التكعيبية تحقق المتراجحة:

$$N \geq \begin{cases} 2(\chi - \nu) & ; k : odd \\ 2\nu & \end{cases}$$

وإذا كانت θ من بين عقد العلاقة التكعيبية, فإن عدد عقد العلاقة التكعيبية تحقق المتراجحة:

$$N \geq \begin{cases} 2(\chi - \nu) - 1 & ; k : odd \\ 2\nu + 1 & \end{cases}$$

حيث ν عدد وحيدات الحد غير الزوجية التي درجتها لا تتجاوز k بـ n متغير.

لتشكيل العلاقات التكعيبية نستخدم المبرهنتين الآتيتين:

مبرهنة (2): [7] بفرض أن النقاط $u^1, u^2, ..., u^n$ تحقق الشرط $K_k(u^i, u^j) = b_i \delta_{ij}$ حيث $b_i = K_k(u^i, u^i)$ ويتألف $\bigcap_{i=1}^{n} H_i$ من النقاط x^j , $s = k^n, j = 1, 2, ..., s$,
نأخذ u^1 نقطة اختيارية من الكرة $B_n^{(r)}$ ونتيجة تعويض احداثياتها في (3) نحصل على معادل السطح H_1 ونحصل على النقطة u^2 من التقاطع $B_n^{(r)} \bigcap H_1$ والتي تعيّن السطح H_2 ومن $B_n^{(r)} \bigcap H_1 \bigcap H_2$ نحصل على u^3, وهكذا...عندئذ يمكن تشكيل العلاقة التكعيبية التي دقتها $2k$:

$$\int_{\Omega} \omega(x) f(x) dx \cong \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{b_i} f(u^i) + \sum_{j=1}^{s} C_j \, f(x^j) \qquad (5)$$

مبرهنة (3): [7] بفرض أن كلا من $\omega(x)$ و Ω تحقق خاصة التناظر المركزي(4)، والنقاط $a^{(i)}$ تحقق الشرط $\widetilde{K}_k(u^i, u^j) = b_i \delta_{ij}$ ويتألف $\bigcap_{i=1}^{n} H_i$ من النقاط المختلفة مثنى مثنى $s = k^n, x^{(1)}, x^{(2)}, ...x^{(s)}$, عندئذ يمكن تشكيل العلاقة التكعيبية التي دقتها $2k+1$:

$$\int_{\Omega} \omega(x) f(x) dx \cong \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2b_i}\left(f\left(u^i\right)+f\left(-u^i\right)\right)+\sum_{j=1}^{s} C_j\, f\left(x^j\right) \qquad (6)$$

3-2. إيجاد الدستور التكاملي:

لتكن لدينا B_n كرة في الفضاء $\Re^n$ حيث إن
$B_n^{(r)} = \left\{x \in \Re^n ; x_1^{\,2} + ... + x_n^{\,2} = r^2\right\}$ و r نصف قطر الكرة, ولنوجد قيمة التكامل

$$P_\alpha = \int_{B_n} x^\alpha \quad dx \qquad \textbf{(7)}$$

حيث أن $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$, $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, إذا كانت أحد القوى α_i عدداً فردياً فإن $P_\alpha = 0$, أمّا إذا كانت القوى α_i أعداد زوجية, فإننا نستطيع كتابتها بالشكل $\alpha_i = 2q_i$ حيث إن $i = 1,2,...,n$, فنجد [1]:

$$P_\alpha = r^{|\alpha|+n} \frac{\prod_{i=1}^{n} \Gamma\left(\frac{\alpha_i + 1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{|\alpha| + n}{2} + 1\right)} \qquad ; |\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n \qquad (8)$$

3-3: إيجاد كثيرات الحدود المتعامدة والمنظمة:

لإيجاد كثيرات الحدود المتعامدة والمنظمة, سوف نعتمد على مبدأ غرام شميث في التعامد والنظيم:

$$F_0^0 = \frac{1}{\sqrt{\mu\left(B_n^{(r)}\right)}} \qquad (9)$$

$$F_i^1 = \frac{\sqrt{n+2}}{r\sqrt{\mu\left(B_n^{(r)}\right)}} x_i \quad ; i = 1,2,3,....., n \qquad (10)$$

---

[1] تم إيجاد قيمة التكامل (7) في الفضاء $\Re^n$ تدريجياً من أجل $n = 1, 2, 3, 4$, ثم نعمم الناتج لنحصل على (8).

(11)

$$F_{ij}^2=\begin{cases} F_{ii}^2=\sqrt{\dfrac{(n+3-i)(n+2)(n+4)}{2r^4(n+2-i)\mu\left(B_n^{(r)}\right)}}\left[x_i^2+\dfrac{1}{n+3-i}\left(\sum_{j=1}^{i-1}x_j^2-r^2\right)\right] & ;i=j \\ F_{ij}^2=\sqrt{\dfrac{(n+2)(n+4)}{r^4\mu\left(B_n^{(r)}\right)}}\,x_ix_j & ;i\neq j \end{cases}$$

(12)

$$F_{ijk}^3=\begin{cases} F_{iij}^3=\sqrt{\dfrac{(n+5-i)\lambda}{2(n+4-i)r^6\mu\left(B_r^{(n)}\right)}}\left[x_i^2+\dfrac{1}{n+5-i}\left(\sum_{s=1}^{i-1}x_s^2-r^2\right)\right]x_j & ;i<j \\ F_{iii}^3=\sqrt{\dfrac{(n+5-i)\lambda}{6r^6\mu\left(B_r^{(n)}\right)(n+2-i)}}\left(x_i^2+\dfrac{3}{n+5-i}\left(\sum_{s=1}^{i-1}x_s^2-r^2\right)\right)x_i & ;i=j=k \\ F_{ijk}^3=\sqrt{\dfrac{\lambda}{r^6\mu\left(B_r^{(n)}\right)}}\,x_ix_jx_k & ;i\neq j\neq k \\ F_{iij}^3=\sqrt{\dfrac{(n+3-i)\lambda}{2(n+2-i)r^6\mu\left(B_n^{(r)}\right)}}\left[x_i^2+\dfrac{1}{n+3-i}\left[\left(\sum_{t=1}^{i-1}x_t^2-r^2\right)\right]x_j\right] & ;i>j \end{cases}$$

حيث إن: $\mu\left(B_n^{(r)}\right)=\dfrac{r^n\left(\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right)^n}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}$, $\lambda=(n+2)(n+4)(n+6)$.

3-4: إيجاد صيغة النواة المولدة [9,10]:

3-4-1. النواة المولدة لكثيرات الحدود من الدرجة الأولى:

نعوض (10) في (2), فنجد:

$$\tilde{K}_1(u,x)=\frac{n+2}{r^2\ \mu\left(B_n^{(r)}\right)}\sum_{j=1}^{n}u_jx_j \qquad (13)$$

وبالتعويض في (3), حيث أن $\widetilde{K}_0(u,x)=\dfrac{1}{\mu\left(B_n^{(r)}\right)}$, نجد:

$$K_1(u,x)=\widetilde{K}_1(u,x)+\widetilde{K}_0(u,x)=\frac{1}{\mu\left(B_n^{(r)}\right)}+\frac{n+2}{r^2\ \mu\left(B_n^{(r)}\right)}\sum_{j=1}^{n}u_j x_j \qquad (14)$$

3-4-2. النواة المولدة لكثيرات الحدود من الدرجة الثانية:

تعطى النواة المولدة بالصيغة:

$$\widetilde{K}_2=\frac{1}{\mu\left(B_n^{(r)}\right)}+\sum_{j=1}^{n}F_j^2(x)F_j^2(u)+\sum_{i\neq j}F_i^2(x)F_j^2(u) \qquad (15)$$

بتعويض كثيرات الحدود من الدرجة الثانية ومن الدرجة الصفرية, نجد:

(16)

$$\widetilde{K}_2(u,x)=\frac{1}{\mu\left(B_n^{(r)}\right)}+N\sum_{j=1}^{n}\frac{n+3-j}{n+2-j}\left(U_j\right)\left(X_j\right)+\sum_{i\neq j}F_i^2(x)F_j^2(u)$$

حيث إن: $N=\dfrac{(n+2)(n+4)}{2r^4\mu\left(B_n^{(r)}\right)}$

$$\begin{aligned}U_j&=u_j^2+\frac{1}{n+3-j}\left(\sum_{s=1}^{j-1}u_s^2-r^2\right)\\ X_j&=x_j^2+\frac{1}{n+3-j}\left(\sum_{s=1}^{j-1}x_s^2-r^2\right)\end{aligned} \qquad (17)$$

يمكن كتابة (16) بالشكل:

$$\widetilde{K}_2(u,x)=\frac{1}{\mu\left(B_n^{(r)}\right)}+N\sum_{j=1}^{n}\frac{n+3-j}{n+2-j}\left[U_j\right]\left[x_j^2+\frac{1}{n+3-j}\sum_{s=1}^{j-1}x_s^2-\frac{r^2}{n+3-j}\right]$$

$$+\sum_{i\neq j}F_i^2(x)F_j^2(u)$$

$$=\frac{1}{\mu\left(B_n^{(r)}\right)}+N\sum_{j=1}^{n}\frac{n+3-j}{n+2-j}\left[U_j\right]x_j^2+N\sum_{j=1}^{n}\frac{\left[U_j\right]}{n+2-j}\sum_{s=1}^{j-1}x_s^2$$

$$-N\sum_{j=1}^{n}\frac{\left[U_j\right]}{n+2-j}r^2+\sum_{i\neq j}F_i^2(x)F_j^2(u)$$

(18)

$$\widetilde{K}_2(u,x)=\frac{1}{\mu\left(B_n^{(r)}\right)}+N\left[S_1+S_2+S_3\right]+\frac{(n+2)(n+4)}{r^4\mu\left(B_n^{(r)}\right)}\sum_{i\neq j}x_ix_ju_iu_j$$

لنوجد كلاً من $S_1,\ S_2,\ S_3$: نخرج في S_1 المجموع ذو الدليل n, ثم نبدل كل j ب s فنجد:

$$S_1=\frac{3}{2}U_nx_n^2+\sum_{s=1}^{n-1}\frac{n+3-s}{n+2-s}\left[U_s\right]x_s^2 \qquad (19)$$

نجري في S_2 تبديل في عملية الجمع, فنجد:

$$S_2=\sum_{s=1}^{n-1}x_s^2\sum_{j=s+1}^{n}\frac{U_j}{n+2-j} \qquad (20)$$

بجمع (19) و (20), نجد:

$$S_1+S_2=\frac{3}{2}U_nx_n^2+\sum_{s=1}^{n-1}x_s^2\,.S_4 \qquad (21)$$

حيث إن:

$$S_4 = U_s + \sum_{j=s}^{n} \frac{U_j}{n+2-j} \qquad (22)$$

بتعويض (17) في (22), نجد:

$$S_4 = u_s^2 + \frac{1}{n+3-s}\left(\sum_{t=1}^{s-1} u_t^2 - r^2\right) + \sum_{j=s}^{n} \frac{1}{n+2-j}\left[u_j^2 + \frac{1}{n+3-j}\left(\sum_{t=1}^{j-1} u_t^2 - r^2\right)\right]$$

$$\begin{aligned} S_4 &= u_s^2 + \frac{1}{n+3-s}\sum_{t=1}^{s-1} u_t^2 - \frac{r^2}{n+3-s} + \sum_{j=s}^{n} \frac{1}{n+2-j} u_j^2 \\ &+ \sum_{j=s}^{n} \frac{1}{(n+2-j)(n+3-j)} \sum_{t=1}^{j-1} u_t^2 - \sum_{j=s}^{n} \frac{r^2}{(n+2-j)(n+3-j)} \end{aligned} \qquad (23)$$

نجري تبديل في ترتيب المجموع في الحد الخامس والذي سنرمز له بالرمز S_5 في (23), فنجد:

(24)

$$S_5 = \sum_{t=1}^{s-1} u_t^2 \sum_{j=s}^{n} \frac{1}{(n+2-j)(n+3-j)} + \sum_{t=s}^{n-1} u_t^2 \sum_{j=t+1}^{n} \frac{1}{(n+2-j)(n+3-j)}$$

أما المجموع في (24), يمكن كتابته بالصيغة:

$$\begin{aligned} \sum_{j=s}^{n} \frac{1}{(n+3-j)(n+2-j)} &= \sum_{j=s}^{n} \frac{1}{n+2-j} - \frac{1}{n+3-j} = \frac{1}{2} - \frac{1}{n+3-s} \\ \sum_{j=t+1}^{n} \frac{1}{(n+2-j)(n+3-j)} &= \sum_{j=t+1}^{n} \frac{1}{n+2-j} - \frac{1}{n+3-j} = \frac{1}{2} - \frac{1}{n+2-t} \end{aligned} \qquad (25)$$

بتعويض (25) في (24), نجد:

$$S_5 = \sum_{t=1}^{s-1} u_t^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n+3-s}\right) + \sum_{t=s}^{n-1} u_t^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n+2-t}\right) \qquad (26)$$

بتعويض (26) في (23), نجد:

$$S_4 = u_s^2 + \frac{1}{n+3-s}\sum_{t=1}^{s-1} u_t^2 - \frac{r^2}{n+3-s} + \sum_{j=s}^{n} \frac{1}{n+2-j} u_j^2 + \frac{1}{2}\sum_{t=1}^{s-1} u_t^2 - \frac{1}{n+3-s}\sum_{t=1}^{s-1} u_t^2 + \frac{1}{2}\sum_{t=s}^{n-1} u_t^2 - \sum_{t=s}^{n-1} \frac{1}{n+2-t} u_t^2 - \frac{r^2}{2} + \frac{r^2}{n+3-s} \quad (27)$$

بتجميع الحدود, نجد:

$$S_4 = u_s^2 + \frac{1}{2}\sum_{t=1}^{n} u_t^2 - \frac{r^2}{2} \quad (28)$$

بتعويض (28) في (21), نجد:

$$\begin{aligned} S_1 + S_2 &= \frac{3}{2} U_n x_n^2 + \sum_{s=1}^{n-1} x_s^2 \left(u_s^2 + \frac{1}{2}\sum_{t=1}^{n} u_t^2 - \frac{r^2}{2} \right) \\ &= \frac{3}{2} x_n^2 \left(u_n^2 + \frac{1}{3}\left(\sum_{s=1}^{n-1} u_s^2 - r^2 \right) \right) + \sum_{s=1}^{n-1} x_s^2 \left(u_s^2 + \frac{1}{2}\sum_{t=1}^{n} u_t^2 - \frac{r^2}{2} \right) \\ &= \sum_{s=1}^{n} x_s^2 \left(u_s^2 + \frac{1}{2}\sum_{s=1}^{n} u_s^2 - \frac{r^2}{2} \right) \end{aligned}$$

$$S_1 + S_2 = \sum_{s=1}^{n} x_s^2 \left(u_s^2 + \frac{1}{2}\sum_{s=1}^{n} u_s^2 - \frac{r^2}{2} \right) \quad (29)$$

لنوجد S_3:

$$-S_3=\sum_{j=1}^{n}\frac{\lfloor U_j\rfloor}{n+2-j}r^2=\sum_{j=1}^{n}\frac{r^2}{n+2-j}\left(u_j^2+\frac{1}{n+3-j}\left(\sum_{s=1}^{j-1}u_s^2-r^2\right)\right)$$
$$=\sum_{j=1}^{n}\frac{r^2}{n+2-j}\,u_j^2+\sum_{j=1}^{n}\frac{r^2}{(n+2-j)(n+3-j)}\sum_{s=1}^{j-1}u_s^2-\sum_{j=1}^{n}\frac{r^4}{(n+2-j)(n+3-j)}$$

وبالتالي:

$$-S_3=\frac{r^2}{2}\sum_{s=1}^{n}u_s^2-r^4\left(\frac{n}{2(n+2)}\right) \tag{30}$$

بجمع (29) و (30), نجد:

$$S_1+S_2+S_3=\frac{1}{2}\left[2\sum_{s=1}^{n}x_s^2u_s^2+\sum_{s=1}^{n}x_s^2\sum_{s=1}^{n}u_s^2-r^2\left(\sum_{s=1}^{n}u_s^2+\sum_{s=1}^{n}x_s^2\right)+r^4\left(\frac{n}{n+2}\right)\right]$$

بالتعويض في (18), نجد:

$$\widetilde{K}_2(u,x)=\frac{1}{\mu\left(B_n^{(r)}\right)}+\frac{(n+2)(n+4)}{4r^4\mu\left(B_n^{(r)}\right)}\left[\begin{array}{l}2\sum_{s=1}^{n}x_s^2u_s^2+\sum_{s=1}^{n}x_s^2\sum_{s=1}^{n}u_s^2\\ -r^2\left(\sum_{s=1}^{n}u_s^2+\sum_{s=1}^{n}x_s^2\right)+r^4\left(\frac{n}{n+2}\right)\end{array}\right]$$
$$+\frac{(n+2)(n+4)}{r^4\mu\left(B_n^{(r)}\right)}\sum_{i\neq j}x_ix_ju_iu_j$$

يمكن كتابة العلاقة الأخيرة بالشكل:

(31)

$$\tilde{K}_2(u,x)=\frac{(n+2)}{r^4\mu\left(B_n^{(r)}\right)}\left\{\begin{array}{l} r^4\,\dfrac{n+2}{4}+(n+4)\displaystyle\sum_{i\neq j} x_i x_j u_i u_j + \\ \dfrac{(n+4)}{4}\left[2\displaystyle\sum_{s=1}^{n} x_s^2 u_s^2+\sum_{s=1}^{n} x_s^2\sum_{s=1}^{n} u_s^2-r^2\left(\sum_{s=1}^{n} u_s^2+\sum_{s=1}^{n} x_s^2\right)\right]\end{array}\right\}$$

ولإيجاد $K_2(u,x)$:

(32)

$$\begin{aligned} K_2(u,x)&=\tilde{K}_2(u,x)+\tilde{K}_1(u,x)\\ &=\frac{(n+2)}{r^4\mu\left(B_n^{(r)}\right)}\left\{\begin{array}{l} r^4\,\dfrac{n+2}{4}+(n+4)\displaystyle\sum_{i\neq j} x_i x_j u_i u_j + r^2\sum_{j=1}^{n} u_j x_j \\ \dfrac{(n+4)}{4}\left[2\displaystyle\sum_{s=1}^{n} x_s^2 u_s^2+\sum_{s=1}^{n} x_s^2\sum_{s=1}^{n} u_s^2-r^2\left(\sum_{s=1}^{n} u_s^2+\sum_{s=1}^{n} x_s^2\right)\right]\end{array}\right\}\end{aligned}$$

لنفرض أنّ $(u_1,u_2,.....,u_n)\in S_{n-1}^{(r)}$ وبالتالي فإنّ $\sum_{s=1}^{n} u_s^2=r^2$, نعوض في (31) و (32), فنجد $\tilde{K}_2(u,x)=\dfrac{(n+2)(n+4)}{2r^4\mu\left(B_n^{(r)}\right)}\left\{\left(\sum_{s=1}^{n} x_s u_s\right)^2-\dfrac{r^4}{n+4}\right\}$

وبالتالي فإن الصيغة النهائية ل $\tilde{K}_2(u,x)$ هي:

$$\tilde{K}_2(u,x)=\frac{(n+2)(n+4)}{2r^4\mu\left(B_n^{(r)}\right)}\left(\sum_{s=1}^{n} x_s u_s+\frac{r^2}{\sqrt{n+4}}\right)\left(\sum_{s=1}^{n} x_s u_s-\frac{r^2}{\sqrt{n+4}}\right) \quad (33)$$

وبنفس الطريقة السابقة, نجد أن الصيغة النهائية ل $K_2(u,x)$ هي:

(34)

$$K_2(u,x)=\frac{(n+2)(n+4)}{2r^4\mu\left(B_n^{(r)}\right)}\left(\sum_{s=1}^{n}x_s u_s+\frac{1+\sqrt{n+5}}{n+4}r^2\right)\left(\sum_{s=1}^{n}x_s u_s+\frac{1-\sqrt{n+5}}{n+4}r^2\right)$$

3-4-3. النواة المولدة لكثيرات الحدود من الدرجة الثالثة:

باتباع الخطوات نفسها في الفقرة 3-4-2, حيث تم استنتاج صيغة النواة المولدة والتي هي بالشكل:

$$\widetilde{K}_3(x,u)=\frac{(n+2)(n+4)(n+6)}{6r^6\mu\left(B_n^{(r)}\right)}\left[\left(\sum_{i=1}^{n}u_i x_i\right)^3-\frac{3r^4}{(n+6)}\sum_{i=1}^{n}u_i x_i\right] \qquad (35)$$

$$K_3(u,x)=\frac{(n+2)(n+4)(n+6)}{6r^6\mu\left(B_n^{(r)}\right)}\left[\begin{array}{l}\left(\sum_{i=1}^{n}u_i x_i\right)^3+\frac{3r^2}{n+6}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i u_i\right)^2\\ -\frac{3r^4}{(n+6)}\sum_{i=1}^{n}u_i x_i-\frac{3r^6}{(n+4)(n+6)}\end{array}\right] \qquad (36)$$

4. النتائج ومناقشتها [1,8,11,12]:

4-1. تشكيل العلاقة التكعيبية للنواة المولدة $K_1(u,x)$ و $\widetilde{K}_1(u,x)$:

لنوجد العلاقة التكعيبية من أجل $d=2k+1=3$ نختار النقطة $a^1=(\alpha_1,0,0,.....,0)$ حيث أن $-r<\alpha_1<r$ نعوض في (13) فنحصل على المستوي:

$$H_1:=\frac{n+2}{r^2}\frac{1}{\mu\left(B_n^{(r)}\right)}\alpha_1 x_1=0 \qquad (37)$$

نختار من $H_1\cap B_n^{(r)}$ نقطة a^2, من (37) $x_1=0$ نعوض في المتراجحة $x_1^2+x_2^2\le r^2$ فنجد أن $x_2\le r$ ولنفرض أن $x_2=\alpha_2$ فنجد أن $a^2=(0,\alpha_2,0,.....,0)$ والتي بدورها تعين المستوي H_2

$$H_2:=\frac{n+2}{r^2}\frac{1}{\mu\left(B_n^{(r)}\right)}\alpha_2 x_2=0 \qquad (38)$$

فنختار من $B_n^{(r)} \cap (H_1 \cap H_2)$ نقطة a^3, من (38) ومن (39) $x_1 = x_2 = 0$ بالتعويض في المتراجحة $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \le r^2$ نجد أن $a^3 = (0,0,\alpha_3,0,.....,0)$ وهكذا........ فنجد أن المستويات تتقاطع في نقطة واحدة هي $x = (0,0,.....,0)$

عدد النقاط التكاملية $2n+1$ والحد الأدنى لعدد النقاط هو $N \ge 2\nu + 1 = 2[M(n-1,1)] + 1 = 2n+1$, نعوض في العلاقة التكعيبية (6) حيث: $\frac{1}{2b_i} = \left[2\widetilde{K}_1(u^i, u^i)\right]^{-1} = r^2 \frac{\mu(B_n^{(r)})}{2(n+2)\alpha_i^2}$ إن العلاقة التكعيبية (6) دقيقة من أجل $f(x) = 1, x_i, x_i^2, x_i^3$ لإيجاد الثابت C, نأخذ الدالة $f(x) = 1$ ونعوض في (6), نجد:

$$C\, f(x) = \int_{B_n^{(r)}} 1\, dx - \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2b_i}\left[f(u^i) + f(-u^i)\right] \Rightarrow C = \mu(B_n^{(r)})\left(\frac{(n+2)\alpha_i^2 - r^2 n}{(n+2)\alpha_i^2}\right)$$

لنوجد العلاقة التكعيبية من أجل $d = 2k = 2$ نختار النقطة $u^1 = (r,0,0,.....,0)$ نعوض في (14) فنحصل على المستوي:

$$H_1 := 1 + \frac{n+2}{r} x_1 = 0 \qquad (39)$$

نختار من $H_1 \cap B_n^{(r)}$ نقطة u^2, من (39) $x_1 = -\frac{r}{(n+2)}$ نعوض في المساواة $x_1^2 + x_2^2 = r^2$ فنجد أن $x_2 = \frac{r}{(n+2)}\sqrt{(n+1)(n+3)}$

وبالتالي $u^2 = \left(-\frac{r}{(n+2)}, \frac{r}{(n+2)}\sqrt{(n+1)(n+3)},0,.....,0\right)$ والتي بدورها تعين المستوي H_2

$$H_2 := 1 - \frac{1}{r} x_1 + \frac{1}{r}\sqrt{(n+1)(n+3)}\, x_2 = 0 \qquad (40)$$

فنختار من $B_n^{(r)} \cap (H_1 \cap H_2)$ نقطة u^3, من (39) ومن (40) $x_2 = \frac{-r}{(n+2)}\sqrt{\frac{n+3}{n+1}}$ بالتعويض في المساواة $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = r^2$ نجد أن

$x_3 = r\sqrt{\frac{n(n+3)}{(n+1)(n+2)}}$ وبالتالي فإن

$u^3 = \left(\frac{-r}{n+2}, \frac{-r}{n+2}\sqrt{\frac{n+3}{n+1}}, r\sqrt{\frac{n(n+3)}{(n+1)(n+2)}}, 0, 0, \ldots\ldots, 0\right)$ والتي تعين المستوي

$$H_3 := 1 - \frac{1}{r}x_1 - \frac{1}{r}\sqrt{\frac{(n+3)}{(n+1)}}\,x_2 + \frac{1}{r}\sqrt{\frac{n(n+2)(n+3)}{n+1}}\,x_3 = 0 \qquad (41)$$

فنختار من $B_n^{(r)} \cap (H_1 \cap H_2 \cap H_3)$ نقطة u^4, من (40) ومن (41) بالتعويض في المساواة $x_3 = -r\sqrt{\frac{n+3}{n(n+1)(n+2)}}$ نجد $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = r^2$ أن $x_4 = r\sqrt{\frac{(n+3)(n-1)}{n\,(n+2)}}$ وبالتالي فإن

$$u^4 = \left(\frac{-r}{n+2}, \frac{-r}{n+2}\sqrt{\frac{n+3}{n+1}}, -r\sqrt{\frac{(n+3)}{(n+1)(n+2)}}, r\sqrt{\frac{(n+3)(n-1)}{n\,(n+2)}}, 0, \ldots\ldots, 0\right)$$

والتي تعين المستوي:

$$H_3 := 1 - \frac{1}{r}x_1 - \frac{1}{r}\sqrt{\frac{(n+3)}{(n+1)}}\,x_2 + \frac{1}{r}\sqrt{\frac{n(n+2)(n+3)}{n+1}}\,x_3 = 0 \qquad (42)$$

وبالتالي بالتعميم, نختار من $B_n^{(r)} \cap (H_1 \cap H_2 \cap H_3 \cap \ldots\ldots \cap H_i)$ النقطة u^i والتي تعطى بالشكل:

$$u^i = \left(\begin{array}{l} \frac{-r}{n+2}, \frac{-r}{n+2}\sqrt{\frac{n+3}{n+1}}, -r\sqrt{\frac{(n+3)}{n(n+1)(n+2)}}, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ -r\sqrt{\frac{(n+3)}{(n+4-(i-1))(n+3-(i-1))(n+2)}}\,, r\sqrt{\frac{(n+3)(n-i+3)}{(n+4-i)(n+2)}}, 0\ldots\ldots, 0 \end{array}\right)$$

وبالتالي فإن المستويات H_i , $i = 1, \ldots., n$ تتقاطع في نقطة واحدة هي:

$$x=\left(\frac{-r}{n+2},\frac{-r}{n+2}\sqrt{\frac{n+3}{n+1}},-r\sqrt{\frac{(n+3)}{n(n+1)(n+2)}},\ldots\ldots\ldots,-r\sqrt{\frac{(n+3)}{20(n+2)}},r\sqrt{\frac{3(n+3)}{4(n+2)}}\right)$$

عدد النقاط التكاملية يساوي $n+1$ والحد الأدنى لعدد هذه النقاط $N=M(n,k)=M(n,1)=n+1$, نعوض في العلاقة التكعيبية (14) حيث:

$\frac{1}{b_i}=\left[K_1\left(u^i,u^i\right)\right]^{-1}=\frac{\mu\left(B_n^{(r)}\right)}{n+3}$, إن العلاقة التكعيبية (5) دقيقة من أجل $f(x)=1,x_i,x_i^2$ ولنحسب قيمة الثابت C, نأخذ الدالة $f(x)=1$, نجد

$$C\ f(x)=\int_{B_n^{(r)}}1\ dx-\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{b_i}\left[f\left(u^i\right)\right]\Rightarrow C=\mu\left(B_n^{(r)}\right)\frac{n+2}{n+3}$$

4-2. تشكيل العلاقة التكعيبية للنواة المولدة $K_2(u,x)$ و $\widetilde{K}_2(u,x)$:

4-2-1. تشكيل العلاقات التكعيبية من أجل $\widetilde{K}_2(u,x)$:

أولاً: من أجل $n=2$:

لنشكل العلاقة التكعيبية من أجل النواة المولدة في (33), ومن أجل الدقة الجبرية $d=2k+1=5$ ومن أجل $n=2$, نعوض في (33), فنجد:

$$\widetilde{K}_2(u,x)=\frac{12}{r^4\mu\left(B_2^{(r)}\right)}\left(x_1u_1+x_2u_2+\frac{r^2}{\sqrt{6}}\right)\left(x_1u_1+x_2u_2-\frac{r^2}{\sqrt{6}}\right)\quad(42)$$

لنأخذ النقطة $u^1=(r,0)$, نعوض في (42), فنحصل على معادلة السطح:

$$H_1:\left(rx_1+\frac{r^2}{\sqrt{6}}\right)\left(rx_1-\frac{r^2}{\sqrt{6}}\right)=0\quad(43)$$

نختار من $H_1 \cap B_2^{(r)}$ نقطة u^2, من (43) نعوض في المساواة $x_1 = -\frac{r}{\sqrt{6}}$ فنجد أن $x_1^2 + x_2^2 = r^2$ وبالتالي فإن $x_2 = \sqrt{\frac{5}{6}}r$ والتي $u^2 = \left(-\frac{r}{\sqrt{6}}, \sqrt{\frac{5}{6}}\, r\right)$

تعيين السطح:

$$H_2 : \left(-\frac{r}{\sqrt{6}}x_1 + \sqrt{\frac{5}{6}}\, r\, x_2 + \frac{r^2}{\sqrt{6}}\right)\left(-\frac{r}{\sqrt{6}}x_1 + \sqrt{\frac{5}{6}}\, r\, x_2 - \frac{r^2}{\sqrt{6}}\right) = 0 \quad (44)$$

تتقاطع السطوح $i = 1,2;\ H_i$ ب $s = k^n = 2^2 = 4$ أربع نقاط, هي:

$$\begin{aligned} x^1 &= \left(-\frac{r}{\sqrt{6}}, -\frac{r}{\sqrt{5}}\left(1+\frac{1}{\sqrt{6}}\right)\right), \quad x^2 = \left(-\frac{r}{\sqrt{6}}, \frac{r}{\sqrt{5}}\left(1-\frac{1}{\sqrt{6}}\right)\right) \\ x^3 &= \left(\frac{r}{\sqrt{6}}, \frac{r}{\sqrt{5}}\left(-1+\frac{1}{\sqrt{6}}\right)\right), \quad x^4 = \left(\frac{r}{\sqrt{6}}, \frac{r}{\sqrt{5}}\left(1+\frac{1}{\sqrt{6}}\right)\right) \end{aligned} \quad (50)$$

عدد النقاط التكاملية يساوي 8 والحد الأدنى لعدد النقاط هو $N \ge 2[\chi - \nu] = 2[M(n,k) - M(n-1,1)] = 8$, ونلاحظ أن جميع النقاط تقع داخل الدائرة, حيث تقع العقدتان x^1, x^4 على سطح الدائرة $x^2 + y^2 = \frac{6+\sqrt{6}}{15}r^2$ فلها الثابت نفسه, وتقع العقدتان x^2, x^3 على سطح الدائرة $x^2 + y^2 = \frac{6-\sqrt{6}}{15}r^2$ فلها الثابت نفسه, نعوض في العلاقة التكعيبية حيث $\frac{1}{2b_i} = \left[2K_k\left(u^i, u^i\right)\right]^{-1} = \frac{r^2\pi}{20}$, ولإيجاد الثوابت C_1, C_2, C_3, C_4 نختار الدوال الآتية:

$$f_1 = \left(x - \frac{r}{\sqrt{6}}\right)\left(y + \frac{r}{\sqrt{5}}\left(-1+\frac{1}{\sqrt{6}}\right)\right) \quad f_2 = \left(x - \frac{r}{\sqrt{6}}\right)\left(y + \frac{r}{\sqrt{5}}\left(+1+\frac{1}{\sqrt{6}}\right)\right)$$

$$f_3 = \left(x + \frac{r}{\sqrt{6}}\right)\left(y - \frac{r}{\sqrt{5}}\left(+1+\frac{1}{\sqrt{6}}\right)\right) \quad f_4 = \left(x + \frac{r}{\sqrt{6}}\right)\left(y + \frac{r}{\sqrt{5}}\left(+1-\frac{1}{\sqrt{6}}\right)\right)$$

نحصل على الثابت C_1 بتعويض الدالة f_1 في العلاقة التكعيبية (33), حيث أن الدالة f_1 تنعدم في جميع النقاط في (50) ماعدا العقدة x_1 , ونوجد بقية الثوابت من أجل بقية الدوال على التتالي, فنحصل على ثوابت العلاقة التكعيبية كما في الجدول الآتي:

النقاط x_i	C_i
$x^1=\left(-\frac{r}{\sqrt{6}},-\frac{r}{\sqrt{5}}\left(1+\frac{1}{\sqrt{6}}\right)\right)$ $x^4=\left(\frac{r}{\sqrt{6}},\frac{r}{\sqrt{5}}\left(1+\frac{1}{\sqrt{6}}\right)\right)$	$\frac{8\sqrt{6}-3}{40\sqrt{6}}\pi r^2$
$x^2=\left(-\frac{r}{\sqrt{6}},\frac{r}{\sqrt{5}}\left(1-\frac{1}{\sqrt{6}}\right)\right)$ $x^3=\left(\frac{r}{\sqrt{6}},\frac{r}{\sqrt{5}}\left(-1+\frac{1}{\sqrt{6}}\right)\right)$	$\frac{8\sqrt{6}+3}{40\sqrt{6}}\pi r^2$

الجدول (1): ثوابت العلاقة التكعيبية (6) من أجل $\tilde{K}_2(u,x)$ و $n=2$.

ثانياً: من أجل $n=3$:

لنشكل العلاقة التكعيبية من أجل النواة المولدة في (33), ومن أجل الدقة الجبرية $d=2k+1=5$ ومن أجل $n=3,$, نعوض في (33), فنجد:

$\tilde{K}_2(u,x)=\frac{35}{2r^4\mu\left(B_n^{(r)}\right)}\left(\sum_{i=1}^{3}x_iu_i+\frac{r^2}{\sqrt{7}}\right)\left(\sum_{i=1}^{3}x_iu_i-\frac{r^2}{\sqrt{7}}\right)$ باتباع نفس الخطوات في الفقرة السابقة, نجد أن: $u^1=(r,0,0)$, $u^2=\left(\frac{r}{\sqrt{7}},\sqrt{\frac{6}{7}}\,r,0\right)$,

$u^3=\left(\frac{r}{\sqrt{7}},\frac{r}{\sqrt{6}}\left(1-\frac{1}{\sqrt{7}}\right),\frac{r}{\sqrt{3}}\sqrt{2+\frac{1}{\sqrt{7}}}\right)$ إن تقاطع السطوح الناتجة عن تعويض u^1,u^2,u^3 في (33) هو النقاط الآتية:

$$x^1=\left(\frac{r}{\sqrt{7}},\frac{r}{\sqrt{6}}\left(1-\frac{1}{\sqrt{7}}\right),\frac{r}{\sqrt{3}}\frac{4-\sqrt{7}}{\sqrt{14-\sqrt{7}}}\right),x^2=\left(\frac{r}{\sqrt{7}},\frac{r}{\sqrt{6}}\left(1-\frac{1}{\sqrt{7}}\right),-\frac{r}{\sqrt{3}}\frac{2+\sqrt{7}}{\sqrt{14-\sqrt{7}}}\right)$$

$$x^3=\left(\frac{r}{\sqrt{7}},\frac{r}{\sqrt{6}}\left(-1-\frac{1}{\sqrt{7}}\right),\sqrt{\frac{3}{14-\sqrt{7}}}\,r\right),x^4=\left(\frac{r}{\sqrt{7}},\frac{r}{\sqrt{6}}\left(-1-\frac{1}{\sqrt{7}}\right),-\sqrt{\frac{3}{14-\sqrt{7}}}\,r\right)$$

$$x^5=\left(-\frac{r}{\sqrt{7}},\frac{r}{\sqrt{6}}\left(1+\frac{1}{\sqrt{7}}\right),-\sqrt{\frac{3}{14-\sqrt{7}}}\,r\right),x^6=\left(-\frac{r}{\sqrt{7}},\frac{r}{\sqrt{6}}\left(1+\frac{1}{\sqrt{7}}\right),\sqrt{\frac{3}{14-\sqrt{7}}}\,r\right)$$

$$x^7=\left(-\frac{r}{\sqrt{7}},\frac{r}{\sqrt{6}}\left(-1+\frac{1}{\sqrt{7}}\right),\frac{r}{\sqrt{3}}\frac{2+\sqrt{7}}{\sqrt{14-\sqrt{7}}}\right),x^8=\left(-\frac{r}{\sqrt{7}},\frac{r}{\sqrt{6}}\left(-1+\frac{1}{\sqrt{7}}\right),\frac{r}{\sqrt{3}}\frac{-4+\sqrt{7}}{\sqrt{14-\sqrt{7}}}\right)$$

عدد النقاط التكاملية هو 14 والحد الأدنى لعدد النقاط هو $N\geq 2[\chi-\nu]=2[M(n,k)-M(n-1,1)]=14$, وبالتالي فإن عدد النقاط التكاملية يزيد بمقدار واحد عن الحد الأدنى, تقع النقاط x^2,x^3,x^4,x^5,x^6,x^8 على سطح الكرة $x^2+y^2+z^2=\frac{8+\sqrt{7}}{14+\sqrt{7}}r^2$ فلها الثابت نفسه, وتقع النقاط x^1,x^8 على سطح الكرة $x^2+y^2+z^2=\frac{12-3\sqrt{7}}{14+\sqrt{7}}r^2$ فلها الثابت نفسه.

لنشكل العلاقة التكعيبية حيث أن $\frac{1}{2b_i}=\left[2K_k\left(u^i,u^i\right)\right]^{-1}=2\frac{r^3\pi}{45}$ ولإيجاد الثابت C_1 نختار الدالة $f_1=\left(x-\frac{r}{\sqrt{7}}\right)\left(y+\frac{r}{\sqrt{6}}\left(1+\frac{1}{\sqrt{7}}\right)\right)\left(z+\frac{r}{\sqrt{3}}\frac{2+\sqrt{7}}{\sqrt{14-\sqrt{7}}}\right)$

التي تنعدم في جميع النقاط ماعدا العقدة x^1 , ونوجد بقية الثوابت بنفس الأسلوب, فنحصل على ثوابت العلاقة التكعيبية كما في الجدول الآتي:

النقاط x_i	C_i
x^2,x^3,x^4,x^5,x^6,x^8	$\frac{9\sqrt{7}-21}{90\sqrt{7}}\pi r^3$
x^1,x^8	$\frac{13\sqrt{7}+7}{90\sqrt{7}}\pi r^3$

الجدول (2): ثوابت العلاقة التكعيبية (6) من أجل $\tilde{K}_2(u,x)$ و $n=3$.

2-5-1-2. تشكيل العلاقات التكعيبية من أجل $K_2(u,x)$:

أولاً: من أجل $n=2$:

لنشكل العلاقة التكعيبية من أجل النواة المولدة في (34), ومن أجل الدقة الجبرية $d=2k=4$, ومن أجل $n=2$, نعوض في (34), فنجد

$$K_2(u,x)=\frac{24}{2r^4\mu\left(B_2^{(r)}\right)}\left(x_1u_1+x_2u_2+\frac{1+\sqrt{7}}{6}r^2\right)\left(x_1u_1+x_2u_2+\frac{1-\sqrt{7}}{6}r^2\right)$$

حيث $u^1=(r,0)$, $u^2=\left(\frac{-1+\sqrt{7}}{6}r,\frac{\sqrt{28+2\sqrt{7}}}{6}r\right)$ إن تقاطع السطوح الناتجة عن تعويض u^1,u^2 في (34) هو النقاط الآتية

$$x^1=\left(\frac{-1+\sqrt{7}}{6}r,\frac{-7-2\sqrt{7}}{3\sqrt{28+2\sqrt{7}}}r\right),x^2=\left(\frac{-1+\sqrt{7}}{6}r,\frac{-7+4\sqrt{7}}{3\sqrt{28+2\sqrt{7}}}r\right)$$

$$x^3=\left(\frac{-1-\sqrt{7}}{6}r,\frac{-\sqrt{7}}{\sqrt{28+2\sqrt{7}}}r\right),x^4=\left(\frac{-1-\sqrt{7}}{6}r,\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{28+2\sqrt{7}}}r\right)$$

عدد النقاط التكاملية يساوي 6 والحد الأدنى لعدد النقاط هو $N\ge M(n,k)=M\left(2,\left[\frac{d}{2}\right]\right)=M(2,2)=6$, ونلاحظ أن جميع النقاط تقع داخل الدائرة, حيث تقع العقد x^1,x^3,x^4 على السطح الدائري $x^2+y^2=\frac{14+2\sqrt{7}}{28+2\sqrt{7}}r^2$ وتقع العقدة x^2 على السطح الدائري $x^2+y^2=\frac{70-22\sqrt{7}}{84+6\sqrt{7}}r^2$, حيث $\frac{1}{b_i}=\frac{r^2\pi}{14}$ لايجاد الثابت C_1 نختار الدالة $f_1=\left(x+\frac{1+\sqrt{7}}{6}r\right)\left(y+\frac{7-4\sqrt{7}}{3\sqrt{28+2\sqrt{7}}}r\right)$ فنحصل على

الثابت C_1 بتعويض الدالة f_1 في العلاقة التكعيبية (5), حيث أن الدالة f_1 تنعدم في جميع النقاط ماعدا العقدة x_1 , ونوجد بقية الثوابت من أجل بقية الدوال على التتالي, فنحصل على ثوابت العلاقة التكعيبية كما في الجدول الآتي:

النقاط x_i	C_i
x^1, x^3, x^4	$\frac{13-\sqrt{7}}{56}\pi r^2$
x^2	$\frac{9+3\sqrt{7}}{56}\pi r^2$

الجدول (3): ثوابت العلاقة التكعيبية (5) من أجل $K_2(u,x)$ و $n=2$.

ثانياً: من أجل $n=3$:

لنشكل العلاقة التكعيبية من أجل النواة المولدة في (34), ومن أجل الدقة الجبرية $d=2k=4$, ومن أجل $n=3$, نعوض في (34), فنجد:

$$K_2(u,x)=\frac{35}{2r^4\mu\left(B_3^{(r)}\right)}\left(\sum_{i=1}^{3} x_i u_i+\frac{1+\sqrt{8}}{7}r^2\right)\left(\sum_{i=1}^{3} x_i u_i+\frac{1-\sqrt{8}}{7}r^2\right)$$

حيث $u^1=(r,0,0)$, $u^2=\left(\frac{\sqrt{8}-1}{7}r,\frac{\sqrt{40+2\sqrt{8}}}{7}r,0\right)$

$u^3=\left(\frac{\sqrt{8}-1}{7}r,\frac{9\sqrt{8}-16}{7\sqrt{40+2\sqrt{8}}}r,\sqrt{\frac{104+64\sqrt{8}}{7\left(40+2\sqrt{8}\right)}}\,r\right)$ إن تقاطع السطوح الناتجة عن تعويض u^1,u^2,u^3 في (34) هو النقاط الآتية:

$$x^1=\left(\frac{\sqrt{8}-1}{7}r,\frac{-8+9\sqrt{2}}{7\sqrt{10+\sqrt{2}}}r,\frac{-50+22\sqrt{8}}{\sqrt{2268+2422\sqrt{8}}}r\right)$$

$$x^2=\left(\frac{\sqrt{8}-1}{7}r,\frac{-8+9\sqrt{2}}{7\sqrt{10+\sqrt{2}}}r,\frac{-58+2\sqrt{8}}{\sqrt{2268+2422\sqrt{8}}}r\right)$$

$$x^3=\left(\frac{\sqrt{8}-1}{7}r,\frac{-8-5\sqrt{2}}{7\sqrt{10+\sqrt{2}}}r,\frac{14\left(\sqrt{8}-1\right)}{\sqrt{2268+2422\sqrt{8}}}r\right)$$

$$x^4=\left(\frac{\sqrt{8}-1}{7}r,\frac{-8-5\sqrt{2}}{7\sqrt{10+\sqrt{2}}}r,\frac{-22-6\sqrt{8}}{\sqrt{2268+2422\sqrt{8}}}r\right)$$

$$x^5=\left(\frac{-1-\sqrt{8}}{7}r,\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{10+\sqrt{2}}}r,\frac{14\left(\sqrt{8}-1\right)}{\sqrt{2268+1211\sqrt{8}}}r\right)$$

$$x^6=\left(\frac{-1-\sqrt{8}}{7}r,\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{10+\sqrt{2}}}r,\frac{-22-6\sqrt{8}}{\sqrt{2268+2422\sqrt{8}}}r\right)$$

$$x^7=\left(\frac{-1-\sqrt{8}}{7}r,\frac{-\sqrt{2}}{\sqrt{10+\sqrt{2}}}r,\frac{22+6\sqrt{8}}{\sqrt{2268+2422\sqrt{8}}}r\right)$$

$$x^8=\left(\frac{-1-\sqrt{8}}{7}r,\frac{-\sqrt{2}}{\sqrt{10+\sqrt{2}}}r,\frac{14\left(1-\sqrt{8}\right)}{\sqrt{2268+1211\sqrt{8}}}r\right)$$

عدد النقاط التكاملية هو 11 والحد الأدنى لعدد النقاط هو $N=M(n,k)=M\left(3,\left[\frac{d}{2}\right]\right)=M(3,2)=10$, وبالتالي فإن عدد النقاط التكاملية يزيد بمقدار واحد عن الحد الأدنى و لنشكل العلاقة التكعيبية, حيث $\frac{1}{b_i}=\left[K_k\left(u^i,u^i\right)\right]^{-1}==\frac{r^2\pi}{15}$ لإيجاد الثابت C_1 نختار الدالة التي

$$f_1=\left(x+\frac{\sqrt{8}+1}{7}r\right)\left(y+\frac{8+5\sqrt{2}}{7\sqrt{10+\sqrt{2}}}r\right)\left(z+\frac{58-2\sqrt{8}}{\sqrt{2268+2422\sqrt{8}}}r\right)$$

تنعدم في جميع النقاط ماعدا العقدة x_1 , ونوجد بقية الثوابت بنفس الأسلوب, فنحصل على ثوابت العلاقة التكعيبية كما في الجدول الآتي:

النقاط x_i	C_i
$x^1=\left(\frac{\sqrt{8}-1}{7}r,\frac{-8+9\sqrt{2}}{7\sqrt{10+\sqrt{2}}}r,\frac{-50+22\sqrt{8}}{\sqrt{2268+2422\sqrt{8}}}r\right)$	$\frac{175\sqrt{2}+231}{240+1200\sqrt{2}}\pi r^3$
$x^2=\left(\frac{\sqrt{8}-1}{7}r,\frac{-8+9\sqrt{2}}{7\sqrt{10+\sqrt{2}}}r,\frac{-58+2\sqrt{8}}{\sqrt{2268+2422\sqrt{8}}}r\right)$ $x^3=\left(\frac{\sqrt{8}-1}{7}r,\frac{-8-5\sqrt{2}}{7\sqrt{10+\sqrt{2}}}r,\frac{14(\sqrt{8}-1)}{\sqrt{2268+2422\sqrt{8}}}r\right)$ $x^5=\left(\frac{-1-\sqrt{8}}{7}r,\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{10+\sqrt{2}}}r,\frac{14(\sqrt{8}-1)}{\sqrt{2268+1211\sqrt{8}}}r\right)$ $x^8=\left(\frac{-1-\sqrt{8}}{7}r,\frac{-\sqrt{2}}{\sqrt{10+\sqrt{2}}}r,\frac{14(1-\sqrt{8})}{\sqrt{2268+1211\sqrt{8}}}r\right)$	$\frac{81\sqrt{2}+173}{240+1200\sqrt{2}}\pi r^3$
$x^4=\left(\frac{\sqrt{8}-1}{7}r,\frac{-8-5\sqrt{2}}{7\sqrt{10+\sqrt{2}}}r,\frac{-22-6\sqrt{8}}{\sqrt{2268+2422\sqrt{8}}}r\right)$ $x^6=\left(\frac{-1-\sqrt{8}}{7}r,\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{10+\sqrt{2}}}r,\frac{-22-6\sqrt{8}}{\sqrt{2268+2422\sqrt{8}}}r\right)$ $x^7=\left(\frac{-1-\sqrt{8}}{7}r,\frac{-\sqrt{2}}{\sqrt{10+\sqrt{2}}}r,\frac{22+6\sqrt{8}}{\sqrt{2268+2422\sqrt{8}}}r\right)$	$\frac{287\sqrt{2}-217}{240+1200\sqrt{2}}\pi r^3$

الجدول (4): ثوابت العلاقة التكعيبية (5) من أجل $\tilde{K}_2(u,x)$ و $n=3$.

4-3. تشكيل العلاقة التكعيبية للنواة المولدة $K_3(u,x)$ و $\tilde{K}_3(u,x)$:

أولاً: من أجل $n=2$:

لنشكل العلاقة التكعيبية من أجل النواة المولدة في (35), ومن أجل الدقة الجبرية $d = 2k+1 = 7$ ومن أجل $n = 2$, نعوض في (35), فنجد:

حيث $\widetilde{K}_3(u,x) = \dfrac{32}{r^6 \mu\left(B_2^{(r)}\right)}(x_1u_1 + x_2u)\left(x_1u_1 + x_2u_2 + \dfrac{\sqrt{3}r^2}{\sqrt{8}}\right)\left(x_1u_1 + x_2u_2 - \dfrac{\sqrt{3}r^2}{\sqrt{8}}\right)$

$u^1 = \left(\dfrac{r}{2}, \dfrac{\sqrt{3}}{2}r\right)$ $u^2 = \left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}r, \dfrac{1}{2}r\right)$ تتقاطع السطوح الناتجة عن تعويض u^1, u^2 في (35) ب $s = k^n = 3^2 = 9$ تسع نقاط, هي:

$$x^1 = (0,0) \qquad x^2 = \left(\frac{-3}{4\sqrt{2}}r, \frac{\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}r\right) \qquad x^3 = \left(\frac{3}{4\sqrt{2}}r, \frac{-\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}r\right)$$

$$x^4 = \left(\frac{-\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}r, \frac{-3}{4\sqrt{2}}r\right), x^5 = \left(\frac{-\sqrt{3}-3}{4\sqrt{2}}r, \frac{\sqrt{3}-3}{4\sqrt{2}}r\right), x^6 = \left(\frac{-\sqrt{3}+3}{4\sqrt{2}}r, \frac{-\sqrt{3}-3}{4\sqrt{2}}r\right)$$

$$x^7 = \left(\frac{\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}r, \frac{3}{4\sqrt{2}}r\right), x^8 = \left(\frac{\sqrt{3}-3}{4\sqrt{2}}r, \frac{\sqrt{3}+3}{4\sqrt{2}}r\right), x^9 = \left(\frac{\sqrt{3}+3}{4\sqrt{2}}r, \frac{-\sqrt{3}+3}{4\sqrt{2}}r\right)$$

عدد النقاط التكاملية يساوي 13 والحد الأدنى لعدد النقاط, $N \geq 2\nu + 1 = 2[M(1,3) + M(1,1)] + 1 = 13$, ونلاحظ أن جميع النقاط تقع داخل الدائرة, حيث تقع النقاط x^2, x^3, x^4, x^7 على السطح الدائري $x^2 + y^2 = \dfrac{9}{16}r^2$ فلها الثابت نفسه, وتقع النقاط x^5, x^6, x^8, x^9 على السطح الدائري $x^2 + y^2 = \dfrac{3}{4}r^2$ فلها الثابت نفسه, وإن $\dfrac{1}{2b_i} = \left[2K_k\left(u^i, u^i\right)\right]^{-1} = \dfrac{r^2\pi}{40}$ وبما أن العلاقة التكعيبية (6) صحيحة من أجل الدوال حتى الدرجة السابعة, فلإيجاد C_2 نختار الدالة $x^2\left(y^2 - \dfrac{12-6\sqrt{3}}{32}\right)\left(y^2 - \dfrac{12+6\sqrt{3}}{32}\right)$

ولإيجاد C_5 نختار الدالة $x^2\left(y^2 - \dfrac{3}{32}\right)\left(y^2 - \dfrac{9}{32}\right)$ فنجد:

النقاط x_i	الثوابت
x^2, x^3, x^4, x^7	$\dfrac{16}{135}\pi r^2$

x^5, x^6, x^8, x^9	$\frac{2}{27}\pi r^2$
x^1	$\frac{7}{54}\pi r^2$

الجدول (5): ثوابت العلاقة التكعيبية (6) من أجل $\widetilde{K}_3(u,x)$ و $n=2$.

ثانياً: من أجل $n=3$:

نعوض في (35), فنجد:

$$\widetilde{K}_3(u,x)=\frac{105}{2r^6\mu\left(B_2^{(r)}\right)}\left(\sum_{i=1}^{3}x_iu_i\right)\left(\sum_{i=1}^{3}x_iu_i+\frac{r^2}{\sqrt{3}}\right)\left(\sum_{i=1}^{3}x_iu_i-\frac{r^2}{\sqrt{3}}\right)$$

حيث $u^1=(r,0,0)$, $u^2=(0,r,0)$, $u^3=(0,0,r)$ تتقاطع السطوح الناتجة عن تعويض u^1,u^2,u^3 في (35) ب $s=k^n=3^3=27$ نقطة, هي:

$$x^1=(0,0,0), x^{2,3}=\left(\mp\frac{1}{\sqrt{3}}r,0,0\right), x^{4,5}=\left(0,\mp\frac{1}{\sqrt{3}}r,\ 0\right), x^{6,7}=\left(0,0,\mp\frac{1}{\sqrt{3}}r\right)$$

$$x^{8,9}=\left(\mp\frac{1}{\sqrt{3}}r,\mp\frac{1}{\sqrt{3}}r,0\right), x^{10,11}=\left(\mp\frac{1}{\sqrt{3}}r,0,\mp\frac{1}{\sqrt{3}}r\right), x^{12,13}=\left(0,\mp\frac{1}{\sqrt{3}}r,\mp\frac{1}{\sqrt{3}}r\right)$$

$$x^{14,15}=\left(\pm\frac{1}{\sqrt{3}}r,\mp\frac{1}{\sqrt{3}}r,0\right), x^{16,17}=\left(\pm\frac{1}{\sqrt{3}}r,0,\mp\frac{1}{\sqrt{3}}r\right), x^{18,19}=\left(0,\pm\frac{1}{\sqrt{3}}r,\mp\frac{1}{\sqrt{3}}r\right)$$

$$x^{20,21}=\left(\mp\frac{1}{\sqrt{3}}r,\mp\frac{1}{\sqrt{3}}r,\mp\frac{1}{\sqrt{3}}r\right), x^{22,23}=\left(\pm\frac{1}{\sqrt{3}}r,\mp\frac{1}{\sqrt{3}}r,\mp\frac{1}{\sqrt{3}}r\right)$$

$$x^{24,25}=\left(\mp\frac{1}{\sqrt{3}}r,\pm\frac{1}{\sqrt{3}}r,\mp\frac{1}{\sqrt{3}}r\right), x^{26,27}=\left(\mp\frac{1}{\sqrt{3}}r,\mp\frac{1}{\sqrt{3}}r,\pm\frac{1}{\sqrt{3}}r\right)$$

عدد النقاط التكاملية يساوي 33 والحد الأدنى لعدد النقاط هو:

$$N\geq 2\nu+1=2[M(2,3)+M(2,1)]+1=27$$

تقع النقاط $x^{2,3,4,5,6,7}$ على السطح الكروي $x^2+y^2+z^2=\frac{r^2}{3}$ فلها الثابت نفسه, تقع النقاط $x^{8,9,10,11,\ldots,19}$ على السطح الكروي $x^2+y^2+z^2=\frac{2r^2}{3}$ فلها الثابت نفسه, أما

النقاط $x^{20,21,....,27}$ تقع على السطح الكروي $x^2+y^2+z^2=r^2$ فلها نفس ثوابت $u^{1,2,3}$ نعوض في العلاقة التكعيبية (6) حيث $\frac{1}{2b_i}=\left[2K_k\left(u^i,u^i\right)\right]^{-1}==\frac{2r^3\pi}{105}$ وبما أن العلاقة التكعيبية (6) صحيحة من أجل الدوال حتى الدرجة السابعة, فلإيجاد C_1 نختار الدالة $\left(x^2-\frac{1}{3}\right)\left(y^2-\frac{1}{3}\right)\left(z^2-\frac{1}{3}\right)$, ولإيجاد C_2 نختار الدالة $x^2\left(y^2-\frac{1}{3}\right)\left(z^2-\frac{1}{3}\right)$, لإيجاد C_8 نختار الدالة $x^2y^2\left(z^2-\frac{1}{3}\right)$, ولإيجاد C_{20} نختار الدالة $x^2y^2z^2$, فنجد:

النقاط x_i	الثوابت
x^1	$\frac{8}{105}\pi r^3$
$x^{2,3,4,5,6,7}$	$\frac{2}{35}\pi r^3$
$x^{8,9,10,11,.....,19}$	$\frac{2}{35}\pi r^3$
$x^{20,21,....,27}$	$\frac{1}{70}\pi r^3$

الجدول (7): ثوابت العلاقة التكعيبية (6) من أجل $\tilde{K}_3(u,x)$ و $n=3$.

5. الاستنتاجات والتوصيات:

من خلال ماسبق, نجد أنه من المفيد زيادة درجة كثيرات الحدود للحصول على علاقة تكعيبية ذات دقة جبرية أعلى, ويمكن تعميم صيغة النواة المولدة من أجل أي درجة كثيرة حدود للحصول عليها دون استنتاج وهذا ما يتم العمل عليه ودراسته, ونوصي بالعمل على دراسة طريقة النواة المولدة في مناطق تكاملية جديدة, والعمل على دراستها في فضاءات مختلفة أخرى.

6. قائمة المراجع:

[1]. G. PETROVA. 2004- Cubature Formulae For Spheres, Simplices And Balls. Taxas A&M University., Journal Of Computational And Applied Mathematics. 162,483-496.

[2]. H. M. Moller, 1976- Cubature Formulae mit minimaler Knotenzahl, Numer. Math., 35, pp.185-200.

[3] H. M. Moller, 1979- Lower bounds for the number of nodes in cubature formulae, Numerical Integration, Internat. Ser. Numer. Math. Vol. 45, G. Hammerlin, ed., Birkhauser, Basel.

[4] H.M. Moller, 1973-POLYNOMIALS AND CUBATURE FORMULAE, Ph.D. Thesis, Univ. Dortmund.

[5]. I.P. MYSOVSKIKH. 1969-Cubature Formulae And Orthogonal Polynomials. Zh. Vychisl. Mat. I Mat. Fiz., 9(2): 419-425.

[6]. I.P. MYSOVSKIKH. 1969-The Construction Of Interpolation Cubature Formulae With The Least Number Of Nodes. Tr. II. Respubl. Konf. Mat. Belorussii, Pages 42-48. 1969. (Russian), ZB 194. 18703.

[7]. I.P. MYSOVSKIKH. 1981- Interpolation Cubature Formulas. Moskva: “Nauka”. 336p., Moscow-Leningrad.

[8]. I.P. MYSOVSKIKH. 1985- Cubature Formulas In The Case Of Central Symmetry. Netody Vychisl., 14:35. (Russian), MR 90f:65035, ZB 754.41028.

[9].I.P. MYSOVSKIKH. 1995-Representation Of The Reproducing Kernels Of A Ball. Metody Vychisl., 17:145-152.

[10]. I.P. MYSOVSKIKH. 1996-A representation Of The Reproducing Kernels Of A Shpere. Zh. Vychisl. Mat. I mat. Fiz., 36(3):28-34, (Russian), Comput. Maths math. Phys. 36(3), 303-308(English).

[11]. KH. A. ABBAS and I.P. MYSOVSKIKH. 1991-On The Method Of Reproducing Kernel For Constructing Cubature Formulae. Vestnik Leninger. Univ., Ser. I, 22(4): 3-11. (Russian).

[12]. R. COOLS, I.P. MYSOVSKIKH, and H.J. Schmid. 2001-Cubature Formulae And Orthogonal Polynomials . J. Comput. Apply. Math., 127:121-152.