الأنظمة الديناميكية المستمرة شبيهة نيوتن لحل مسائل أمثليات محدبة مقيدة ذات متحولين في فضاءات هلبرت

أ. د. محمد سويقات [1]

د. بشرى عباس [2]

ليال علي [3]

الملخّص

الهدف من هذا البحث هو إيجاد الحلول المثلى لمسألة القيم السرجية المحدبة–المقعرة الموافقة لمسألة أمثليات محدبة مقيدة ذات متحولين في فضاءات هلبرت حقيقية. يتم ذلك بتطبيق طريقة الأنظمة الديناميكية المستمرة شبيهة نيوتن، حيث يتم تحليل التقارب العام نحو الحل الأمثل باستخدام تحليل Lyapunov المقارب، ومن ثم إثبات أن مسارات النظام الديناميكي المقترح تحقق خاصية minimizing/ maximizing وتتقارب بضعف نحو الحل الأمثل.

الكلمات المفتاحية.

مؤثر مضطرد أعظمي، طريقة الاتجاهات المتناوبة ، تحليل Lyapunov، التقارب الضعيف، تنظيم Levenberg- Marquardt

[1]. أستاذ – قسم الرياضيات– كلية العلوم – جامعة تشرين – اللاذقية – سورية soueycatt55@hotmail.com

[2]. مدرسة–قسم الرياضيات– كلية العلوم – جامعة تشرين – اللاذقية – سورية abbas.boushra@yahoo.com

[3]. طالبة دكتوراه – قسم الرياضيات– كلية العلوم – جامعة تشرين – اللاذقية– سورية layal91me@hotmail.com

Continuous Newton-like Dynamics for Solving Constrained Convex Optimization Problem with Two Variables in Real Hilbert Spaces

Dr. Mohamed Soueycatt[4]

Dr .Boushra Abbas[5]

Layal Ali[6]

Abstract

The aim of this paper is to find the optimal solutions for the saddle-valued convex-concave problem corresponding to the linear constrained convex optimization problem with two variables in real Hilbert spaces. This is achieved by applying the continuous Newton-like dynamical systems, the global convergence towards the optimal solution is analyzed by using Lyapunov asymptotic analysis, then, it is demonstrated that the trajectories of the proposed dynamical system fulfill the minimizing / maximizing property and converge weakly towards the optimal solution.

Key Words.

Maximal monotone operator; alternating direction method of multipliers; Lyapunov analysis; weak convergence; Levenberg-Marquardt regularization.

4 Professor, Department of mathematics, Faculty of Sciences, Tishreen University, Lattakia , Syria.soueycatt55@hotmail.com
[5] Professor, Department of mathematics, Faculty of Sciences, Tishreen University, Lattakia , Syria.abbas.boushra@yahoo.com
[6] PhD student, Department of mathematics, Faculty of Sciences, Tishreen University , Lattakia , Syria.layal91me@hotmail.com

1. مقدمة.

تُعتَبَر المسائل الأمثلية المحدبة ذات المتحولين والمقيدة بقيود خطية ذات أهمية عالية من الناحيتين النظرية والتطبيقية، وبشكل خاص عندما تُدرَس في فضاءات هلبرت حقيقية غير منتهية الأبعاد إذ أنها في هذه الحالة تُطَبَّق بمجالات مختلفة كالمعادلات التفاضلية الجزئية والألعاب وأنظمة التحكم الأمثل وبعض التطبيقات في الميكانيك وغيرها، [1,5,8,10,11].

لتكن X, Y, Z فضاءات هلبرت حقيقية؛ $f: X \to R,\ g: Y \to R$ تابعان محدبان وينتميان إلى صف التوابع القابلة للاشتقاق حتى المرتبة الثانية والذي يرمز له بـ C^2؛ $A: X \to Z,\ B: Y \to Z$ مؤثران خطيان ومستمران. **المسألة المطروحة هي** إيجاد العناصر (x, y) من فضاء الجداء الديكارتي $X \times Y$ التي تكون حلاً للمسألة الآتية:

$$\min_{x \in X, y \in Y} \{ f(x) + g(y) \ : \ Ax - By = 0 \} \quad , \tag{1.1}$$

تعتمد استراتيجية العمل مع المسألة (1.1) تعتمد على تعريف تابع لاغرانج الموسع (augmented Lagrangian function) المرفق بها، وهو التابع $L_\rho: X \times Y \times Z \to R$ المعرف بالعلاقة الآتية:

$L_\rho(x, y, z) := f(x) + g(y) + \langle z, Ax - By \rangle + \frac{\rho}{2} \|Ax - By\|^2$ حيث $\rho > 0$.

نشير إلى أن L_ρ هو تابع محدب− مقعر، ويقصد بذلك أنه محدب بالنسبة إلى (x, y) ومقعر بالنسبة إلى z .

إن إيجاد حل للمسألة (1.1) يؤول إلى إيجاد **نقطة سرجية** (saddle point) لتابع لاغرانج الموسع L_ρ أي إيجاد العناصر $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \in X \times Y \times Z$ التي تحقق المتراجحة الآتية:

$$L_\rho(\bar{x}, \bar{y}, z) \le L_\rho(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \le L_\rho(x, y, \bar{z}) \quad , \tag{1.2}$$

وذلك أياً كانت $(x, y, z) \in X \times Y \times Z$. الطريقة الكلاسيكية من أجل حل المسألة (1.1) أو ما يكافئها (1.2)، هي طريقة الاتجاهات المتناوبة (alternating direction method of multipliers) ، [7,6,9,14,15]، وهي طريقة تكرارية من الشكل الآتي:

لتكن $(y^0, z^0) \in Y \times Z$ نقطة بدء كيفية، عندئذ فإن طريقة الاتجاهات المتناوبة تُنتِج متتالية $\{(x^k, y^k, z^k)\}$ في $X \times Y \times Z$ من العلاقات الآتية:

$$\begin{cases} 0 = \nabla f(x^{k+1}) + A^T z^k + \rho A^T (A x^{k+1} - B y^k) \quad , & (1.3) \\ 0 = \nabla g(y^{k+1}) - B^T z^k + \rho B^T (B y^{k+1} - A x^{k+1}) \quad , & (1.4) \\ 0 = z^{k+1} - z^k + \rho (B y^{k+1} - A x^{k+1}) \quad , & (1.5) \end{cases}$$

بشكل عام، من أجل كل $k = 1,2,3, \dots$ أي في كل خطوة، تحتاج كل من العلاقات (1.3), (1.4), (1.5) إلى الحل بطريقة ما، إذ أنه في العديد من المسائل لا يمكن تطبيق هذه العلاقات بصيغها الدقيقة. في هذا المقال نقوم بإيجاد حل لكل من العلاقات (1.3), (1.4), (1.5) بتطبيق الأنظمة الديناميكية المستمرة شبيهة نيوتن [2,3,4].

هدف البحث.

تعميم طريقة الأنظمة الديناميكية المستمرة شبيهة نيوتن من حالة إيجاد أصفار مؤثر مضطرد أعظمي عام إلى حالة إيجاد حلول مسائل القيم السرجية المتعددة المتحولات.

مواد وطرائق البحث.

تُعطَى بعض التعاريف والمفاهيم الأساسية التي تتعلق بالمؤثرات المضطردة الأعظمية ومسألة إيجاد أصفارها، كما تستخدم كل من طريقتي نيوتن المنظمة والاتجاهات المتناوبة.

2. تعاريف ومفاهيم أساسية.

ليكن X فضاء هلبرت حقيقياً معرَّف عليه الجداء الداخلي الذي يرمز له بالرمز $\langle .,. \rangle$.

• يقال عن تابع $f:[0,b] \to X$ حيث $b > 0$ إنه **مستمر بالإطلاق** (absolutely continuous function)، [4] ، إذا تحقق الشرط الآتي:

من أجل كل $\varepsilon > 0$، يوجد $\eta > 0$ بحيث إنه من أجل كل أسرة منتهية من المجالات $I_k =]a_k, b_k[$ يكون:

$$I_i \cap I_j = \emptyset; i \neq j \quad \& \quad \sum |b_k - a_k| \leq \ \eta \Rightarrow \sum \|f(b_k) - f(a_k)\| \leq \ \varepsilon$$

• إذا كان $f: X \to R$ تابعاً محدباً وقابلاً للاشتقاق، عندئذ يرمز لمشتقه بالرمز ∇f ويسمى مؤثر التدرج (gradient operator) للتابع f وهو مؤثر وحيد القيمة ويحقق المتراجحة الآتية والتي تسمى **<u>متراجحة التحدب</u>:**

$$\forall \xi \in X \ : f(\xi) \geq f(x) + \langle \nabla f(x), \xi - x \rangle$$

• يقال عن المؤثر $T: X \rightrightarrows X$ إنه **مؤثر مضطرد** (monotone operator)، [13]، إذا تحققت المتراجحة:

$$\forall y \in T(x), \ \acute{y} \in T(\acute{x}) : \ \langle x - \acute{x}, y - \acute{y} \rangle \geq 0 \ , \qquad (2.1)$$

• يقال عن المؤثر T إنه **مضطرد أعظمي** (maximal monotone operator) إذا كان بيانه غير محتوى في بيان أي مؤثر مضطرد آخر معرف على الفضاء X.

• ليكن $T: X \rightrightarrows X$ مؤثراً مضطرداً أعظمياً معرفاً على فضاء هلبرت X. **مسألة إيجاد أصفار المؤثر المضطرد الأعظمي T**، هي مسألة إيجاد العناصر $x \in X$ التي تحقق الآتي:

$$0 \in T(x) \quad , \qquad (2.2)$$

لقد اقتُرِحَت طريقة الأنظمة الديناميكية المستمرة شبيهة نيوتن (continuous Newton-like dynamical systems) من قبل كل من Attouch and Svaiter في [2] لحل هذه المسألة. نقدم فيما يأتي الأفكار الأساسية لهذه الطريقة.

من أجل إيجاد حل للمسألة (2.2) نبدأ أولاً من حالة معروفة وهي أن المؤثر T ينتمي إلى صف المؤثرات القابلة للاشتقاق حتى المرتبة الأولى C^1، نرمز لمشتقه بـ T'. **<u>في هذه الحالة</u>**، من أجل إيجاد أصفار المؤثر T تُستَخدَم **طريقة تنظيم Levenberg-Marquardt** وهي طريقة تكرارية تبدأ من $x^0 \in X$ كيفية وتنتج متتالية في X من العلاقات الآتية:

$$T(x^k) + (\lambda_k I + T'(x^k)\ )\left(\frac{x^{k+1} - x^k}{\Delta t_k}\right) = 0 \quad ;\ \Delta t_k > 0\ , \tag{2.3}$$

حيث $I: X \to X$ هو المؤثر الواحدي على X، و $\{\lambda_k\}$ متتالية أعداد حقيقية موجبة.

قدَّم Attouch and Svaiter في [2] صياغة للعلاقة (2.3) بواسطة الأنظمة الديناميكية المستمرة، لتأخذ الشكل:

$$\lambda(t)\dot{x}(t) + T'\big(x(t)\big)\dot{x}(t) + T\big(x(t)\big) = 0 \quad , \tag{2.4}$$

حيث $\dot{x}(t) = \frac{d}{dt}x(t)$ هو مشتق التطبيق $t \longmapsto x(t)$ بالنسبة للزمن t، والتطبيق $t \longmapsto \lambda(t)$ هو تابع حقيقي موجب القيم. بملاحظة أن $\frac{d}{dt}T\big(x(t)\big) = T'\big(x(t)\big)\dot{x}(t)$، نستطيع كتابة (2.4) على الشكل الآتي:

$$\begin{cases} \qquad v(t) = T\big(x(t)\big) \\ \lambda(t)\dot{x}(t) + \dot{v}(t) + v(t) = 0 \quad , \end{cases} \tag{2.5}$$

لننتقل الآن إلى حالة المؤثر المضطرد الأعظمي العام [المتعدد القيم]، عندئذ (2.5) تأخذ الشكل الآتي:

$$\begin{cases} \qquad v(t) \in T\big(x(t)\big) \\ \lambda(t)\dot{x}(t) + \dot{v}(t) + v(t) = 0 \quad , \end{cases} \tag{2.6}$$

تشكل العلاقات (2.6) النظام الديناميكي المستمر شبيه نيوتن والمقترح في [2] من أجل حل مسألة إيجاد أصفار مؤثر مضطرد أعظمي، أي المسألة (2.2).

استراتيجية العمل مع النظام الديناميكي (2.6) المقتَرَح بهدف إيجاد الحلول للمسألة (2.2)، تتلخص في دراسة تقارب مسارات النظام (2.6) نحو صفر للمؤثر T عندما يسعى الزمن نحو اللانهاية. لنذكر فيما يأتي ببعض النتائج التي تُستَخدَم لاحقاً في دراستنا.

مبرهنة2.1 [4, lemma 5.1] : إذا كان $F: [0,\infty[\to R$ تابعاً مستمراً بالإطلاق، ومحدوداً من الأدنى، وكان $G \in L^1([0,\infty[)$ يحقق تقريباً لكل $t > 0$ ، (for almost all)،المتراجحة $\frac{d}{dt}F(t) \le G(t)$ عندئذ النهاية الآتية $lim_{t\to\infty} F(t)$ موجودة في R.

مبرهنة2.2 [4, lemma 5.2] : إذا كان $F \in L^p([0,\infty[), 1 \le p < \infty, 1 \le r \le \infty$ تابعاً مستمراً بالإطلاق وغير سالب، وكان $G \in L^r([0,\infty[)$ ، وإذا تحققت أيضاً تقريباً لكل $t > 0$ المتراجحة $\frac{d}{dt}F(t) \le G(t)$ عندئذ يكون $lim_{t\to\infty} F(t) = 0$

مبرهنة2.3 [12] : لتكن S مجموعة غير خالية في X و $x(.): [0,\infty[\to X$ مساراً ما، نفرض أن لكل z من S فإن النهاية الآتية $\lim_{t\to\infty}\|x(t) - z\|$ موجودة، وأن كل نقطة لاصقة ضعيفة x (بالنسبة للتبولوجيبا الضعيفة المعرفة على X) تنتمي إلى S عندئذ يكون:

$$\lim_{t\to\infty}\big(x(t)\big) = x_\infty \quad ; \qquad x_\infty \in S$$

ملاحظة: جميع التكاملات في هذا المقال هي حسب مفهوم ليبيغ.

3.النتائج ومناقشتها.

لنعرف التطبيق $v(.): [0,+\infty[\to X \times Y \times Z$ بالشكل الآتي:

$$v(t) := \begin{pmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \\ v_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nabla f\big(x(t)\big) + \rho A^T A x(t) \\ \nabla g\big(y(t)\big) + \rho B^T B y(t) \\ By(t) - Ax(t) \end{pmatrix}$$

عندئذ نستطيع تطبيق طريقة الأنظمة الديناميكية المستمرة شبيهة نيوتن [2,3]، على كل من العلاقات $(1.3), (1.4), (1.5)$، وبالتالي نحصل على النظام الديناميكي المستمر شبيه نيوتن والمطبق على طريقة الاتجاهات المتناوبة وهو بالشكل الآتي:

$$\lambda(t)\dot{x}(t) + \nabla^2 f\big(x(t)\big)\dot{x}(t) + \rho A^T A\dot{x}(t) + \nabla f\big(x(t)\big) + \rho A^T A x(t) + \\ + A^T\bar{z} - \rho A^T B\bar{y} = 0 \quad , \qquad (3.1)$$

$$\lambda(t)\dot{y}(t) + \nabla^2 g\big(y(t)\big)\dot{y}(t) + \rho B^T B\dot{y}(t) + \nabla g\big(y(t)\big) + \rho B^T B y(t) + \\ - B^T\bar{z} - \rho B^T A x(t) = 0 \quad , \qquad (3.2)$$

$$\lambda(t)\dot{z}(t) + \rho\big(B\dot{y}(t) - A\dot{x}(t)\big) + \rho\big(By(t) - Ax(t)\big) = 0 \quad , \qquad (3.3)$$

حيث: $\bar{y} \in Y, \bar{z} \in Z$ عنصران مثبتان كيفيان، $x(.)$ في (3.2) هي المسار (trajectory) الناتج من حل (3.1)، و $\lambda(.): [0, +\infty[\to]0, +\infty[$ تابع التنظيم وهو تابع مستمر بالإطلاق على كل مجال مغلق ومحدود من الشكل $[0, \mathrm{b}], 0 < \mathrm{b} < \infty$ ، وبالتالي فإن المشتق $\dot{\lambda}(.)$ موجود تقريباً لكل $t > 0$ ، كما أنه قابل للمكاملة حسب مفهوم ليبيغ على كل مجال مغلق ومحدود $[0, b], 0 < b < \infty$.

سنفترض من الآن وصاعداً أن $\big(x(.), y(.), z(.)\big): [0, +\infty[\to X \times Y \times Z$ هو حل عام قوي [2, Definition 2.2] ، (strong global solution) للجملة $(3.1) - (3.3)$ وأن $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \in X \times Y \times Z$ نقطة كيفية مثبتة.

في المبرهنة الآتية نثبت صحة بعض العلاقات الهامة التي تحققها مسارات النظام $(3.3) - (3.1)$.

مبرهنة 3.1 من أجل تقريباً كل(for almost all) $t \in [0, +\infty[$ ، تكون المتراجحات الآتية صحيحة:

$$\langle \nabla^2 f\big(x(t)\big)\dot{x}(t) + \rho A^T A\dot{x}(t), \dot{x}(t)\rangle \geq 0 \quad , \tag{3.4}$$

$$\langle \nabla^2 g\big(y(t)\big)\dot{y}(t) + \rho B^T B\dot{y}(t), \dot{y}(t)\rangle \geq 0 \quad , \tag{3.5}$$

$$\langle B\dot{y}(t) - A\dot{x}(t), \dot{z}(t)\rangle \geq 0 \quad , \tag{3.6}$$

البرهان. لدينا $\nabla f(x) + \rho A^T A x$ مؤثر مضطرد أعظمي وبالتالي لكل $t \in [0, +\infty[$ يكون:

$$\langle \nabla f\big(x(t+h)\big) + \rho A^T A x(t+h) - \Big(\nabla f\big(x(t)\big) + \rho A^T A x(t)\Big), x(t+h) - x(t)\rangle \geq 0$$

نقسم طرفي المتراجحة الأخيرة على h^2 ونأخذ النهايات عندما $h \to 0$ فنجد العلاقة(3.4). وبشكل مشابه نبين صحة كل من العلاقتين (3.5) و (3.6). ■

مبرهنة 3.2 ليكن $\big(x(.), y(.), z(.)\big): [0, +\infty[\to X \times Y \times Z$ مسار حل عام قوي للنظام الديناميكي $(3.1) - (3.3)$، ولتكن $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \in X \times Y \times Z$ نقطة مثبتة كيفياً، عندئذ:

التابع $t \longmapsto L_\rho(x(t), y(t), \bar{z})$ غير متزايد، والتابع $t \longmapsto L_\rho\big(\bar{x}, \bar{y}, z(t)\big)$ غير متناقص.

البرهان. لنشكل الجداء الداخلي للعلاقة (3.1) بالمتجه $\dot{x}(.)$ ، كما نشكل الجداء الداخلي للعلاقة (3.2) بالمتجه $\dot{y}(.)$ ، و نجمع المعادلتين الناتجتين نجد:

$$\langle \nabla f\big(x(t)\big) + \rho A^T A x(t) + A^T \bar{z} - \rho A^T B \bar{y}, \dot{x}(t)\rangle + \langle \nabla g\big(y(t)\big), \dot{y}(t)\rangle +$$
$$+\langle \rho B^T B y(t) - B^T \bar{z} - \rho B^T A x(t), \dot{y}(t)\rangle = -\lambda(t)\|\dot{x}(t)\|^2 - \lambda(t)\|\dot{y}(t)\|^2 +$$

$$-\langle \nabla^2 f\big(x(t)\big)\dot{x}(t) + \rho A^T A\dot{x}(t), \dot{x}(t)\rangle - \langle \nabla^2 g\big(y(t)\big)\dot{y}(t) + \rho B^T B\dot{y}(t), \dot{y}(t)\rangle$$

نستخدم العلاقتين (3.5) ,(3.4) مع الفرض أن $0 < (.)\lambda$ نحصل على:

$$\langle \nabla f\big(x(t)\big) + \rho A^T A x(t) + A^T \bar{z} - \rho A^T B y(t), \dot{x}(t)\rangle + \langle \nabla g\big(y(t)\big), \dot{y}(t)\rangle +$$

$$+\langle \rho B^T B y(t) - B^T \bar{z} - \rho B^T A x(t), \dot{y}(t)\rangle + \langle \rho A^T B(y(t) - \bar{y}), \dot{x}(t)\rangle \leq 0$$

وبحساب المشتق $\frac{d}{dt}L_\rho(x(t), y(t), \bar{z})$ نحصل من العلاقة الأخيرة على:

$$\frac{d}{dt}L_\rho(x(t), y(t), \bar{z}) \leq -\rho\langle y(t) - \bar{y}, B^T A\dot{x}(t)\rangle \quad , \qquad (3.7)$$

لنشكل الجداء الداخلي للعلاقة (3.3) بالمتجه $-\dot{z}(.)$ وبما أن $\lambda(.) > 0,\ \rho > 0$ نجد باستخدام العلاقة (3.6) أن: $\langle Ax(t) - By(t), \dot{z}(t)\rangle \geq 0$ ، وبحساب المشتق $\frac{d}{dt}L_\rho\big(\bar{x}, \bar{y}, z(t)\big)$ نجد:

$$\frac{d}{dt}L_\rho\big(\bar{x}, \bar{y}, z(t)\big) \geq \langle B(y(t) - \bar{y}) - A(x(t) - \bar{x}), \dot{z}(t)\rangle \quad , \qquad (3.8)$$

التابع $\theta_1(y) := \langle y, -B^T A\dot{x}(t)\rangle$ مقعر، ومنه مؤثر التدرج $\big(-\nabla_y\theta_1\big)(y)$ مضطرد أعظمي، وبالاستفادة من تعريف المؤثر المضطرد، يمكننا أن نثبت أن:

$$\langle y(t) - \bar{y}, B^T A\dot{x}(t)\rangle \geq 0 \quad , \qquad (3.9)$$

بشكل مشابه، نستطيع إثبات أن:

$$\langle B(y(t) - \bar{y}) - A(x(t) - \bar{x}), \dot{z}(t)\rangle \geq 0 \quad , \qquad (3.10)$$

نستبدل العلاقة (3.9) في (3.7)، ونستبدل العلاقة (3.10) في (3.8) نحصل على:

$$\frac{d}{dt}L_\rho(x(t), y(t), \bar{z}) \leq 0 \leq \frac{d}{dt}L_\rho\big(\bar{x}, \bar{y}, z(t)\big)$$

والتي تعني أن $L_\rho(x(t), y(t), \bar{z})$ غير متزايد، وأن $L_\rho\big(\bar{x}, \bar{y}, z(t)\big)$ غير متناقص. ■

الآن سنبين في المبرهنة الآتية أن المسارات $\big(x(.), y(.), z(.)\big): [0, +\infty[\to X \times Y \times Z$ الناتجة من النظام الديناميكي $(3.1) - (3.3)$ تحقق خاصية الـ minimizing/ maximizing، أي أنها مسارات تصغّر/ تكبّر تابع لاغرانج الموسع.

مبرهنة 3.3 بفرض أن التابع $\lambda(.)$ غير متزايد، ولتكن $(\bar{x},\bar{y},\bar{z}) \in X \times Y \times Z$ نقطة مثبتة كيفياً، عندئذ كل مسار حل عام قوي $\big(x(.),y(.),z(.)\big)$ للنظام الديناميكي $(3.1)-(3.3)$ يحقق الآتي:

$$L_\rho(x(t),y(t),\bar{z}) \le L_\rho\big(x(t),y(t),z(t)\big) \le L_\rho\big(\bar{x},\bar{y},z(t)\big) \quad , \qquad (3.24)$$

البرهان.

بداية لا بد من تعريف بعض التوابع التي تساعد في إثبات هذه المبرهنة. نفرض أن $(\bar{x},\bar{y},\bar{z}) \in X \times Y \times Z$ نقطة كيفية مثبتة، ونعرّف التوابع الثلاثة الآتية:

$$\emptyset_1(x) = f(x) + \langle \bar{z}, Ax\rangle + \frac{\rho}{2}\|Ax - B\bar{y}\|^2 \quad , \qquad (3.11)$$

$$\emptyset_2(x,y) = g(y) - \langle \bar{z}, By\rangle + \frac{\rho}{2}\|Ax - By\|^2 \quad , \qquad (3.12)$$

$$\emptyset_3(x,y,z) = L_\rho(x,y,z) + \langle z, A\bar{x} - B\bar{y}\rangle \quad , \qquad (3.13)$$

بما أن $f(x)$ تابع محدب، ومن كون كلاً من الجداء الداخلي $\langle .,.\rangle$ والنظيم $\|.\|^2$ تابع خطي، فنجد أن $\emptyset_1(x)$ تابع محدب، كذلك $\emptyset_2(x,y)$ محدب لأن $g(y)$ بالفرض محدب. ومن كون L_ρ مقعر بالنسبة إلى z نجد أن $\emptyset_3$ مقعر بالنسبة إلى z.

نشتق التابع $\emptyset_1$ بالنسبة إلى x، كما نشتق التابع $\emptyset_2$ بالنسبة إلى كل من x و y نحصل على:

$$\nabla_x\emptyset_1(x) = \nabla f(x) + A^T\bar{z} + \rho A^TAx - \rho AB\bar{y} \quad , \qquad (3.14)$$

$$\nabla_y\emptyset_2(x,y) = \nabla g(y) - B^T\bar{z} + \rho B^TBy - \rho B^TAx \quad , \qquad (3.15)$$

$$\nabla_x\emptyset_2(x,y) = \rho A^TAx - \rho A^TBy \quad , \qquad (3.16)$$

كذلك نشتق التابع $-\emptyset_3$ بالنسبة إلى z نحصل على:

$$\nabla_z(-\emptyset_3)(x,y,z) = By - Ax + B\bar{y} - A\bar{x} \quad , \qquad (3.17)$$

نعرف التوابع $\psi_1(.),\psi_2(.),\psi_3(.)$ بالعلاقات الآتية:

$$\psi_1(t)=\emptyset_1(\bar{x})-\emptyset_1\big(x(t)\big)+\langle x(t)-\bar{x},\nabla f\big(x(t)\big)+\rho A^TAx(t)+A^T\bar{z}-\ \rho A^TB\bar{y}\rangle,\quad (3..18)$$

$$\psi_2(t)=\emptyset_2(x(t),\bar{y})-\emptyset_2\big(x(t),y(t)\big)+\langle y(t)-\bar{y},\nabla g\big(y(t)\big)\rangle+$$

$$+\langle y(t)-\bar{y},\rho B^TBy(t)-B^T\bar{z}-\ \rho B^TAx(t)\rangle\quad ,\qquad (3.19)$$

$$\psi_3(t)=\emptyset_3(x(t),y(t),\bar{z})+(-\emptyset_3)\big(x(t),y(t),z(t)\big)+$$
$$-\langle z(t)-\bar{z},By(t)-Ax(t)+B\bar{y}-A\bar{x}\rangle\quad ,\qquad (3.20)$$

بالاستفادة من متراجحة التحدب، وبما أن كلاً من التابعين $\emptyset_1(x),\emptyset_2(x,y)$ محدب، نجد أن

$\psi_1(t)\geq 0,\psi_2(t)\geq 0$، وبما أن التابع $\emptyset_3(x,y,z)$ مقعر بالنسبة إلى z، نجد أن $\psi_3(t)\leq 0$.

نشتق كل من التوابع $\psi_1,\ \psi_2,\psi_3$ بالنسبة الى t نحصل على:

$$\frac{d}{dt}\,\psi_1(t)=\langle x(t)-\bar{x},\nabla^2 f\big(x(t)\big)\dot{x}(t)+\rho A^TA\dot{x}(t)\rangle\qquad ,\qquad (3.21)$$

$$\frac{d}{dt}\,\psi_2(t)=\langle y(t)-\bar{y},\nabla^2 g\big(y(t)\big)\dot{y}(t)+\rho B^TB\dot{y}(t)\rangle-\rho\langle y(t)-\bar{y},B^TA\dot{x}(t)\rangle\ ,\qquad (3.22)$$

$$\frac{d}{dt}\,\psi_3(t)=-\langle z(t)-\bar{z},B\dot{y}(t)-\ A\dot{x}(t)\rangle\qquad ,\qquad (3.23)$$

نلاحظ أن:

$$\frac{d}{dt}\frac{\lambda(t)}{2}[\|x(t)-\bar{x}\|^2+\|y(t)-\bar{y}\|^2]=\lambda(t)\langle x(t)-\bar{x},\dot{x}(t)\rangle+$$

$$+\lambda(t)\langle y(t)-\bar{y},\dot{y}(t)\rangle+\frac{\dot{\lambda}(t)}{2}[\|x(t)-\bar{x}\|^2+\|y(t)-\bar{y}\|^2]\qquad ,\qquad (3.25)$$

لنشكل الجداء الداخلي للعلاقة (3.1) بالمتجه $(x(t)-\bar{x})$، أيضاً نشكل الجداء الداخلي للعلاقة (3.2) بالمتجه $(y(t)-\bar{y})$، نجمع الناتجين، وباستخدام العلاقات السابقة (3.25) ,(3.22) ,(3.21) ، ينتج لدينا من العلاقات (3.19) ,(3.18) أن:

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\lambda(t)}{2}\,(\|x(t)-\bar{x}\|^2+\|y(t)-\bar{y}\|^2)+\psi_1(t)+\psi_2(t)\right]\leq$$

$$\leq\emptyset_1(\bar{x})-\emptyset_1\big(x(t)\big)+\emptyset_2(x(t),\bar{y})-\emptyset_2\big(x(t),y(t)\big)-\rho\langle y(t)-\bar{y},B^TA\dot{x}(t)\rangle\ ,\qquad (3.26)$$

من (3.9) وبملاحظة (3.12) ,(3.11) نجد:

$$\emptyset_1(\bar{x})-\emptyset_1\big(x(t)\big)+\emptyset_2(x(t),\bar{y})-\emptyset_2\big(x(t),y(t)\big)=$$

$$= L_\rho\big(\bar{x},\bar{y},z(t)\big) - L_\rho\big(x(t),y(t),z(t)\big) - \langle z(t)-\bar{z}, B(y(t)-\bar{y}) - A(x(t)-\bar{x})\rangle \quad , \quad (3.27)$$

نستبدل(3.27) في (3.26):

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\lambda(t)}{2}\left(\|x(t)-\bar{x}\|^2 + \|y(t)-\bar{y}\|^2\right) + \psi_1(t) + \psi_2(t)\right] \leq$$

$$\leq L_\rho\big(\bar{x},\bar{y},z(t)\big) - L_\rho\big(x(t),y(t),z(t)\big) - \langle z(t)-\bar{z}, B(y(t)-\bar{y}) - A(x(t)-\bar{x})\rangle \quad , \quad (3.28)$$

بشكل مشابه لبرهان المتراجحات $(3.9),(3.10)$ نثبت أن:

$$\langle z(t)-\bar{z}, B(y(t)-\bar{y}) - A(x(t)-\bar{x})\rangle \geq 0 \qquad , \qquad (3.29)$$

نستبدل العلاقة (3.29) في (3.28):

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\lambda(t)}{2}\left(\|x(t)-\bar{x}\|^2 + \|y(t)-\bar{y}\|^2\right) + \psi_1(t) + \psi_2(t)\right] \leq L_\rho\big(\bar{x},\bar{y},z(t)\big) - L_\rho\big(x(t),y(t),z(t)\big)$$

(3.30)

من كون التابع $\frac{\lambda(.)}{2}\left(\|x(.)-\bar{x}\|^2 + \|y(.)-\bar{y}\|^2\right) + \psi_1(.) + \psi_2(.)$ غير سالب، و بمكاملة طرفي العلاقة (3.30) على مجال $[0,T],\ T>0$ نجد:

$$L_\rho\big(x(t),y(t),z(t)\big) - L_\rho\big(\bar{x},\bar{y},z(t)\big) \leq$$

$$\leq \frac{1}{T}\frac{\lambda(0)}{2}\|x(0)-\bar{x}\|^2 + \frac{1}{T}\left[\frac{\lambda(0)}{2}\|y(0)-\bar{y}\|^2 + \psi_1(0) + \psi_2(0)\right]$$

بأخذ النهايات لطرفي المتراجحة الأخيرة عندما $T \to +\infty$ نجد:

$$L_\rho\big(x(t),y(t),z(t)\big) \leq L_\rho\big(\bar{x},\bar{y},z(t)\big) \quad : \quad \forall \bar{x}\in X, \forall \bar{y}\in Y \quad , \qquad (3.31)$$

لنشكل الجداء الداخلي للعلاقة (3.3) بالمتجه $\frac{-1}{\rho}(z(t)-\bar{z})$:

$$-\frac{1}{\rho}\lambda(t)\langle z(t)-\bar{z}, \dot{z}(t)\rangle - \langle z(t)-\bar{z}, B\dot{y}(t) - A\dot{x}(t) + \big(By(t)-Ax(t)\big)\rangle = 0 \ , \quad (3.32)$$

نلاحظ أن:

$$\frac{d}{dt}\left(-\frac{\lambda(t)}{2\rho}\|z(t)-\bar{z}\|^2\right) = -\frac{\lambda(t)}{\rho}\langle z(t)-\bar{z}, \dot{z}(t)\rangle - \frac{\dot{\lambda}(t)}{2\rho}\|z(t)-\bar{z}\|^2 \quad , \quad (3.33)$$

من العلاقات $(3.23),(3.32),(3.33)$ وبما أن $\lambda(t)$ غير متزايد، وبما أن التابع $\psi_3(t)$ غير موجب وبالتالي $-\psi_3(t) \geq 0$ ومن العلاقة (3.13) نحصل على:

$$-\frac{d}{dt}\left(\frac{\lambda(t)}{2\rho}\|z(t)-\bar{z}\|^2-\psi_3(t)\right)\geq L_\rho(x(t),y(t),\bar{z})-L_\rho\big(x(t),y(t),z(t)\big)$$

بالمكاملة على مجال $[0,T], T>0$ و من كون $\left(\frac{\lambda(.)}{2}\|z(.)-\bar{z}\|^2-\psi_3(.)\right)$ غير سالب، نجد:

$$L_\rho(x(t),y(t),\bar{z})-L_\rho\big(x(t),y(t),z(t)\big)\leq\frac{1}{T}\left(\frac{\lambda(0)}{2\rho}\|z(0)-\bar{z}\|^2-\psi_3(0)\right)$$

نأخذ النهايات عندما $T\to+\infty$:

$$L_\rho\big(x(t),y(t),z(t)\big)\geq L_\rho(x(t),y(t),\bar{z}) \qquad , \qquad (3.34)$$

من العلاقتين $(3.31),(3.34)$ نستنتج صحة العلاقة (3.24). ■

نرمز بـ S لمجموعة النقاط السرجية للتابع L_ρ. من أجل دراسة السلوك المقارب للمسارات

$\big(x(.),y(.),z(.)\big):[0,+\infty[\to X\times Y\times Z$ ، نقوم بتعريف التابع الغير سالب الآتي:

$$\Gamma(t):=\frac{1}{2}\|x(t)-\bar{x}\|^2+\frac{1}{2}\|y(t)-\bar{y}\|^2+\frac{1}{2\rho}\|z(t)-\bar{z}\|^2+\frac{1}{\lambda(t)}[\psi_1(t)+\psi_2(t)-\psi_3(t)]$$

(3.35)

وجدنا في المبرهنة 3.3 أن المسار $\big(x(.),y(.),z(.)\big)$ مصغر/ مكبر للتابع L_ρ ، وبالتالي الشرط اللازم لكي تكون هذه المسارات محدودة هو أن توجد نقاط سرجية للتابع L_ρ، أي أن يكون $S\neq\emptyset$. بعد اشتقاق التابع $\Gamma(.)$ بالنسبة إلى t نحصل على:

$$\frac{d}{dt}\Gamma\ (t)=-\frac{1}{\lambda(t)}\left(1+\frac{\dot{\lambda}(t)}{\lambda(t)}\right)\big(\psi_1(t)+\psi_2(t)-\psi_3(t)\big)-\frac{\rho}{\lambda(t)}\langle y(t)-\bar{y},B^TA\dot{x}(t)\rangle+$$

$$-\frac{1}{\lambda(t)}\Big[L_\rho(x(t),y(t),\bar{z})-L_\rho\big(x(t),y(t),z(t)\big)-\Big(L_\rho\big(\bar{x},\bar{y},z(t)\big)-L_\rho\big(x(t),y(t),z(t)\big)\Big)\Big]+$$

$$-\frac{1}{\lambda(t)}\langle z(t)-\bar{z},B(y(t)-\bar{y})-A(x(t)-\bar{x}\,)\rangle \qquad , \qquad (3.36)$$

مبرهنة 3.4 نفرض أن $S\neq\emptyset$، ونفرض أنه من أجل تقريباً كل $t>0$ تتحقق المتراجحة الآتية:

$$1+\frac{\dot{\lambda}(t)}{\lambda(t)}\geq 0 \qquad , \qquad (3.37)$$

عندئذ لدينا الآتي صحيحاً:

①. من أجل أي $(\bar{x},\bar{y},\bar{z}) \in S$ يكون التابع $\Gamma\ (.)$ متناقصاً، كما يتحقق ما يلي:

$$\{\frac{1}{\lambda(t)}\left[L_\rho(x(t),y(t),\bar{z}) - L_\rho\big(x(t),y(t),z(t)\big)\right] + \frac{1}{\lambda(t)}\left[L_\rho\big(x(t),y(t),z(t)\big) - L_\rho\big(\bar{x},\bar{y},z(t)\big)\right]\} \in L^1([0,\infty[) \quad , \qquad (3.38)$$

$$\frac{1}{\lambda(t)}\big(\psi_1(t)+\psi_2(t)-\psi_3(t)\big) \in L^1([0,\infty[) \quad , \qquad (3.39)$$

②. المسار $\big(x(.),y(.),z(.)\big)$ محدود.

③. $$\|\dot{x}(t)\|^2 + \|\dot{y}(t)\|^2 + \frac{1}{\rho}\|\dot{z}(t)\|^2 \in L^1([0,\infty[,X\times Y\times Z) \quad , \qquad (3.40)$$

البرهان. ①. بما أن $\lambda(t) > 0, \rho > 0$، عندئذ نستنتج من العلاقات $(3.9),(3.29),(3.36)$ أن:

$$\frac{d}{dt}\Gamma\ (t) \le -\frac{1}{\lambda(t)}\left(1+\frac{\dot{\lambda}(t)}{\lambda(t)}\right)\big(\psi_1(t)+\psi_2(t)-\psi_3(t)\big) +$$

$$-\frac{1}{\lambda(t)}\left[L_\rho(x(t),y(t),\bar{z}) - L_\rho\big(x(t),y(t),z(t)\big) - \Big(L_\rho\big(\bar{x},\bar{y},z(t)\big) - L_\rho\big(x(t),y(t),z(t)\big)\Big)\right]$$

بما أن $(\bar{x},\bar{y},\bar{z}) \in S$، يكون $L_\rho(x(t),y(t),\bar{z}) \ge L_\rho\big(x(t),y(t),z(t)\big)$ ، أيضاً يكون

$L_\rho\big(\bar{x},\bar{y},z(t)\big) \le L_\rho\big(x(t),y(t),z(t)\big)$ ، ينتج من ذلك ومن العلاقة (3.49) أن $\frac{d}{dt}\Gamma\ (t) \le 0$ الأمر الذي يعني أن $\Gamma\ (t)$ متناقص. من العلاقات $(3.9),(3.29),(3.37)$ نجد:

$$\frac{d}{dt}\Gamma\ (t) \le -\frac{1}{\lambda(t)}\left[L_\rho(x(t),y(t),\bar{z}) - L_\rho\big(x(t),y(t),z(t)\big)\right] +$$

$$-\frac{1}{\lambda(t)}\left[L_\rho\big(x(t),y(t),z(t)\big) - L_\rho\big(\bar{x},\bar{y},z(t)\big) + \psi_1(t)+\psi_2(t)-\psi_3(t)\right]$$

بما أن Γ متناقص وكل من التوابع التي داخل الأقواس غير سالبة، فهي توابع قابلة للمكاملة حسب مفهوم ليبيغ، الأمر الذي يثبت صحة كل من العلاقتين $(3.38),(3.39)$

②. من العلاقة (3.35) ومن كون Γ متناقص نجد:

$$0 \le \frac{1}{2}\|x(t)-\bar{x}\|^2 + \frac{1}{2}\|y(t)-\bar{y}\|^2 + \frac{1}{2\rho}\|z(t)-\bar{z}\|^2 \le \Gamma\ (t) \le \Gamma\ (0)$$

والتي تقتضي ان المسار يبقى محدوداً .

③. لتكن$(\bar{x},\bar{y},\bar{z}) \in S$ نقطة مثبتة كيفية، ولنعرف التوابع الغير سالبة الاتية:

$$\Delta_1(t) \coloneqq L_\rho\big(x(t),y(t),z(t)\big) - L_\rho\big(\bar{x},\bar{y},z(t)\big) \quad , \tag{3.41}$$

$$\Delta_2(t) \coloneqq L_\rho\big(x(t),y(t),\bar{z}\big) - L_\rho\big(x(t),y(t),z(t)\big) \quad , \tag{3.42}$$

نلاحظ أنه من كون $(\bar{x},\bar{y},\bar{z}) \in S$ فإن $B\bar{y} - A\bar{x} = 0$ وبالتالي $\frac{d}{dt}L_\rho\big(\bar{x},\bar{y},z(t)\big) = 0$

الآن لنشتق كل من التابعين $\frac{1}{\lambda(t)}\Delta_1(t)$ و $\frac{1}{\lambda(t)}\Delta_2(t)$ نجد:

$$\frac{d}{dt}\frac{1}{\lambda(t)}\Delta_1(t) = \frac{1}{\lambda(t)}\frac{d}{dt}L_\rho\big(x(t),y(t),z(t)\big) - \frac{\dot{\lambda}(t)}{\lambda^2(t)}\Delta_1(t) \quad , \tag{3.43}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{1}{\lambda(t)}\Delta_2(t) = \frac{1}{\lambda(t)}\big[\langle z(t)-\bar{z}, B\dot{y}(t) - A\dot{x}(t)\rangle + \langle \dot{z}(t), By(t) - Ax(t)\rangle\big] - \frac{\dot{\lambda}(t)}{\lambda^2(t)}\Delta_2(t)\,, \tag{3.44}$$

لنشكل الجداء الداخلي للعلاقة (3.1) بالمتجه $\frac{1}{\lambda(t)}\dot{x}(t)$، وللعلاقة (3.2) بالمتجه $\frac{1}{\lambda(t)}\dot{y}(t)$

ثم نجمع المعادلتين الناتجتين، ومن العلاقات (3.9) ,(3.5) ,(3.4) ، فإن المتراجحة السابقة تصبح بالشكل:

$$\|\dot{x}(t)\|^2 + \|\dot{y}(t)\|^2 + \frac{1}{\lambda(t)}\frac{d}{dt}L_\rho\big(x(t),y(t),z(t)\big) +$$
$$+\frac{1}{\lambda(t)}\big[\langle z(t)-\bar{z}, B\dot{y}(t) - A\dot{x}(t)\rangle - \langle \dot{z}(t), Ax(t) - By(t)\rangle\big] \le 0 \quad , \tag{3.45}$$

نستبدل العلاقة (3.43) في (3.45) نجد:

$$\|\dot{x}(t)\|^2 + \|\dot{y}(t)\|^2 + \frac{d}{dt}\frac{1}{\lambda(t)}\Delta_1(t) + \frac{\dot{\lambda}(t)}{\lambda^2(t)}\Delta_1(t) +$$
$$+\frac{1}{\lambda(t)}\big[\langle z(t)-\bar{z}, B\dot{y}(t) - A\dot{x}(t)\rangle - \langle \dot{z}(t), Ax(t) - By(t)\rangle\big] \le 0 \quad , \tag{3.46}$$

لنشكل الجداء الداخلي للعلاقة (3.3) بالمتجه $\frac{1}{\lambda\rho(t)}\dot{z}(t)$ من (3.6) ومن العلاقة (3.44) ينتج أن:

$$\frac{1}{\rho}\|\dot{z}(t)\|^2 + \frac{d}{dt}\frac{1}{\lambda(t)}\Delta_2(t) - \frac{1}{\lambda(t)}\langle z(t)-\bar{z}, B\dot{y}(t) - A\dot{x}(t)\rangle + \frac{\dot{\lambda}(t)}{\lambda^2(t)}\Delta_2(t) \le 0 \quad , \tag{3.47}$$

نجمع العلاقتين (3.47) ,(3.46) نحصل على:

$$\|\dot{x}(t)\|^2+\|\dot{y}(t)\|^2+\frac{1}{\rho}\|\dot{z}(t)\|^2+\frac{d}{dt}\frac{1}{\lambda(t)}\big(\Delta_1(t)+\Delta_2(t)\big)+\frac{\dot{\lambda}(t)}{\lambda^2(t)}\big(\Delta_1(t)+\Delta_2(t)\big)\le$$
$$\le\frac{1}{\lambda(t)}\langle\dot{z}(t),Ax(t)-By(t)\rangle$$

بما أن $(\bar{x},\bar{y},\bar{z})\in S$ فإن $B\bar{y}-A\bar{x}=0$ من العلاقة (3.10) نحصل على:

$$\|\dot{x}(t)\|^2+\|\dot{y}(t)\|^2+\frac{1}{\rho}\|\dot{z}(t)\|^2+\frac{d}{dt}\frac{1}{\lambda(t)}\big(\Delta_1(t)+\Delta_2(t)\big)\le-\frac{\dot{\lambda}(t)}{\lambda^2(t)}\big(\Delta_1(t)+\Delta_2(t)\big)$$

(3.48)

من العلاقة (3.37) لدينا $\frac{\dot{\lambda}(t)}{\lambda(t)}\ge-1$ ومنه $-\frac{\dot{\lambda}(t)}{\lambda^2(t)}\le\frac{1}{\lambda(t)}$ وبالتالي تصبح العلاقة (3.48) بالشكل:

$$\|\dot{x}(t)\|^2+\|\dot{y}(t)\|^2+\frac{1}{\rho}\|\dot{z}(t)\|^2+\frac{d}{dt}\frac{1}{\lambda(t)}\big(\Delta_1(t)+\Delta_2(t)\big)\le\frac{1}{\lambda(t)}\big(\Delta_1(t)+\Delta_2(t)\big),\ (3.49)$$

من أجل أي $T>0$ نكامل الطرفين على مجال $[0,T]$ نحصل على:

$$\int_0^T\left(\|\dot{x}(t)\|^2+\|\dot{y}(t)\|^2+\frac{1}{\rho}\|\dot{z}(t)\|^2\right)dt+\frac{1}{\lambda(T)}\big(\Delta_1(T)+\Delta_2(T)\big)\le$$
$$\le\frac{1}{\lambda(0)}\big(\Delta_1(0)+\Delta_2(0)\big)+\int_0^T\frac{1}{\lambda(t)}\big(\Delta_1(t)+\Delta_2(t)\big)dt$$

بما أن $\Delta_1(.)+\Delta_2(.)$ غير سالب وحسب العلاقتين (3.39) ,(3.38) نحصل على المطلوب. ■

مبرهنة 3.5 بفرض أن:

$$\int_0^{+\infty}\frac{1}{\lambda(t)}dt=+\infty \qquad (3.50)$$

ومن أجل تقريباً كل $t>0$ نفرض أن المتراجحة الآتية صحيحة:

$$1+\frac{\dot{\lambda}(t)}{\lambda(t)}\ge 0 \qquad (3.51)$$

عندئذ: $\lim_{t\to+\infty}L_\rho(x(t),y(t),\bar{z})=\inf_{X\times Y}L_\rho,\ \ \lim_{t\to+\infty}L_\rho\big(\bar{x},\bar{y},z(t)\big)=\sup_Z L_\rho$

وعلاوة على ذلك إذا كانت $S\neq\emptyset$ فإن المسار $\big(x(.),y(.),z(.)\big)$ يكون محدود، وكل النقاط اللاصقة بالمسار $\big(x(.),y(.),z(.)\big)$ هي نقاط سرجية لتابع لاغرانج الموسع L_ρ.

البرهان. لتكن $(\bar{x},\bar{y},\bar{z})\in X\times Y\times Z$. نعرف التابعين الغير سالبين الآتيين:

$$\varphi_1(t) := \frac{1}{\lambda(t)}\left(\psi_1(t)+\psi_2(t)\right)+\frac{1}{2}\|\bar{x}-x(t)\|^2+\frac{1}{2}\|\bar{y}-y(t)\|^2 \quad , \qquad (3.52)$$

$$\varphi_2(t) \coloneqq -\frac{1}{\lambda(t)}\psi_3(t)+\frac{1}{2\rho}\|\bar{z}-z(t)\|^2 \quad , \qquad (3.53)$$

نشتق التابع$\varphi_1(t)$، من العلاقات (3.19), (3.18), (3.9), (3.22), (3.21) , (3.2), (3.1) مع استخدام (3.51) تؤدي إلى:

$$\frac{1}{\lambda(t)}\left[L_\rho(x(t),y(t),\bar{z})-L_\rho(\bar{x},\bar{y},\bar{z})\right] \leq -\frac{d}{dt}\varphi_1(t)$$

بمكاملة الطرفين على $[0,t]$ ومن كون φ_1 غير سالب نحصل على:

$$\left[L_\rho(x(t),y(t),\bar{z})-L_\rho(\bar{x},\bar{y},\bar{z})\right]\int_0^t \frac{1}{\lambda(s)}ds \leq \varphi_1(0)-\varphi_1(t) \leq \varphi_1(0)$$

نقسم الطرفين على $\int_0^t \frac{1}{\lambda(s)}ds$ و نأخذ النهايات عندما $t \to +\infty$ ونستخدم (3.50) نحصل على:

$$\lim_{t\to\infty} L_\rho(x(t),y(t),\bar{z}) \leq L_\rho(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$$

وبالتالي:

$$\lim_{t\to\infty} L_\rho(x(t),y(t),\bar{z}) = \inf_{X\times Y} L_\rho \quad , \qquad (3.54)$$

الآن لنشتق φ_2، حيث نجد من العلاقات (3.20), (2.23), (3.3) ، ومن كون $\psi_3(t) \leq 0$ وباستخدام العلاقتين (3.29), (3.51) أن:

$$\frac{1}{\lambda(t)}\left[L_\rho(\bar{x},\bar{y},\bar{z})-L_\rho\big(\bar{x},\bar{y},z(t)\big)\right] \leq -\frac{d}{dt}\varphi_2(t)$$

بمكاملة الطرفين على $[0,t]$ ومن كون φ_2 غير سالب نحصل على:

$$\left[L_\rho(\bar{x},\bar{y},\bar{z})-L_\rho\big(\bar{x},\bar{y},z(t)\big)\right]\int_0^t \frac{1}{\lambda(s)}ds \leq \varphi_2(0)-\varphi_2(t) \leq \varphi_2(0)$$

نقسم الطرفين على $\int_0^t \frac{1}{\lambda(s)}ds$ ونأخذ النهايات عندما $t \to +\infty$ ونستخدم العلاقة (3.50) نحصل على $\lim_{t\to\infty} L_\rho\big(\bar{x},\bar{y},z(t)\big) \geq L_\rho(\bar{x},\bar{y},\bar{z}) \quad \forall \bar{z} \in Z$ ومنه:

$$\lim_{t\to\infty} L_\rho\big(\bar{x},\bar{y},z(t)\big) = \sup_{Z} L_\rho \quad , \qquad (3.55)$$

نستنتج من العلاقتين (3.55), (3.54) أن المسار $\big(x(.),y(.),z(.)\big)$ هو مصغر/ مكبر للتابع L_ρ

بما أن $f,g \in C^2$ نستنتج أن تدرج L_ρ بالنسبة لكل من x,y,z مستمر، ومنه يكون $\left(\nabla_{x,y}L_\rho, -\nabla_z L_\rho\right)$ مغلقاً في الفضاء $(X \times Y \times Z) \times (X \times Y \times Z)$. بما أن المسار $\left(x(.), y(.), z(.)\right)$ مصغر/مكبر لـ L_ρ فإن كلاً من $v_1(t) := \nabla_x L_\rho\left(x(t), y(t), z(t)\right)$ و $v_2(t) := \nabla_y L_\rho\left(x(t), y(t), z(t)\right)$ و

$v_3(t) := -\nabla_z L_\rho\left(x(t), y(t), z(t)\right)$ تسعى نحو الصفر عندما $t \to \infty$. أي أن $\lim_{t\to+\infty}\left(v_1(t), v_2(t), v_3(t)\right) = (0,0,0)$، ولنرمز بـ $(x^\infty, y^\infty, z^\infty)$ إلى نهاية المسار $\left(x(t), y(t), z(t)\right)$ عندما يسعى الزمن إلى اللانهاية، أي:

$$\lim_{t\to+\infty}\left(x(t), y(t), z(t)\right) = (x^\infty, y^\infty, z^\infty)$$

لدينا $\left(\left(x(t), y(t), z(t)\right), \left(v_1(t), v_2(t), v_3(t)\right)\right) \in graph\left(\nabla_{x,y}L_\rho, -\nabla_z L_\rho\right)$ ومن كون $graph\left(\nabla_{x,y}L_\rho, -\nabla_z L_\rho\right)$ مغلق يكون لدينا:

$\left((x^\infty, y^\infty, z^\infty), (0,0,0)\right) \in graph\left(\nabla_{x,y}L_\rho, -\nabla_z L_\rho\right)$ وبالتالي:

$$(0,0,0) = \left(\nabla_{x,y}L_\rho, -\nabla_z L_\rho\right)(x^\infty, y^\infty, z^\infty)$$

الذي يعني أن أي نقطة لاصقة $(x^\infty, y^\infty, z^\infty)$هي نقطة سرجية للتابع L_ρ ■

مبرهنة 3.6 نفرض أن $S \neq \emptyset$ وأن $\int_0^{+\infty} \frac{1}{\lambda(t)} dt = +\infty$، ونفرض أنه يوجد $\varepsilon > 0$ بحيث يكون

$$1 + \frac{\dot{\lambda}(t)}{\lambda(t)} \geq \varepsilon \qquad , \tag{3.56}$$

عندئذ المسار $\left(x(.), y(.), z(.)\right)$ يتقارب بضعف نحو نقطة سرجية لتابع لاغرانج الموسع L_ρ ويكون:

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{1}{\lambda(t)}\left(\psi_1(t) + \psi_2(t) - \psi_3(t)\right) = 0 \qquad , \tag{3.57}$$

البرهان. نلاحظ أن كل الفرضيات في المبرهنة 3.3 والمبرهنة 3.2 محققة في هذه المبرهنة. نأخذ $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \in S$ ومن العلاقة (3.35) نجد:

$$\frac{d}{dt}\Gamma\ (t) = \langle \dot{x}(t), x(t) - \bar{x}\rangle + \langle \dot{y}(t), y(t) - \bar{y}\rangle + \langle \frac{1}{\rho}\dot{z}(t), z(t) - \bar{z}\rangle +$$

$$+\frac{d}{dt}\frac{1}{\lambda(t)}\left(\psi_1(t) + \psi_2(t) - \psi_3(t)\right) \leq 0 \qquad , \tag{3.58}$$

تنتج المتراجحة أعلاه من العلاقتين (3.39) ,(3.38)، وبحسب المبرهنة 3.4 لدينا المسار محدود ومنه

$$M_1 := \|x(t) - \bar{x}\| < \infty, M_2 := \|y(t) - \bar{y}\| < \infty, M_3 := \|z(t) - \bar{z}\| < \infty$$

ليكن $M = \sup\{M_1, M_2, M_3\}$ ومن العلاقة (3.58) نحصل على:

$$\frac{d}{dt}\frac{1}{\lambda(t)}\big(\psi_1(t)+\psi_2(t)-\psi_3(t)\big)\le \mathrm{M}\left(\|\dot{x}(t)\|+\|\dot{y}(t)\|+\frac{1}{\rho}\|\dot{z}(t)\|\right)$$

بحسب العلاقة (3.40) من المبرهنة 3.4 لدينا $\|\dot{x}(t)\|+\|\dot{y}(t)\|+\frac{1}{\rho}\|\dot{z}(t)\|\in L^1$، وبما أن التابع $\big(\psi_1(t)+\psi_2(t)-\psi_3(t)\big)$ غير سالب وباستخدام المبرهنة 2.2 نجد أن:

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{1}{\lambda(t)}\big(\psi_1(t)+\psi_2(t)-\psi_3(t)\big)=0$$

من جهة ثانية بما أن التابع $\Gamma(.)$ غير متزايد، أي أن $\frac{d}{dt}\Gamma\ (t)\ \le 0$ ، فحسب المبرهنة 2.1 نستنتج أن النهاية الآتية موجودة

$$\lim_{t\to+\infty}\left\{\frac{1}{2}\|x(t)-\bar{x}\|^2+\frac{1}{2}\|y(t)-\bar{y}\|^2+\frac{1}{2\rho}\|z(t)-\bar{z}\|^2+\frac{1}{\lambda(t)}\big(\psi_1(t)+\psi_2(t)-\psi_3(t)\big)\right\}$$

مما سبق نستنتج أن النهاية الآتية موجودة:

$$\lim_{t\to+\infty}\{\|x(t)-\bar{x}\|+\|y(t)-\bar{y}\|+\|z(t)-\bar{z}\|\}$$

بما أن $(\bar{x},\bar{y},\bar{z})\in S$ وبما أن المسار $\big(x(.),y(.),z(.)\big)$ محدود وكل نقاطه اللاصقة تنتمي إلى S فحسب المبرهنة 2.3 نستنتج أن $\big(x(.),y(.),z(.)\big)$ يتقارب بضعف نحو نقطة محددة من S. ■

الاستنتاجات والتوصيات.

في هذا المقال درست مسألة أمثليات محدبة ذات متحولين ومقيدة في فضاءات هلبرت حقيقية. وذلك بدمج طريقة الاتجاهات المتناوبة مع الأنظمة الديناميكية المستمرة شبيهة نيوتن لحل هذه المسألة. وقد أثبتنا أن المسارات الناتجة من النظام الديناميكي المقترح تتقارب بضعف نحو الحل الأمثل.

ونوصي بتعميم هذه النتائج إلى مسائل أمثلية متعددة المتحولات [n متحول بدلاً من متحولين].

المراجع.

[1] ATTOCH. H, SOUEYCATT. M (2009) Augmented Lagrangian and Proximal Alternating Direction Methods of Multipliers in Hilbert Spaces: Applications to Games, PDE's and Control, Pacific Journal of Optimization, Vol 5, 17-37

[2] ATTOCH. H, SVAITER.B (2011) A continuous dynamical Newton-like approach to solving monotone inclusions, SIAM Journal on Control and Optimization, Vol 49, 574-598

[3] ATTOCH. H, REDONT. P, SVAITER. B (2013) Global convergence of a closed-loop regularized Newton method for solving monotone inclusions in Hilbert spaces, Journal of Optimization Theory and Applications, Vol 157, 624-650

[4] ABBAS. B, ATTOCH. H, SVAITER. B (2014) Newton-like dynamics and forward-backward methods for structured monotone inclusions in hilbert spaces, Journal of Optimization Theory and Applications, Vol 161, 331-360

[5] BARJAC. G, GOULART. P, STRLLATO. B, BOYD. S (2019) Infeasibility Direction in the Alternating Direction Method of Multipliers for Convex Optimization, Journal of Optimization Theory and Applications, Vol 183, 490- 519

[6] BOT. R, CSETNEK. E, (2019) ADMM for monotone operators: convergence analysis and rates, Adv. Comput. Math., Vol 45, 327-359

[7] GABAY. D, MERCIER. B (1976) A dual algorithm for the solution of nonlinear variational problems via finite elements approximations, Computers and Mathematics with Applications, Vol 2, 17-40

[8] GLOWINSKI. R (1984) - Numerical methods for nonlinear variational problems. Springer Series in Computational Physics, Springer, Verlag, 506p.

[9] HONG. M, LUO. Z, RAZAVIYAYN. M (2015) Convergence Analysis of Alternating Direction Method of Multipliers for a Family of Non convex Problems, Society of Industrial and Applied Mathematics Journal of Optimization, Vol 26, 337-364

[10] IATZELER. F, BIANCHI. P, CIBLAT. PH, HACHEM. W (2016)

Explicit Convergence Rate of a Distributed Alternating Direction Method of Multipliers, IEEE Transactions on Automatic Control, Vol 61, 892- 904

[11] MOHAMMAD. Y , SOUEYCATT. Y, HAMWI. Y (2020) Regularization in Banach Spaces with Respect to the Bregman Distance, Journal of Optimization Theory and Applications, Vol 185, 327-342

[12] OPIAL, Z (1967) Weak convergence of the sequence of successive approximations for nonexpansive mappings, Bulletin of the American Mathematical Society, Vol 73, 591-597

[13] ROCKAFELLAR. R (1976) Monotone operators and the proximal point algorithm, SIAM Journal of Control Optimization, Vol 14, 877-898

[14] ROCKAFELLAR, R (1976) Monotone operators associated with saddle-functions and mini-max problems. Nonlinear Functional Analysis, F. Browder (ed.), Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, American Mathematical Society, Vol 18, 241-250

[15] ZHANG. X, BURGER. M, OSHER. S (2011) A unified primal-dual algorithm framework based on Bregman iteration, Journal of Scientific Computing, Vol 46, 20-46