الثّلاثيّات الفيثاغوريّة في مجموعة أعداد ليبشتز الصّحيحة

الباحث: الدكتور باسل حمدو العرنوس

مدرّس في قسم الرياضيات – كليّة العلوم – جامعة البعث

ملخص البحث

عرّفنا في هذا البحث الثّلاثيّة الفيثاغوريّة في مجموعة أعداد ليبشتز الصّحيحة, ثمّ أوجدنا طريقة لتوليد ثلاثيّات فيثاغوريّة من ثلاث ثلاثيّات فيثاغوريّة في ¢, ومن ثمّ اعتماداً على ثلاثيّتين فيثاغوريّتين, وأخيراً من ثلاثيّة فيثاغوريّة واحدة.

بيّنا أنّه إذا كانت الأقسام الحقيقيّة لثلاثيّة فيثاغوريّة في مجموعة أعداد ليبشتز الصّحيحة غير معدومة معاً, فإنّ المتّجهات المكوّنة من المركّبات غير الحقيقيّة ستكون مرتبطة خطيّاً.

الكلمات المفتاحيّة:

ثلاثيّة فيثاغوريّة, الأعداد فوق العقديّة, أعداد ليبشتز الصّحيحة, رتبة مصفوفة.

Pythagorean Triples in Lipschitz Integer

Dr. Basel Hamdo Al-Arnous

Department Of Mathematics - Faculty of Sciences - Al- Baath University

Abstract

We define in this paper Pythagorean triples in Lipschitz integer set, then we find a method to generate Pythagorean triples from three triples in Z and also from two triples and finally from only one triple.

We demonstrate that if the real parts of Pythagorean triple in Lipschitz integer set are not all zero, the vectors consisted of the non real parts will be linearly dependent.

Key Words:

Pythagorean triples – Quaternion numbers - Lipschitz integer – Rank of Matrix

1.مقدّمة

لا يُذكر اسم العالم فيثاغورث إلّا وقد لمعت في أذهاننا المبرهنة الشّهيرة باسمه, والتي تنص على: « في المثلّث القائم: مساحة المربّع المُنشأ على الوتر, تساوي مجموع مساحتي المُربّعين المنشأين على الضّلعين القائمتين », وهذه القاعدة لا تنطبق فقط على المربّع, وإنّما على أي مضلّع منتظم مُنشأ على أضلاع المثلّث القائم, وكذلك أنصاف الدوائر.

في الحقيقة, إذا كانت a,b,c أطوال أضلاع مثلّث قائم طول وتره c, فإنّ:

$$a^2+b^2=c^2$$

في الدّراسات اللاحقة, بدأ الاهتمام بإيجاد الحلول الصّحيحة لمعادلة ديوفانتس:

$$x^2+y^2=z^2$$

وسمّي كل حل من هذه الحلول ثلاثيّة فيثاغوريّة, ورمّزت بالرّمز $\{x,y,z\}$ ولعلّ أبسط مثال على تلك الثّلاثيّات $\{3,4,5\}$.

فيما بعد درست الثّلاثيّات في مجموعة أعداد غاوص الصّحيحة $¢[i]$, أي إيجاد حلول معادلة ديوفانتس في المجموعة $¢[i]$, حيث:

$$¢[i]=\{a+bi\in £\ ;\quad a,b\in ¢\}$$

في بحثنا هذا, نعرّف الثّلاثيّات الفيثاغوريّة في مجموعة أعداد ليبشتز الصّحيحة $\mathbb{L}$, وندرس إمكانيّة توليد ثلاثيّات فيثاغوريّة في $\mathbb{L}$ انطلاقاً من ثلاثيّات فيثاغوريّة في مجموعة الأعداد الصّحيحة $¢$.

2. هدف البحث

يهدف البحث إلى تعريف الثّلاثيّات الفيثاغوريّة في مجموعة أعداد ليبشتز الصّحيحة, وتوليد ثلاثيّات فيثاغوريّة في $\mathbb{L}$ انطلاقاً من ثلاثيّات فيثاغوريّة صحيحة في $\mathbb{C}$.

3. المناقشة و النّتائج

أوّلاً: تعاريف أساسيّة:

تعريف1: $[1]$ تعرّف مجموعة الأعداد فوق العقديّة (الكواتيرنيون) H, بأنّها مجموعة كلّ الأعداد التي لها الشّكل:

$$q = q_0 + q^* = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k$$

حيث: $q_0, q_1, q_2, q_3 \in$ ، و i, j, k وحدات تحقّق:

$$\begin{aligned} i^2 = j^2 = k^2 = ijk &= -1 \\ ij = k &= -ji \\ jk = i &= -kj \\ ki = j &= -ik \end{aligned}$$

مثال 1: الأعداد الآتية فوق عقديّة:

$$3 + i + 5j - 2k \quad , \quad 4 \quad , \quad 2i + 4j + 6k \quad , \quad 5 + 2i$$

لكل عدد فوق عقدي, قسمين, قسم حقيقي (سلّمي) وجزء متّجهي, فمن أجل العدد فوق العقدي:

$$q = q_0 + q^* = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k$$

فإنّ الجزء الحقيقي: q_0, أمّا الجزء المتّجهي: $q^* = q_1 i + q_2 j + q_3 k$

تعريف2: $[1]$ ليكن لدينا $p, q \in \mathrm{H}$ حيث:

$$p = p_0 + p^* = p_0 + p_1 i + p_2 j + p_3 k$$
$$q = q_0 + q^* = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k$$

عندئذٍ فإنّ $p = q$ إذا وفقط إذا كان: $p_0 = q_0$ و $p^* = q^*$ وبالتّالي أيضاً

$$p_1 = q_1 \quad , \quad p_2 = q_2 \quad , \quad p_3 = q_3$$

ثانياً: جبر الأعداد فوق العقديّة: $[2,3]$

ليكن لدينا $p,q \in \mathrm{H}$ حيث:

$$p = p_0 + p^* = p_0 + p_1 i + p_2 j + p_3 k$$
$$q = q_0 + q^* = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k$$

تعريف3: تُعرّف عمليّة جمع الأعداد فوق العقديّة $(+)$على النّحو الآتي:

$$\begin{aligned} p + q &= (p_0 + q_0) + \left(p^* + q^*\right) \\ &= \left(p_0 + q_0\right) + \left(p_1 + q_1\right) i + \left(p_2 + q_2\right) j + \left(p_3 + q_3\right) k \end{aligned}$$

واضح أنّ الصّفر هو محايد بالنّسبة لعمليّة الجمع, وكذلك فإنّ لكل عدد p من H نظير جمعيٍ, هو:

$$-p = -p_0 - p^* = -p_0 - p_1 i - p_2 j - p_3 k$$

تعريف4: تُعرّف عمليّة ضرب الأعداد فوق العقديّة $(\cdot)$ على النّحو الآتي:

$$\begin{aligned} p.q = (p_0.q_0) &- \left(p_1.q_1 + p_2.q_2 + p_3.q_3\right) + \\ &+ p_0\left(q_1 i + q_2 j + q_3 k\right) + q_0\left(p_1 i + p_2 j + p_3 k\right) + \\ &+ \left(p_2.q_3 - p_3.q_2\right) i + \left(p_3.q_1 - p_1.q_3\right) j + \left(p_1.q_2 - p_2.q_1\right) k \end{aligned}$$

وهي تكتب بالشّكل:

$$p.q = (p_0.q_0) - p^* q^* + p_0 q^* + q_0 p^* + p^* \times q^*$$

حيث:

$$p^*.q^* = p_1.q_1 + p_2.q_2 + p_3.q_3$$

$$p^* \times q^* = \begin{vmatrix} i & j & k \\ p_1 & p_2 & p_3 \\ q_1 & q_2 & q_3 \end{vmatrix}$$

ولأنّ: $p^* \times q^* \neq q^* \times p^*$ فإنّ الضّرب ليس عمليّة تبديليّة.

مثال2:

ليكن: $p = 3 + i - 2j + k \quad , \quad q = 2 - i + 2j + 3k$ من H عندئذٍ:

$$p.q = 8 - 9i - 2j + 11k$$
$$q.p = 8 + 7i + 6j + 11k$$

نتائج:

1. من التّعريف 3 يتّضح أنّ المجموعة H مغلقة بالنّسبة لعمليّة الجمع, حيث أنّ ناتج جمع عددين فوق عقديّين p,q هو عدد فوق عقدي, قسمه الحقيقي $p_0 + q_0$ وقسمه المتّجهيّ $p^* + q^*$.
2. من التّعريف 4 يتّضح أنّ المجموعة H مغلقة بالنّسبة لعمليّة الضّرب, حيث أنّ ناتج ضرب عددين فوق عقديّين p,q هو عدد فوق عقدي, قسمه الحقيقي $p_0.q_0 - p^* q^*$ وقسمه المتّجهيّ $p_0.q^* + q_0.p^* + q^* \times p^*$.
3. إنّ الضّرب يقبل التّوزيع على الجمع من اليمين و من اليسار, فإذا كانت p,q,r ثلاثة أعداد من H فإنّ:

$$\begin{array}{l} p.(q+r) = p.q + p.r \\ (q+r).p = q.p + r.p \end{array}.$$

4. إنّ حيادي عمليّة الضّرب هو العدد 1

ثالثاً: المرافق, النّظيم, المقلوب: $[3]$

ليكن $q = q_0 + q^* = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k$ عدد فوق عقديّ.

تعريف5: يُعرّف مرافق العدد q بانّه العدد $\bar{q}$ من H المعطى بالعلاقة:

$$\bar{q} = q_0 - q^* = q_0 - q_1 i - q_2 j - q_3 k$$

من التّعريف ينتج أنّ:

1. $\overline{(\bar{q})} = q$ لأنّ: $\overline{(\bar{q})} = \overline{(q_0 - q^*)} = q_0 - (-q^*) = q_0 + q^* = q$
2. $q + \bar{q} = 2q_0$.
3. $q.\bar{q} = \bar{q}.q$ وعلاوةً على ذلك فإنّ:

$$q.\bar{q} = \bar{q}.q = q_0{}^2 + q_1{}^2 + q_2{}^2 + q_3{}^2$$

4. $\overline{(q.p)} = \bar{p}.\bar{q}$ حيث: $p \in \mathrm{H}$.

تعريف6: يُعرّف نظيم العدد q بانّه العدد $|q|$ من ، المعطى بالعلاقة:

$$|q| = \sqrt{q.\bar{q}} = \sqrt{q_0{}^2 + q_1{}^2 + q_2{}^2 + q_3{}^2}$$

نتائج: ينتج من التّعريف أنّ:

1. $|q| = |\bar{q}|$.
2. $|p.q| = |p|.|q|$ حيث $p \in \mathrm{H}$ لأنّ:

$$|p.q|^2 = p.q.\left(\overline{p.q}\right) = p.q.\bar{q}.\bar{p} = p.|q|^2.\bar{p} = p.\bar{p}.|q|^2 = |p|^2.|q|^2$$

تعريف7: يُعرّف مقلوب العدد q بانّه العدد q^{-1} من H , بحيث :

$$q.q^{-1} = q^{-1}.q = 1$$

في الحقيقة, لدينا:

$$|q|^2 = q.\bar{q} \quad \Rightarrow \quad q = \frac{|q|^2}{\bar{q}} \quad \Rightarrow \quad q^{-1} = \frac{\bar{q}}{|q|^2}$$

وإذا كانت $|q| = 1$ عندئذٍ: $q^{-1} = \bar{q}$.

مثال3: $\dfrac{1}{4+2i+j-2k} = \dfrac{4-2i-j+2k}{16+4+1+4} = \dfrac{1}{25}\left(4-2i-j+2k\right)$

ملاحظة 1:

بما أنّ أي عدد مركّب $z = x + iy$ يمكن كتابته بالشّكل:

$$z = x + iy + 0j + 0k$$

فإنّ: $\mathrm{H} \subseteq \quad \subseteq \mathbb{C}$، .

رابعاً: مجموعات خاصّة:

تعريف 8: $[4]$ **أعداد هورويتز الصّحيحة (Hurwitz integer):**

أعداد هورْوِيتز الصّحيحة هي مجموعة كلّ الأعداد فوق العقديّة التي مكوّناتها أمّا أعداد صحيحة أو نصف صحيحة, ونرمز لها بالرمز $\mathbb{H}$, أي أنّ:

$$\mathbb{H} = \left\{ a + bi + cj + dk \in \mathrm{H}\,;\, a,b,c,d \in \mathbb{Z} \ \ or \ \ a,b,c,d \in \mathbb{Z} + \tfrac{1}{2} \right\}$$

مثال4: $p = 5 + \frac{1}{2} i + \frac{5}{2} j + 4k$ هو عدد هورويتز صحيح.

تعريف 9: $[5]$ **أعداد ليبشتز الصّحيحة (Lipschitz integer):**

أعداد ليبشتز الصّحيحة هي مجموعة كلّ الأعداد فوق العقديّة التي مكوّناتها أعداد صحيحة, ونرمز لها بالرمز $\mathbb{L}$, أي أنّ:

$$\mathbb{L} = \left\{ a + bi + cj + dk \in \mathrm{H}\,;\, a,b,c,d \in \mathbb{Z} \right\}$$

مثال5: $p = 5 + 5i - 3j + k$ هو عدد ليبشتز صحيح.

خامساً: الثّلاثيّات الفيثاغوريّة في مجموعة أعداد ليبشتز الصّحيحة:

نعلم من خلال نظريّة الأعداد, أنّ الثّلاثيّات الفيثاغوريّة في $\mathbb{Z}$ هي مجموعة كلّ الثّلاثيّات $\{x, y, z\}$ التي تحقّق معادلة ديوفانتس الآتية:

$$x^2 + y^2 = z^2 \;\; ; \;\; x, y, z \in \mathbb{Z}^+$$

سأقوم بتعميم فكرة الثّلاثيّات الفيثاغوريّة على مجموعة أعداد ليبشتز الصّحيحة $\mathbb{L}$.

فيما يأتي سأرمز لعدد ليبشتز الصّحيح $z = a + bi + cj + dk$ بالرّمز الآتي: (a,b,c,d) للدّلالة على العدد z. سندخل التّعريف الآتي:

تعريف 10:

لتكن $z_1 = (a_1,b_1,c_1,d_1), z_2 = (a_2,b_2,c_2,d_2), z_3 = (a_3,b_3,c_3,d_3)$ ثلاثة أعداد من $\mathbb{L}$. نقول إنّ $\{z_1, z_2, z_3\}$ إنّها ثلاثيّة فيثاغوريّة في $\mathbb{L}$, إذا تحقّق:

$$z_1^2 + z_2^2 = z_3^2 \qquad (1)$$

في الحقيقة من أجل العدد $z = (a,b,c,d)$ من $\mathbb{L}$ فإنّ:

$$z^2 = a^2 - \left(b^2 + c^2 + d^2\right) + a\left(bi + cj + dk\right) + a\left(bi + cj + dk\right) + \begin{vmatrix} i & j & k \\ b & c & d \\ b & c & d \end{vmatrix}$$

وبالتّالي:

$$z^2 = a^2 - b^2 - c^2 - d^2 + 2abi + 2acj + 2adk \qquad (2)$$

وعلى هذا فإنّ المعادلة (1) تكافئ وفقاً – لتعريف تساوي عددين فوق عقديّين – جملة المعادلات الآتية:

$$\begin{aligned}&\left(b_1^2 + b_2^2 - b_3^2\right) + \left(c_1^2 + c_2^2 - c_3^2\right) + \left(d_1^2 + d_2^2 - d_3^2\right) = \\ &= \left(a_1^2 + a_2^2 - a_3^2\right)\end{aligned} \qquad (3)$$

$$\begin{aligned} a_1b_1 + a_2b_2 &= a_3b_3 \\ a_1c_1 + a_2c_2 &= a_3c_3 \\ a_1d_1 + a_2d_2 &= a_3d_3 \end{aligned} \qquad (4)$$

مثال6:

سنبيّن أنّ الثّلاثيّة $\{z_1=(4,3,2,1), z_1=(2,2,2,4), z_1=(4,4,3,3)\}$ هي ثلاثيّة فيثاغوريّة في $\mathbf{L}$.

استناداً إلى العلاقة (2) فإنّ:

$$
\begin{aligned}
z_1{}^2 &= 2+24i+16j+8k \\
z_2{}^2 &= -20+8i+8j+16k \\
z_3{}^2 &= -18+32i+24j+24k
\end{aligned}
$$

واضح إنّ: $z_1{}^2+z_2{}^2=z_3{}^2$, وبالتّالي فإنّ الثّلاثيّة $\{z_1,z_2,z_3\}$ هي ثلاثيّة فيثاغوريّة في $\mathbf{L}$.

مبرهنة1:

بفرض $\overset{r}{u}_1(b_1,b_2,b_3), \overset{r}{u}_2(c_1,c_2,c_3), \overset{r}{u}_3(d_1,d_2,d_3)$ ثلاثة متّجهات في ^{3}، غير مرتبطة خطيّاً, ولنفرض أنّ $\{b_1,b_2,b_3\},\{c_1,c_2,c_3\},\{d_1,d_2,d_3\}$ ثلاثيّات فيثاغوريّة في ¢. إنّ الشّرط اللازم و الكافي لتكون الثّلاثيّة: $\{z_1,z_2,z_3\}$ فيثاغوريّة في $\mathbf{L}$ حيث:

$$
\left.
\begin{aligned}
z_1 &= (a_1, \beta b_1, \gamma c_1, \delta d_1) \\
z_2 &= (a_2, \beta b_2, \gamma c_2, \delta d_2) \\
z_3 &= (a_3, \beta b_3, \gamma c_3, \delta d_3)
\end{aligned}
\right\} \; ; \; \beta,\gamma,\delta \in ¢^{*}
$$

هو أن تكون: $a_1=a_2=a_3=0$.

الإثبات:

لزوم الشّرط:

بفرض أنّ: $\{z_1, z_2, z_3\}$ هي ثلاثيّات فيثاغوريّة في $\mathbb{L}$, عندئذٍ فإنّ:

$$\{z_1^{\,2} + z_2^{\,2} = z_3^{\,2}\}$$

وبالتّالي جملة المعادلات (4) تكون محقّقة.

إنّ جملة المعادلات (4) هي جملة معادلات متجانسة بالمجاهيل a_1, a_2, a_3, وبسبب الاستقلال الخطّي للمتّجهات: $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$ فإنّ:

$$\begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix} \neq 0 \;\Rightarrow\; \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & -b_3 \\ c_1 & c_2 & -c_3 \\ d_1 & d_2 & -d_3 \end{vmatrix} \neq 0$$

وهذا يعني أنّ لجملة المعادلات (4) حل وحيد هو الحلّ الصّفري $a_1 = a_2 = a_3 = 0$.

وكون الثّلاثيّات:

$$\{b_1, b_2, b_3\}\;, \{c_1, c_2, c_3\}\;, \{d_1, d_2, d_3\}$$

فيثاغوريّة في $\mathbb{C}$ فإنّ المعادلة (3) على النّحو الآتي:

$$a_1^{\,2} + a_2^{\,2} - a_3^{\,2} = 0$$

وهذه محقّقة في حالة: $a_1 = a_2 = a_3 = 0$

كفاية الشّرط

حتّى تكون: $\{z_1, z_2, z_3\}$ ثلاثيّة فيثاغوريّة في $\mathbb{L}$, يجب أن تتحقّق جملة المعادلات (3) و (4) والتي يمكن كتابتها بعد الأخذ بعين الاعتبار أنّ:

$$\{b_1, b_2, b_3\}, \{c_1, c_2, c_3\}, \{d_1, d_2, d_3\}$$

ثلاثيّة فيثاغوريّة في $\mathbb{C}$, على النّحو الآتي:

$$\begin{aligned} a_1^{\,2} + a_2^{\,2} &= a_3^{\,2} \\ a_1 b_1 + a_2 b_2 &= a_3 b_3 \\ a_1 c_1 + a_2 c_2 &= a_3 c_3 \\ a_1 d_1 + a_2 d_2 &= a_3 d_3 \end{aligned}$$

فإذا كانت $a_1 = a_2 = a_3 = 0$ فإنّ جملة المعادلات الأخيرة ستكون محقّقة, وبالتّالي فإنّ الثّلاثيّة $\{z_1, z_2, z_3\}$ فيثاغوريّة في $\mathbb{L}$. ■

ملاحظة 2:

سنرمز بالرّمز A للمصفوفة الآتية:

$$\begin{pmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{pmatrix}$$

نتيجة 1:

بالاعتماد على المبرهنة السّابقة فإنّه يمكن توليد ثلاثيّات فيثاغوريّة في $\mathbb{L}$ انطلاقاً من أي ثلاثيّات فيثاغوريّة في ¢.

الآن بفرض أنّ $\{b_1, b_2, b_3\}, \{c_1, c_2, c_3\}, \{d_1, d_2, d_3\}$ ثلاثيّات في ¢, فإذا كان:

$$\det(A) \neq 0$$

فيمكن توليد الثّلاثيّات الفيثاغوريّة في $\mathbb{L}$ الآتية:

$$\{(0, \beta b_1, \gamma c_1, \delta d_1), (0, \beta b_2, \gamma c_2, \delta d_2), (0, \beta b_3, \gamma c_3, \delta d_3)\}$$

$$\{(0, \beta b_1, \delta d_1, \gamma c_1), (0, \beta b_2, \delta d_2, \gamma c_2), (0, \beta b_3, \delta d_3, \gamma c_3)\}$$

$$\{(0, \gamma c_1, \beta b_1, \delta d_1), (0, \gamma c_2, \beta b_2, \delta d_2), (0, \gamma c_3, \beta b_3, \delta d_3)\}$$

$$\{(0, \gamma c_1, \delta d_1, \beta b_1), (0, \gamma c_2, \delta d_2, \beta b_2), (0, \gamma c_3, \delta d_3, \beta b_3)\}$$

$$\{(0, \delta d_1, \beta b_1, \gamma c_1), (0, \delta d_2, \beta b_2, \gamma c_2), (0, \delta d_3, \beta b_3, \gamma c_3)\}$$

$$\{(0,\delta d_1,\gamma c_1,\beta b_1),(0,\delta d_2,\gamma c_2,\beta b_2),\ (0,\delta d_3,\gamma c_3,\beta b_3)\}$$

حيث $\beta,\gamma,\delta\in ¢$.

مثال7:

من أجل الثّلاثيات الفيثاغوريّة $\{7,24,25\},\{5,12,13\},\{3,4,5\}$ فإنّ يمكن توليد ثّلاثيّات فيثاغوريّة في $\mathbf{L}$, منها:

$$\{(0,3\beta,5\gamma,7\delta),(0,4\beta,12\gamma,24\delta),\ (0,5\beta,13\gamma,25\delta)\}$$

$$\{(0,3\beta,7\delta,5\gamma),(0,4\beta,24\delta,12\gamma),\ (0,5\beta,25\delta,13\gamma)\}$$

$$\{(0,7\delta,3\beta,5\gamma),(0,24\delta,4\beta,12\gamma),\ (0,25\delta,5\beta,13\gamma)\}$$

مهما تكن $\beta,\gamma,\delta\in ¢$. و ثلاثيّات أخرى.

- لنناقش الآن الحالة التي يكون فيها: $\det(A)=0$

لنميّز الحالتين الآتيتين:

الحالة الأولى:

الحالة التي يكون فيها:

$$\operatorname{rank}(A)=2$$

عندئذٍ يكون لجملة المعادلات (4) بالمجاهيل a_1,a_2,a_3, عدد غير منتهٍ من الحلول إلّا أنّ الحلول ستعطى بدلالة مجهول واحد من هذه المجاهيل:

أي أنّ الحلول ستكون من الشّكل:

$$a_1=\lambda_1 a_3\ \ ,\ \ a_2=\lambda_2 a_3$$

بالتّعويض في المعادلة (3) نجد:

$$\lambda_1^2 a_3^2+\lambda_2^2 a_3^2-a_3^2=0\ \ \Rightarrow\ \ a_3^2\left(\lambda_1^2+\lambda_2^2-1\right)=0$$

وبالتّالي فإنّ: $a_1 = a_2 = a_3 = 0$

وبالتّالي تبقى المبرهنة 1 صحيحة في حالة $\mathrm{rank}(A) = 2$.

نتيجة 2:

بالاعتماد على المبرهنة 1 وعلى المناقشة السابقة فإنّه يمكن توليد ثلاثيّات فيثاغوريّة في $\mathbb{L}$ انطلاقاً من اثنتين من الثلاثيّات فيثاغوريّة في $¢$.

الآن بفرض أنّ $\{b_1, b_2, b_3\}, \{c_1, c_2, c_3\}$ ثلاثيّات فيثاغوريّة في $¢$ بحيث يكون التّناسب الآتي غير محقّق:

$$\frac{b_1}{c_1} = \frac{b_2}{c_2} = \frac{b_3}{c_3}$$

فيمكن توليد الثّلاثيّات الفيثاغوريّة في $\mathbb{L}$ الآتية:

$$\left\{(0, \beta b_1, \gamma c_1, \delta b_1), (0, \beta b_2, \gamma c_2, \delta b_2), (0, \beta b_3, \gamma c_3, \delta b_3)\right\}$$

$$\left\{(0, \beta b_1, \gamma c_1, \delta c_1), (0, \beta b_2, \gamma c_2, \delta c_2), (0, \beta b_3, \gamma c_3, \delta c_3)\right\}$$

حيث $\beta, \gamma, \delta \in ¢$.

بالإضافة إلى تلك التي تنتج من خلال إجراء التّباديل على المركّبات الثّلاث الأخير من الأنماط الآنفة الذّكر بشكل متناظر للأعداد الثّلاث.

مثال8:

من أجل الثّلاثيّات الفيثاغوريّة $\{5,12,13\}, \{3,4,5\}$ في $¢$, فيمكن توليد ثلاثيّات فيثاغوريّة في $\mathbb{L}$ من الأنماط:

$$\left\{(0, 3\beta, 5\gamma, 3\delta), (0, 4\beta, 12\gamma, 4\delta), (0, 5\beta, 13\gamma, 5\delta)\right\}$$

$$\left\{(0, 3\beta, 5\gamma, 5\delta), (0, 4\beta, 12\gamma, 12\delta), (0, 5\beta, 13\gamma, 13\delta)\right\}$$

مهما تكن الأعداد الصّحيحة β,γ,δ. وثلاثيّات أخرى تنتج من النّمطين السّابقين بإجراء تباديل على المركّبات الثّلاثة الأخيرة بشكل متناظر للأعداد الثّلاث.

الحالة الثّانية:

الحالة التي يكون فيها: $\operatorname{rank}(A)=1$ عندئذٍ يكون لجملة المعادلات (4) بالمجاهيل a_1,a_2,a_3, عدد غير منتهٍ من الحلول. وعلاوةً على ذلك فإنّ هذه الجملة تكافئ إحدى معادلات الجملة (4) وتكون المتّجهات :

$$\vec{u}_1(b_1,b_2,b_3),\vec{u}_2(c_1,c_2,c_3),\vec{u}_3(d_1,d_2,d_3)$$

مرتبطة خطيّاً مثنى مثنى.

من المعادلة $a_1b_1+a_2b_2=a_3b_3$ نجد أنّ حلولها المحقّقة لـ(3) هي:

$$a_1=\alpha b_1\ ,\ a_2=\alpha b_2\ \ ,\ \ a_3=\alpha b_3\quad ;\quad \alpha\in ¢$$

ممّا سبق نكون قد توصّلنا إلى صحّة المبرهنة الآتية

مبرهنة2:

لتكن $\{b_1,b_2,b_3\}$ ثلاثيّة فيثاغوريّة في $¢$ فإنّ الشّرط اللازم و الكافي لتكون الثّلاثيّة: $\{z_1,z_2,z_3\}$ ثلاثيّة فيثاغوريّة في $\mathbf{L}$ حيث:

$$\left.\begin{array}{l} z_1=(a_1,\beta b_1,\gamma b_1,\delta b_1) \\ z_2=(a_2,\beta b_2,\gamma b_2,\delta b_2) \\ z_3=(a_3,\beta b_3,\gamma b_3,\delta b_3) \end{array}\right\}\ ;\ \beta,\gamma,\delta\in ¢$$

هو أن يكون:

$$(a_1,a_2,a_3)=\alpha(b_1,b_2,b_3)\ ;\ \alpha\in ¢$$

نتيجة 3:

بالاعتماد على المبرهنة 2 فإنّه يمكن توليد ثلاثيّات فيثاغوريّة في $\mathbb{L}$ انطلاقاً من ثلاثيّة فيثاغوريّة في ¢. فبـــفرض أنّ $\{b_1, b_2, b_3\}$ ثلاثيّات فيثاغوريّة في ¢, فيمــكن توليد الثّلاثيّات الفيثاغوريّة في $\mathbb{L}$ الآتية:

$$\left\{\left(\alpha b_1, \beta b_1, \gamma b_1, \delta b_1\right), \left(\alpha b_2, \beta b_2, \gamma b_2, \delta b_2\right), \left(\alpha b_3, \beta b_3, \gamma b_3, \delta b_3\right)\right\}$$

مهما تكن $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in$ ¢

مثال9:

انطلاقاً من الثّلاثيّة $\{3,4,5\}$ الفيثاغوريّة في ¢ يمكننا توليد الثلاثيّات الفيثاغوريّة الآتية في $\mathbb{L}$, مهما تكن الأعداد الصّحيحة: $\alpha, \beta, \gamma, \delta$:

$$\left\{\left(3\alpha, 3\beta, 3\gamma, 3\delta\right), \left(4\alpha, 4\beta, 4\gamma, 4\delta\right), \left(5\alpha, 5\beta, 5\gamma, 5\delta\right)\right\}$$

نتيجة 4:

يمكن النّظر إلى الثلاثيّات الفيثاغوريّة في النّتيجة 3 من زاوية أخرى, حيث أنّها تُكتب بالشّكل:

$$\left\{b_1\left(\alpha, \beta, \gamma, \delta\right), b_2\left(\alpha, \beta, \gamma, \delta\right), b_3\left(\alpha, \beta, \gamma, \delta\right)\right\} \;;\quad \left(\alpha, \beta, \gamma, \delta\right) \in \mathbb{L}$$

وبالتّالي انطلاقاً من أي عدد ليبشتز صحيح و ثلاثيّة فيثاغوريّة في ¢ يمكن إيجاد ثلاثيّة فيثاغوريّة في ¢.

مثال10:

من أجل الثّلاثيّة $\{7, 24, 25\}$ و العدد $z = 2 + 3i + 3j + k$ فإنّ الثّلاثيّة الآتية هي ثلاثيّة فيثاغوريّة في $\mathbb{L}$:

$$\left\{\left(14, 21, 21, 7\right), \left(48, 72, 72, 24\right), \left(50, 75, 75, 25\right)\right\}.$$

مبرهنة3:

بفرض $\{(a_1,b_1,c_1,d_1),(a_2,b_2,c_2,d_2),(a_3,b_3,c_3,d_3)\}$ ثلاثيّة فيثاغوريّة في $\mathbb{L}$ عندئذٍ إذا كانت $(a_1,a_2,a_3)\neq 0$ فإنّ: $\operatorname{rank}(A)<3$ حيث:

$$A=\begin{pmatrix} b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\\ d_1 & d_2 & d_3\end{pmatrix}.$$

الإثبات:

بما أنّ $\{(a_1,b_1,c_1,d_1),(a_2,b_2,c_2,d_2),(a_3,b_3,c_3,d_3)\}$ ثلاثيّة فيثاغوريّة عندئذٍ فإنّ جملة المعادلات (3) و (4) ستكون محقّقة.

إذا كان $\operatorname{rank}(A)=3$ فإنّ لجملة المعادلات (4) حل وحيد هو الحلّ الصّفري:

$$(a_1,a_2,a_3)=0$$

وبالتّالي إذا كانت $(a_1,a_2,a_3)\neq 0$ فإنّ $\operatorname{rank}(A)\neq 3$. في الحقيقة, عندما يكون $\operatorname{rank}(A)<3$ فإنّ لجملة المعادلات (4) عدد غير منتهٍ من الحلول, يُختار منها الحلول الصّحيحة التي تجعل العلاقة (3) محقّقة.

مثال11:

لا يمكن إيجاد قيم لـ a_2,a_3 بحيث تكون الثّلاثيّة الآتية فيثاغوريّة في $\mathbb{L}$:

$$\{(1,1,1,1),(a_2,2,1,3),(a_3,3,2,1)\}$$

وذلك لأنّ:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3\\ 1 & 1 & 2\\ 1 & 3 & 1\end{vmatrix}=3\neq 0 \quad\Rightarrow\quad \operatorname{rank}(A)\neq 0$$

نتيجة 5:

بفرض $\{(a_1,b_1,c_1,d_1),(a_2,b_2,c_2,d_2),(a_3,b_3,c_3,d_3)\}$ ثلاثيّة فيثاغوريّة في $\mathbb{L}$ عندئذٍ إذا كانت $(a_1,a_2,a_3)\neq 0$ فإنّ المتّجهات:

$$(b_3,c_3,d_3)\ ,\ (b_2,c_2,d_2)\ ,(b_1,c_1,d_1)$$

تكون مرتبطة خطيّاً.

الإثبات:

من المبرهنة 3, فإنّ $\operatorname{rank}(A)<3$ وبالتّالي:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=0$$

وهذا يعني أنّ المتّجهات: (b_1,c_1,d_1), (b_2,c_2,d_2), (b_3,c_3,d_3) تكون مرتبطة خطيّاً.

مثال 12

إنّ الثّلاثيّة $\{z_1=(4,3,2,1),z_1=(2,2,2,4),z_1=(4,4,3,3)\}$ هي ثلاثيّة فيثاغوريّة في $\mathbb{L}$, فالمتّجهات $\vec{u}_1(3,2,1),\vec{u}_2(2,2,4),\vec{u}_3(4,3,3)$ مرتبطة خطيّاً.

4. النتائج:

تمّ تعميم مفهوم الثّلاثيّات الفيثاغوريّة على مجموعة أعداد ليبشتز الصّحيحة, وتوصّلنا إلى إثبات صحّة المبرهنات الآتية:

مبرهنة1:

بفرض $\vec{u}_1\left(b_1,b_2,b_3\right),\vec{u}_2\left(c_1,c_2,c_3\right),\vec{u}_3\left(d_1,d_2,d_3\right)$ ثلاثة متّجهات في ^{3} ، غير مرتبطة خطيّاً, ولنفرض أنّ $\{b_1,b_2,b_3\},\{c_1,c_2,c_3\},\{d_1,d_2,d_3\}$ ثلاثيّات فيثاغوريّة في $\mathbb{C}$. إنّ الشّرط اللازم و الكافي لتكون الثّلاثيّة: $\{z_1,z_2,z_3\}$ فيثاغوريّة في $\mathbb{L}$ حيث:

$$\left.\begin{aligned} z_1&=\left(a_1,\beta b_1,\gamma c_1,\delta d_1\right)\\ z_2&=\left(a_2,\beta b_2,\gamma c_2,\delta d_2\right)\\ z_3&=\left(a_3,\beta b_3,\gamma c_3,\delta d_3\right)\end{aligned}\right\} \;;\; \beta,\gamma,\delta\in\mathbb{C}^*$$

هو أن تكون: $a_1=a_2=a_3=0$.

واستنتجنا من ذلك توليد ثلاثيّات فيثاغوريّة في $\mathbb{L}$ انطلاقاً من ثلاث ثلاثيّات فيثاغوريّة في $\mathbb{C}$, أو انطلاقاً من ثلاثيّتين فيثاغوريّتين.

مبرهنة2:

لتكن $\{b_1,b_2,b_3\}$ ثلاثيّة فيثاغوريّة في $\mathbb{C}$ فإنّ الشّرط اللازم و الكافي لتكون الثّلاثيّة: $\{z_1,z_2,z_3\}$ ثلاثيّة فيثاغوريّة في $\mathbb{L}$ حيث:

$$\left.\begin{aligned} z_1&=\left(a_1,\beta b_1,\gamma b_1,\delta b_1\right)\\ z_2&=\left(a_2,\beta b_2,\gamma b_2,\delta b_2\right)\\ z_3&=\left(a_3,\beta b_3,\gamma b_3,\delta b_3\right)\end{aligned}\right\} \;;\; \beta,\gamma,\delta\in\mathbb{C}$$

هو أن يكون:

$$\left(a_1,a_2,a_3\right)=\alpha\left(b_1,b_2,b_3\right)\;;\;\alpha\in\mathbb{C}$$

واستنتجنا من ذلك توليد ثلاثيّات فيثاغوريّة في $\mathbb{L}$ انطلاقاً من ثلاثيّة فيثاغوريّة واحدة.

مبرهنة3:

بفرض $\{(a_1,b_1,c_1,d_1),(a_2,b_2,c_2,d_2),(a_3,b_3,c_3,d_3)\}$ ثلاثيّة فيثاغوريّة في $\mathbb{L}$ عندئذٍ إذا كانت $(a_1,a_2,a_3)\neq 0$ فإنّ: $\operatorname{rank}(A)<3$ حيث:

$$A=\begin{pmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{pmatrix}.$$

واستنتجنا من ذلك أنّه بفرض $\{(a_1,b_1,c_1,d_1),(a_2,b_2,c_2,d_2),(a_3,b_3,c_3,d_3)\}$ ثلاثيّة فيثاغوريّة في $\mathbb{L}$ عندئذٍ إذا كانت $(a_1,a_2,a_3)\neq 0$ فإنّ المتّجهات: (b_1,c_1,d_1), (b_2,c_2,d_2), (b_3,c_3,d_3) تكون مرتبطة خطيّاً.

5. المقترحات والتّوصيات:

1. دراسة تعميم توليد الثّلاثيّات الفيثاغوريّة في مجموعة أعداد ليبشتز الصّحيحة, من زوج من أعداد ليبشتز الصّحيحة. وإيجاد الزّوج المولّد لكل ثلاثيّة فيثاغوريّة في $\mathbb{L}$.
2. تطبيق الثّلاثيّات الفيثاغوريّة في التشفير, حيث أنّ كل ثّلاثيّة فيثاغوريّة في $\mathbb{L}$ تحوي 12 وسيطاً, ترتبط مع بعضها بأربعة علاقات (العلاقات (3) و(4)) وبالتّالي 8 وسطاء مستقلّة.

6. المراجع العلميّة:

1. Ant_onio Machiavelo and Lu__s Ro_cadas, Some connections between the arithmetic and geometry of Lipschitz integers, 2011
2. John H. Conway and Derek Smith, On Quaternions and Octonions, AK Peters 2003
3. J. B. Kuipers. Quaternions and Rotation Sequences. Princeton University Press, 1999.
4. S. L. Altmann. *Rotations, Quaternions, and Double Groups*. Oxford: Clarendon, 1986.
5. S. L. Altmann. “Hamilton, Rodrigues, and the Quaternion Scandal,” *Mathematics Magazine* 62(5):291–308, December 1989.