تفريق مكعب عدد غاوص صحيح

إلى ثلاثة مكعبات في $\mathbb{Z}[i]$

طالبة الدّكتوراه: نجوى أحمد نجّوم – كليّة العلوم – قسم الرّياضيّات

إشـــــــــــراف: أ. د. عبد الباسط الخطيب – جبر خطّي – جامعة البعث.

أ. د. محمد نور شمّة – تحليل رياضي – جامعة دمشق.

ملخص البحث

درسنا في هذا البحث مسألة تفريق مكعّب عدد غاوص صحيح إلى ثلاثة مكعّبات في $\mathbb{Z}[i]$، وأسمينا الرباعيّات المحقّقة لذلك بالرباعيّات الفيرماويّة.

درسنا الحالة التي تكون فيها الأقسام الحقيقيّة رباعيّة فيرماويّة، وقمنا بتوليد رباعيّات فيرماويّة في $\mathbb{Z}[i]$ انطلاقاً من رباعيّات فيرماويّة في $\mathbb{Z}$.

قمنا بتعميم التّوليد بوسطاء صحيحة لرباعيّات فيرماويّة في $\mathbb{Z}$ إلى التّوليد بوسطاء غاوص صحيحة لرباعيّات فيرماويّة في $\mathbb{Z}[i]$.

الكلمات المفتاحيّة:

عدد غاوص الصّحيح – رباعيّة فيرماويّة – توليد – وسطاء صحيحة.

A Decomposition a Cube of Gaussian Integer into Three Cubes in $\mathbb{Z}[\mathbf{i}]$

Najwa Ahmad Najjom – Faculty of Science – Albaath university
Supervisor: P.Dr. **Abdul Basit Al-Khatib** - Albaath university
P.Dr. **Muhammad Noor Shamma** - Damascus university

Abstract

We study in this paper the problem of decomposition of Gaussian integer cube into three cubes in $\mathbb{Z}[i]$, and call these quadruples by Fermat quadruples. We study the case where the real parts are Fermat quadruples, and generate Fermat quadruple in $\mathbb{Z}[i]$ from another one in $\mathbb{Z}$.

We generalize the generation by integer parameters for Fermat quadruples in $\mathbb{Z}$ to the generation by Gaussian integer Parameters for Fermat quadruples in $\mathbb{Z}[i]$.

Key Words:

Gaussian integer – Fermat Quadruple - generation - integer Parameters .

1.مقدّمة

كتب فيرما على هامش نسخته من طبعة باشيت لأعمال ديوفانتس: «من المستحيل فصل المكعّب إلى مكعّبين، أو قوّة رابعة إلى مجموع قوّتين من الدرجة الرابعة، أو بشكل عام أي قوّة أعلى من الثانية إلى اثنتين من القوى من نفس الدّرجة، لقد اكتشفت إثباتاً رائعاً حقّاً، وهذا الهامش أصغر من أن يحتويه» $[1]$.

في اللغة الحديثة، هذا يعني: من أجل n أي عدد طبيعي أكبر تماماً من 2 فإنّ معادلة ديوفانتس:

$$x^n + y^n = z^n \ ; \ n > 2 \left(n \in \mathbb{N} \right)$$

ليس لها حلول مختلفة عن الصّفر في $\mathbb{Z}$، حيث يوجد لهذه المعادلة حلول مبتذلة عندما يكون إحدى المتغيّرات الصحيحة يساوي الصفر.

سمّيت هذه المسألة فيما بعد بمبرهنة فيرما الأخيرة، أو حدسيّة (تخمين) فيرما، وقد حدسها بيير فيرما في العام 1637م. وعلى مدى 358 عام من جهود علماء كثر في الرياضيّات في محاولة إثبات هذه المبرهنة والتي باءت بالفشل، إلّا أنّها اعطت تقدّماً كبيراً في نظريّة الأعداد. وبعد سنواتٍ من نضال «أندرو وايلز» في محاولة حل هذا اللغز، الذي صادفه طفلاً وشُغف به على مدى حياته، تمكّن في العام 1995م من إثبات مبرهنة فيرما الأخيرة، والتي تعد أكثر المبرهنات شهرةً في تاريخ الرياضيّات$[2]$.

إذاً لا يمكن تفريق المكعّب إلى مجموع مكعّبين، ولكن يمكن تفريق المكعّب إلى مجموع ثلاثة مكعّبات، وفي نظريّة الأعداد: توجد حلول صحيحة لمعادلة ديوفانتس:

$$x^3 + y^3 + z^3 = t^3$$

وكمثال عن تلك الحلول: $(3,4,5,6)$. في هذا البحث نقوم بدراسة تفريق مكعّب عدد غاوص صحيح إلى مجموع ثلاث مكعّبات في $\mathbb{Z}[i]$، أي دراسة المعادلة:

$$z_1^{\,3}+z_2^{\,3}+z_3^{\,3}=z_4^{\,3}$$

في $\mathbb{Z}[i]$، وأسمينا الحلول: رباعيّات فيرماويّة.

2. هدف البحث

يهدف البحث إلى دراسة تفريق مكعّب عدد من $\mathbb{Z}[i]$ إلى مجموع ثلاثة مكعّبات أعداد من $\mathbb{Z}[i]$، ودراسة توليد الرباعيّات الفيرماويّة في $\mathbb{Z}[i]$.

3. المناقشة و النّتائج

3 – 1: تعاريف أساسيّة:

تعريف1: تُعرّف الرّباعيّة الفيرماويّة في $\mathbb{Z}$ بأنها مجموعة من أربع أعداد صحيحة موجبة (x,y,z,t) تحقق معادلة ديوفانتس : $x^3+y^3+z^3=t^3$.

تعريف2: الرّباعيّة الفيرماويّة الأوليّة في $\mathbb{Z}$ هي رباعيّة فيرماويّة (x,y,z,t) تحقق: $(x,y,z,t)=1$ (أي أنّ x,y,z,t أوليّة فيما بينهما)

تعريف3: تُعرّف مجموعة أعداد غاوص الصحيحة بأنها حلقة جزئيّة من مجموعة الأعداد المركبة المؤلّفة من جميع الأعداد $x+iy$ حيث x,y عددان صحيحان، ويُرمز لها بـ $\mathbb{Z}[i]$ [3].

3 – 2: الرّباعيّات الفيرماويّة في $\mathbb{Z}[\mathbf{i}]$

تعريف4: لتكن z_1,z_2,z_3,z_4 أعداد غاوص صحيحة، عندئذٍ نسمّي الرّباعيّة (z_1,z_2,z_3,z_4) رباعيّة فيرماويّة في $\mathbb{Z}[i]$، إذا تحقّق الشّرط الآتي:

$$z_1^{\,2}+z_2^{\,2}+z_3^{\,2}=z_4^{\,2} \qquad (1)$$

الآن بفرض $z=x+iy$ عندئذٍ:

$$z^3=(x+iy)^3=\left(x^3-3xy^2\right)+i\left(3x^2y-y^3\right)$$

بفرض (z_1,z_2,z_3,z_4) رباعيّة فيرماويّة، عندئذٍ فإنّ المعادلة (1) تكون محقّقة. فإذا كانت $z_i = x_i + y_i$ حيث $i \in \{1,2,3,4\}$ (سنفترض ذلك في كل هذه الفقرة) فإنّ العلاقة (1) تكافئ جملة المعادلتين:

$$\begin{aligned} 3\left(x_1y_1{}^2 + x_2y_2{}^2 + x_3y_3{}^2 - x_4y_4{}^2\right) &= x_1{}^3 + x_2{}^3 + x_3{}^3 - x_4{}^3 \\ 3\left(y_1x_1{}^2 + y_2x_2{}^2 + y_3x_3{}^2 - y_4x_4{}^2\right) &= y_1{}^3 + y_2{}^3 + y_3{}^3 - y_4{}^3 \end{aligned} \qquad (2)$$

الآن بفرض أنّ: (x_1,x_2,x_3,x_4) رباعيّة فيرماويّة فإنّ:

$$x_1{}^2 + x_2{}^2 + x_3{}^2 = x_4{}^2 \qquad (3)$$

وتصبح جملة المعادلات (2) بالشّكل:

$$\begin{aligned} x_1y_1{}^2 + x_2y_2{}^2 + x_3y_3{}^2 - x_4y_4{}^2 &= 0 \\ 3\left(y_1x_1{}^2 + y_2x_2{}^2 + y_3x_3{}^2 - y_4x_4{}^2\right) &= y_1{}^3 + y_2{}^3 + y_3{}^3 - y_4{}^3 \end{aligned} \qquad (4)$$

نلاحظ أنّ جملة المعادلات (4) محقّقة في حالة $y_i = kx_i$ حيث $i \in \{1,2,3,4\}$ و $k \in \mathbb{Z}$، وبالتّالي نخلص إلى النتيجة الآتية:

نتيجة 1

بفرض أنّ الرباعيّة (x_1,x_2,x_3,x_4) فيرماويّة في $\mathbb{Z}$، فإنّ الرباعيّة الآتية:

$$\left(x_1 + iky_1, x_2 + iky_2, x_3 + iky_3, x_4 + iky_4\right);\ k \in \mathbb{Z}$$

فيرماويّة في $\mathbb{Z}[i]$.

وبنفس الطريقة إذا كانت (y_1,y_2,y_3,y_4) رباعيّة فيرماويّة فإنّ:

$$y_1{}^2 + y_2{}^2 + y_3{}^2 = y_4{}^2 \qquad (5)$$

وتصبح جملة المعادلات (2) بالشّكل:

$$\begin{aligned} &3\left(x_1y_1^2+x_2y_2^2+x_3y_3^2-x_4y_4^2\right)=x_1^3+x_2^3+x_3^3-x_4^3 \\ &y_1x_1^2+y_2x_2^2+y_3x_3^2-y_4x_4^2=0 \end{aligned} \qquad (6)$$

نلاحظ أنّ جملة المعادلات (6) محقّقة في حالة $x_i=ky_i$ حيث $i\in\{1,2,3,4\}$ و $k\in\mathbb{Z}$، وبالتّالي نخلص إلى النتيجة الآتية:

نتيجة 2

بفرض أنّ الرباعيّة (y_1,y_2,y_3,y_4) فيرماويّة في $\mathbb{Z}$، فإنّ الرباعيّة الآتية:

$$(kx_1+iy_1,kx_2+iy_2,kx_3+iy_3,kx_4+iy_4)\,;\,k\in\mathbb{Z}$$

فيرماويّة في $\mathbb{Z}[i]$.

ملاحظة 1:

في الحقيقة، عندما تكون $k\in\mathbb{Q}$ تبقى الرباعيّات المتضّمنة في النتيجتين 1 و 2 تحقّق المعادلة (1) وتكون الرباعيّة:

$$(k_1x_1+ik_2y_1,k_1x_2+ik_2y_2,k_1x_3+ik_2y_3,k_1x_4+ik_2y_4)$$

رباعيّة فيرماويّة في $\mathbb{Z}[i]$. حيث $k_1,k_2\in\mathbb{Z}$ و $k=\dfrac{k_2}{k_1}$ بما يتوافق مع النتيجة 1،

و $k=\dfrac{k_1}{k_2}$ بما يتوافق مع النتيجة 2.

نتيجة3:

بفرض أنّ (a,b,c,d) رباعيّة فيثاغوريّة في $\mathbb{Z}$، وكانت p,q كثيرتي حدود، فإذا كان k عدداً صحيحاً، فإنّ الرباعيّة الآتية:

$$\left(p(k)a+iq(k)a\ ,\ p(k)b+iq(k)b\ ,\ p(k)c+iq(k)c\ ,\ p(k)d+iq(k)d\right)$$

فيرماويّة في $□[i]$.

مثال1:

من أجل الرّباعيّة الفيرماويّة $(3,4,5,6)$ في □، وكثيرتا الحدود $p(x)=x+1\ ,\ q(x)=x^2$ فإنّ الرباعيّات الآتية:

$$\left(3k+3+3k^2i\ ,\ 4k+4+4k^2i\ ,\ 5k+5+5k^2i\ ,\ 6k+6+6k^2i\right)$$

فيرماويّة في $□[i]$.

$k=1$	$(6+3i\ ,\ 8+4i\ ,\ 10+5i\ ,\ 12+6i)$
$k=2$	$(9+12i\ ,\ 12+16i\ ,\ 15+20i\ ,\ 18+24i)$
$k=3$	$(12+27i\ ,\ 16+36i\ ,\ 20+45i\ ,\ 24+54i)$

مبرهنة 1:

بفرض أنّ (z_1,z_2,z_3,z_4) رباعيّة فيرماويّة في $□[i]$، وبفرض أنّ (x_1,x_2,x_3,x_4) فيرماويّة في □. إذا كانت:

$$\left(y_i,y_j,y_k\right)=k\left(x_i,x_j,x_k\right)$$

حيث $k\in□$ و $i,j,k\in\{1,2,3,4\}$ بحيث $i<j<k$.

عندئذٍ فإنّ: $x_\ell=y_\ell$ حيث: $\ell\in\{1,2,3,4\}\setminus\{i,j,k\}$

الإثبات:

بفرض أنّ: $(y_1, y_2, y_3) = k\,(x_1, x_2, x_3)$ عندئذٍ بالتعويض في جملة المعادلات (4)، نجد:

$$\begin{cases} k^2\left(x_1^3 + x_2^3 + x_3^3\right) - x_4 y_4^2 = 0 \\ 3k\left(x_1^3 + x_2^3 + x_3^3\right) - 3y_4 x_4^2 = k^3\left(x_1^3 + x_2^3 + x_3^3\right) - y_4^3 \end{cases} \quad (7)$$

وكون: (x_1, x_2, x_3, x_4) فيرماويّة في □، فإنّ المعادلات (7) تُكتب بالشّكل:

$$\begin{cases} k^2 x_4^3 - x_4 y_4^2 = 0 \\ 3k x_4^3 - 3y_4 x_4^2 = k^3 x_4^3 - y_4^3 \end{cases} \quad (8)$$

وهذه الجملة تكافئ:

$$\begin{cases} y_4^2 = k^2 x_4^2 \\ x_4^3\left(3k - k^3\right) = y_4\left(3x_4^2 - y_4^2\right) \end{cases} \quad (9)$$

بتعويض الأولى في الثّانية، نجد:

$$k x_4^3\left(3 - k^2\right) = y_4 x_4^2\left(3 - k^2\right)$$

وهي تكافئ ضمن شروط المسالة:

$$y_4 = k x_4$$

وبنفس الطريقة نجد:

- إذا كان $(y_1, y_2, y_4) = k\,(x_1, x_2, x_4)$ فإنّ: $y_3 = k x_3$.
- إذا كان $(y_1, y_3, y_4) = k\,(x_1, x_3, x_4)$ فإنّ: $y_2 = k x_2$.

- إذا كان $(y_2,y_3,y_4)=k\,(x_2,x_3,x_4)$ فإنّ: $y_1=kx_1$. ■

من خلال ما تقدّم تبيّن أنّه إذا كانت (z_1,z_2,z_3,z_4) رباعيّة ما في $\square[i]$، ولنفرض أنّ: (x_1,x_2,x_3,x_4) رباعيّة فيرماويّة في □ ، عندئذٍ فإنّه إذا كان $y_i=kx_i$ حيث $i\in\{1,2,3,4\}$ و $k\in\square$، فإنّ الرباعيّة (z_1,z_2,z_3,z_4) فيثاغوريّة، ولكن ماذا عن العكس؟

أي هل إذا كانت (z_1,z_2,z_3,z_4) رباعيّة فيرماويّة في $\square[i]$، وكانت: (x_1,x_2,x_3,x_4) رباعيّة فيرماويّة في □ فإنّ الحل الوحيد للجملة (4) هو: $(y_1,y_2,y_3,y_4)=k\,(x_1,x_2,x_3,x_4)$؟؟؟

في الحقيقة قمنا بالاختبار الآتي:

بما أنّ $(1,6,8,9)$ رباعيّة فيرماويّة في □، أخذنا الرّباعيّة: $(1+ia,6+ib,8+ic,9+id)$ في $\square[i]$، فإذا كانت الرباعيّة الأخيرة فيرماويّة في $\square[i]$ فإنّ الجملة (4) تكافئ:

$$\begin{aligned}&a^2+6b^2+8c^2=9d^2\\&a^3+b^3+c^3-d^3=3(a+36b+64c-81t)\end{aligned}\qquad(9)$$

وباستخدام لغات البرمجة $(Turbo\ Bascal)$ أجرينا بحثاً عن الأعداد التي تحقّق الجملة الأخيرة فتبيّن أنّ الحلول:

$$(a,b,c,d)\in\{(1,6,8,9),(2,12,16,18),(3,18,24,27),\ldots\}$$

قمنا بإعادة الاختبار من أجل الرباعيّات الفيرماويّة:

$$(3,4,5,6),(3,10,18,19),(4,17,22,25),(7,14,17,20),(11,15,27,29)$$

وفي كل مرّة تكون نتيجة الاختبار أنّه إذا كانت الرباعيّات آنفة الذّكر هي الأقسام الحقيقيّة لرباعيّات فيثاغوريّة في $\mathbb{Z}[i]$ فإنّ الأقسام التخيّليّة ستكون مرتبطة خطيّاً بالأقسام الحقيقيّة. **إلّا أنّنا لا نجزم بصحّة هذا الادّعاء.**

حدسيّة:

بفرض أنّ (z_1,z_2,z_3,z_4) رباعيّة ما في $\mathbb{Z}[i]$، وبفرض أنّ (x_1,x_2,x_3,x_4) فيرماويّة في $\mathbb{Z}$. إنّ الشرط اللازم والكافي لتكون (z_1,z_2,z_3,z_4) في $\mathbb{Z}[i]$ هو أن يكون:

$$(y_1,y_2,y_3,y_4)=k\,(x_1,x_2,x_3,x_4)\ ;\ \ k\in\mathbb{Z}$$

3 – 3: توليد رباعيّات فيرماويّة $\mathbb{Z}[\mathbf{i}]$

لقد تمّت دراسة حلول معادلة ديوفانتس $x^3+y^3+z^3=t^3$ وإيجاد علاقات تولّد الحلول في $\mathbb{Z}$، والتي يمكن استبدال هذه المتغيّرات بمتغيّرات من $\mathbb{Z}[i]$ لتوليد رباعيّات فيثاغوريّة في $\mathbb{Z}[i]$.

لقد تمّ إيجاد الحل الكامل لمعادلة ديوفانتس :

$$x^3+y^3+z^3=t^3 \qquad (10)$$

من قبل أويلر وتمّ تبسيطه من قبل بيينيه.[4]

تعريف 5:

نسمّي الحلول الآتية للمعادلة (10) حلولاً مبتذلة:

$$\bullet x=-z\,,y=t \quad , \quad \bullet y=-z\,,x=t \quad , \quad \bullet x=-y\,,z=t$$

مثال2: الرباعيات $(1,3,-1,3),(2,-2,3,3)$ رباعيات فيرماويّة مبتذلة.

مبرهنة2: $[4]$

إنّ الحلول العامّة غير المبتذلة للمعادلة (10) تعطى بالعلاقات:

$$\begin{aligned}
x &= \lambda\left\{1-(a-3b)\left(a^2+3b^2\right)\right\}\\
y &= \lambda\left\{(a+3b)\left(a^2+3b^2\right)-1\right\}\\
z &= \lambda\left\{\left(a^2+3b^2\right)^2-(a+3b)\right\}\\
t &= \lambda\left\{\left(a^2+3b^2\right)^2-(a-3b)\right\}
\end{aligned} \qquad (11)$$

حيث λ,a,b أعداد عاديّة، بحيث $\lambda \neq 0$.

وتُعتبر مسألة إيجاد حلول صحيحة للمعادلة (10) أكثر صعوبة، إنّ القيم الصّحيحة لـ a,b و λ في المبرهنة 2 تُعطي حلول صحيحة، ولكنّ لا يوجد تطبيق عكسي، فعلى سبيل المثال: إنّ الرباعيّة الفيرماويّة $(1,12,-9,10)$ تُقابلها القيم:

$$a=\frac{10}{19},\ b=-\frac{7}{9},\ \lambda=-\frac{361}{42}$$

من جهة أخرى فإنّ الرباعيّة $(9,15,12,18)$ تقابل القيم $a=b=\lambda=1$.

نتيجة4:

يمكن توليد رباعيّات فيثاغوريّة في $\mathbb{Z}[i]$، في ضوء المبرهنة 2 من خلال استخدام العلاقات (11) ولكن بجعل $\lambda=1$ و $a,b \in \mathbb{Z}[i]$ كوننا لا نهتم بالحالة العكسيّة.

أي أنّه بفرض $a,b \in \mathbb{Z}[i]$ فإنّ الرباعيّة (z_1,z_2,z_3,z_4) فيرماويّة في $\mathbb{Z}[i]$ حيث:

$$\begin{aligned} z_1 &= 1-(a-3b)(a^2+3b^2) \quad , \quad z_3 = (a^2+3b^2)^2-(a+3b) \\ z_2 &= (a+3b)(a^2+3b^2)-1 \quad , \quad z_4 = (a^2+3b^2)^2-(a-3b) \end{aligned} \tag{12}$$

مثال3:

باستخدام العلاقات (12) يمكن توليد رباعيّات فيرماوية بإعطاء قيم لـ a,b. في الجدول أدناه أمثلة لذلك:

$a=i$ $b=1+i$	$(-14+16i \ , -28+14i \ , -38-16i \ , -32-10i)$
$a=1-i$ $b=1+2i$	$(-87-43i \ , -87-5i \ , -23-185i \ , -17-173i)$
$a=1$ $b=i$	$(3-6i \ , -3-6i \ , 3-3i \ , 3+3i)$

قدّم رامنيوجان حل آخر للمعادلة (10) كتوليد حلول لها، وليس كل الحلول، وذلك من خلال المبرهنة الآتية:

مبرهنة3: $[4]$

بفرض $a,b \in \mathbb{Z}$ فإنّ الرباعيّة (x,y,z,t) المعرّفة فيما يأتي حل للمعادلة (10):

$$\begin{aligned} x &= 3a^2+5ab-5b^2 \quad , \quad z = 5a^2-5ab-3b^2 \\ y &= 4a^2-4ab+6b^2 \quad , \quad t = 6a^2-4ab+4b^2 \end{aligned} \tag{13}$$

نتيجة5:

يمكن استخدام العلاقات (13) لتوليد رباعيّات فيرماويّة في $\mathbb{Z}[i]$، وذلك بأخذ a,b من $\mathbb{Z}[i]$.

مثال4:

باستخدام العلاقات (13) يمكن توليد رباعيّات فيرماوية بإعطاء قيم لـ a,b. في الجدول أدناه أمثلة لذلك:

$a=i$ $b=1+i$	$(-8-5i\ ,8i\ ,-11i\ ,-2+4i)$
$a=1-i$ $b=1+2i$	$(30-21i\ ,-30+12i\ ,-6-27i\ ,-24)$
$a=1$ $b=i$	$(8+5i\ ,-2-4i\ ,8-5i\ ,2-4i)$

مبرهنة4: $[5]$

إن جميع الحلول الصحيحة للمعادلة:

$$x_1^3+x_2^3+x_3^3+x_4^3=0\ ;\ (x_1,x_2,x_3,x_4)=1$$

تعطى من خلال العلاقة:

$$\begin{aligned}
dx_1&=\left(a^4+2a^3b+3a^2b^2+2ab^3+b^4\right)+(2a+b)c^3\\
dx_2&=-\left\{a^4+2a^3b+3a^2b^2+2ab^3+b^4-(a-b)c^3\right\}\\
dx_3&=c\left(-a^3+b^3+c^3\right)\\
dx_4&=-\left\{\left(2a^3+3a^2b+3ab^2+b^3\right)c+c^4\right\}
\end{aligned}\qquad(14)$$

حيث a,b,c ثلاثة أعداد صحيحة، و $d\neq 0$ عدد صحيح يتم اختياره بحيث يكون:

$$(x_1,x_2,x_3,x_4)=1$$

نتيجة6:

يمكن توليد رباعيّات فيثاغوريّة في $\mathbb{Z}[i]$، في ضوء المبرهنة 4 من خلال استخدام العلاقات (14) ولكن بجعل $d=1$ و $a,b,c\in\mathbb{Z}[i]$ كوننا لا نهتم بالحالة العكسيّة، أو بكون الرباعيّة فيرماويّة. أي أنّه بفرض $a,b\in\mathbb{Z}[i]$ فإنّ الرباعيّة (z_1,z_2,z_3,z_4) فيرماويّة في $\mathbb{Z}[i]$ حيث:

$$\begin{aligned} z_1&=\left(a^4+2a^3b+3a^2b^2+2ab^3+b^4\right)+(2a+b)c^3\\ z_2&=(a-b)c^3-\left(a^4+2a^3b+3a^2b^2+2ab^3+b^4\right)\\ z_3&=c\left(-a^3+b^3+c^3\right)\\ z_4&=\left(2a^3+3a^2b+3ab^2+b^3\right)c+c^4\end{aligned}\qquad(15)$$

مثال5:

باستخدام العلاقات (15) يمكن توليد رباعيّات فيرماوية بإعطاء قيم لـ a,b. في الجدول أدناه أمثلة لذلك:

$a=i$ $b=1+i$ $c=1-i$	$(-1-20i\ ,\ 7+14i\ ,\ -3+5i\ ,\ -18+8i)$
$a=2$ $b=1-2i$ $c=2+i$	$(-23+3i\ ,\ 35+63i\ ,\ -47+9i\ ,\ 37-69i)$

مبرهنة5: $[5]$

إنّ جميع الحلول الصّحيحة الموجبة للمعادلة:

$$x^3+y^3+z^3=t^3\quad ;(x,y,z,t)=1$$

تعطى من خلال العلاقة:

$$\begin{aligned} dx &= c\left(-a^3-b^3+c^3\right) \\ dy &= -a^4+2a^3b-3a^2b^2+2ab^3-b^4+\left(a+b\right)c^3 \\ dz &= a^4-2a^3b+3a^2b^2-2ab^3+b^4+\left(2a-b\right)c^3 \\ dt &= c\left\{a^3+\left(a-b\right)^3+c^3\right\} \end{aligned} \qquad (16)$$

حيث a,b,c ثلاثة أعداد صحيحة موجبة، و $a>b$، و $c>\sqrt[3]{a^3+b^3}$ و $d\neq 0$ عدد صحيح يتم اختياره بحيث يكون: $\left(x_1,x_2,x_3,x_4\right)=1$.

نتيجة7:

يمكن توليد رباعيّات فيثاغوريّة في $\mathbb{Z}[i]$، في ضوء المبرهنة 5 من خلال استخدام العلاقات (16) ولكن بجعل $d=1$ و $a,b,c\in\mathbb{Z}[i]$ وبغضّ النظر عن الشروط المقيّدة لـ a,b,c كوننا لا نهتم بالحالة العكسيّة، أو بكون الرباعيّة فيرماويّة أوليّة، وبغضّ النظر عن الإشارة.

أي أنّه بفرض $a,b\in\mathbb{Z}[i]$ فإنّ الرباعيّة $\left(z_1,z_2,z_3,z_4\right)$ فيرماويّة في $\mathbb{Z}[i]$ حيث:

$$\begin{aligned} z_1 &= c\left(-a^3-b^3+c^3\right) \\ z_2 &= -a^4+2a^3b-3a^2b^2+2ab^3-b^4+\left(a+b\right)c^3 \\ z_3 &= a^4-2a^3b+3a^2b^2-2ab^3+b^4+\left(2a-b\right)c^3 \\ z_4 &= c\left\{a^3+\left(a-b\right)^3+c^3\right\} \end{aligned} \qquad (17)$$

مثال6:

باستخدام العلاقات (17) يمكن توليد رباعيّات فيرماوية بإعطاء قيم لـ a,b. في الجدول أدناه أمثلة لذلك:

$a=i$ $b=1+i$ $c=1-i$	$(-3-3i\ ,\ 3-6i\ ,\ 3\ ,\ -6)$
$a=2$ $b=1-2i$ $c=2+i$	$(1+23i\ ,\ 27+29i\ ,\ -15+37i\ ,\ -11+17i)$

مبرهنة 6: $[6]$

بفرض $a,b\in\mathbb{Z}$ فإنّ الرباعيّة (x,y,z,t) المعرّفة فيما يأتي حل للمعادلة (10):

$$\begin{aligned} x&=a^4-2ab^3 \quad , \quad z=2a^3b-b^4 \\ y&=a^3b+b^4 \quad , \quad t=a^4+ab^3 \end{aligned} \tag{18}$$

نتيجة8:

يمكن استخدام العلاقات (18) لتوليد رباعيّات فيرماويّة في $\mathbb{Z}[i]$، وذلك بأخذ a,b من $\mathbb{Z}[i]$.■

تُعتبر العلاقات (18) الأبسط في توليد رباعيّات فيرماويّة.

مثال7:

باستخدام العلاقات (18) يمكن توليد رباعيّات فيرماوية بإعطاء قيم لـ a,b. في الجدول أدناه أمثلة لذلك:

$a=i$ $b=1$	$(1-2i\ ,1-i\ ,-1-2i\ ,1+i)$
$a=1-i$ $b=1+2i$	$(22-18i\ ,-5-30i\ ,11+12i\ ,-17+9i)$

ملاحظة 2:

كما أوضحنا أنّ العلاقات (12)، (13)، (15)، (17)، (18) تولّد رباعيّات فيرماويّة في $\mathbb{Z}[i]$ إذا كانت الوسطاء أعداد غاوص صحيحة. ويمكن استخدام هذه العلاقات لاشتقاق مولّدات أخرى لرباعيّات فيرماويّة، بأن نجعل الوسطاء في كل منها غير مستقلّة.

لتوضيح الأمر لنأخذ على سبيل المثال العلاقات (18) التي تتبع لوسيطين مستقلّين a,b، فإذا اخترنا $b=2a+i$ لحصلنا على العلاقات:

$$\begin{aligned}x&=\left(12a^2-15a^4\right)+\left(2a-24a^3\right)i\\y&=\left(18a^4-24a^2+1\right)+\left(33a^3-8a\right)i\\z&=\left(24a^2-12a^4-1\right)+\left(8a-30a^3\right)i\\t&=\left(9a^4-6a^2\right)+\left(12a^3-a\right)i\end{aligned}\qquad(19)$$

مثال8:

من أجل $a=1$ نحصل على الرباعيّة الفيرماويّة:

$$(-3-22i\,,\ -5+25i\,,\ 11-22i\,,\ 3+11i).$$

ومن أجل $a=i$ نحصل على الرباعيّة الفيرماويّة:

$$(-53,\ 84,\ -75,\ 28).$$

4- النتائج:

توصّلنا إلى صحّة ما يأتي:

أوّلاً: بفرض أنّ (a,b,c,d) رباعيّة فيثاغوريّة في ، وكانت p,q كثيرتي حدود، فإذا كان k عدداً صحيحاً، فإنّ الرباعيّة الآتية:

$$\left(p(k)a+iq(k)a\ ,\ p(k)b+iq(k)b\ ,\ p(k)c+iq(k)c\ ,\ p(k)d+iq(k)d\right)$$

فيرماويّة في $[i]$.

ثانياً: أثبتنا صحّة المبرهنة الآتية:

بفرض أنّ (z_1,z_2,z_3,z_4) رباعيّة فيرماويّة في $[i]$، وبفرض أنّ (x_1,x_2,x_3,x_4) فيرماويّة في . إذا كانت:

$$(y_i,y_j,y_k)=k\,(x_i,x_j,x_k)$$

حيث $k\in$ و $i,j,k\in\{1,2,3,4\}$ بحيث $i<j<k$.

عندئذٍ فإنّ: $x_\ell=y_\ell$ حيث: $\ell\in\{1,2,3,4\}\setminus\{i,j,k\}$

ثالثاً: قمنا باستخدام حلول معادلة ديوفانتس $x^3+y^3+z^3=t^3$ في لتوليد رباعيّات فيرماويّة في $[i]$ وذلك باستخدام العلاقات:

$$(19),(18),(17),(15),(13),(12)$$

5- الاستنتاجات والتّوصيات.

من خلال فقرة توليد الرباعيّات الفيرماويّة في $[i]$، الحلول الكاملة لمعادلة ديوفانتس:

$$z_1^3+z_2^3+z_3^3=z_4^3$$

في مجموعة أعداد غاوص الصّحيحة $[i]$. أي إيجاد توليد لكل الرباعيّات الفيرماويّة بحيث تكون المسألة العكسيّة ممكنة.

6. المراجع

1. Fermat,s Last Theorem for Amateurs, P. Ribenboim. Springer (1999), 16-17
2. Modular elliptic curves and Fermat's Last Theorem, A. J. Wiles. Annals of Mathematics, 141 (1995), 443-551
3. The Gaussian integers, K. Conrad, Accessed, May, (2016)
4. An introduction to the theory of numbers, Fifth edition, G.H. Hardy and E.M. Wright, Oxford University Press, London, (1979), 199 - 200
5. On Equal Sums of Cubes, A. Choudhry, R. Mountain, Journal Of Mathematics ,Volume 28, Number 4, (1998)
6. Introduction to number theory, Hua Loo Keng, Springer-Verlag, Berlin, (1982), 290