العــــوادم المـــرافقـــة والحـــدود المبـــاشـــرة

إيمان الخوجة[1] حمزة حاكمي[2] هلا حسن مستو[3]

الملخص

نعلم أن المودولات الجزئية لمودول ما تلعب دوراً مهماً في دراسة المودول ذاته ومعرفة بعضاً من خصائصه وخصائص حلقة الإندومورفيزمات له. في هذه الورقة العلمية درسنا الدور الذي تلعبه العوادم والعوادم المرافقة للمودولات الجزئية لمودول ما وذلك عندما تكون حدوداً مباشرةً. حيث أثبتنا أن حلقة الإندومورفيزمات لمودول ما تكون منتظمة عندما وفقط عندما يكون عادم النواة لأي تشاكل لهذا المودول والعادم المرافق للصورة المباشرة لأي تشاكل لهذا المودول حدوداً مباشرة في حلقة الإندومورفيزمات.

كما أثبتنا أن حلقة الإندومورفيزمات لمودول ما تكون شبه جامدة وأن أساس جاكبسون لها يساوي الصفر عندما وفقط عندما يكون عادم النواة لأي تشاكل لهذا المودول والعادم المرافق للصورة المباشرة لأي تشاكل لهذا المودول تحوي حدوداً مباشرة في حلقة الإندومورفيزمات.

إضافة لذلك، أثبتنا أن حلقة الإندومورفيزمات لمودول نصف إسقاطي تكون منتظمة عندما وفقط عندما يكون العادم المرافق للصورة المباشرة لأي تشاكل لهذا المودول حداً مباشراً في حلقة الإندومورفيزمات. كما أن حلقة الإندومورفيزمات لمودول نصف أفقي تكون منتظمة عندما وفقط عندما يكون العادم لنواة أي تشاكل لهذا المودول حداً مباشراً في حلقة الإندومورفيزمات.

الكلمات المفتاحية. الحلقة المنتظمة، الحلقة شبه الجامدة، العادم، العادم المرافق، المودول نصف الإسقاطي (نصف الأفقي).

رقم التصنيف العالمي للعام 2020: 16D10, 16D40, 16D80, 16D99.

---

[1] أستاذ مساعد قسم الرياضيات كلية العلوم جامعة البعث.

[2] أستاذ قسم الرياضيات كلية العلوم جامعة دمشق.

[3] طالب دراسات عليا فسم الرياضيات كلية العلوم جامعة البعث.

A DUAL AHHILILATORS AND DIRECT SUMMANDS

Eaman Al-Khouja[1] **Hamza Hakmi**[2] **Halla Hassan Msto**[3]

Abstract

The submodules of some module played an important role in studying the module itself and knowing some of its properties and the properties of its endomorphism ring.

In this scientific paper we study the role which play the annihilator and dual annihilator of submodules of some module, that when there are direct summands.

We proved the endomorphism ring of some module is regular if and only if the annihilator of the kernel and the dual annihilator of image every endomorphism of this module, are direct summands in it.

Also, we proved that the endomorphism ring of some module is semi-potent with zero Jacobson radical if and only if the annihilator of kernel and the dual annihilator of image every endomorphism contains direct summands of it is.

Furthermore, we proved that the endomorphism ring of semi-projective module is regular if and only if the dual annihilator of image every endomorphism is direct summands in it.

In addition to that, we proved that the endomorphism ring of semi-injective module is regular if and only if the annihilator of kernel every endomorphism is direct summands in it.

Key Words: Regular ring, Semi-potent ring, Annihilator, Dual annihilator, Semi-projective module, Semi-injective module.

2020 **Mathematical Subject Classification:** 16D10,16D40,16D80,16D99.

[1] Professor, Department of Mathematics Al-Baath University.
[2] Professor, Department of Mathematics Damascus University.
[3] Department of Mathematics Al-Baath University.

المقـــــدمــــة.

منذ ظهور مفهوم المودول لعبت المودولات الجزئية فيه دوراً مهماً في تحديد طبيعة وخواص هذا المودول. فضلاً عن ذلك، إن لبعض المودولات الجزئية لمودول ما دوراً كبيراً في تحديد طبيعة وخصائص حلقة الإندومورفيزمات لهذا المودول.

فعلى سبيل المثال، إذا كانت جميع المودولات الجزئية لمودول ما حدوداً مباشرة، فإن هذا المودول يكون نصف بسيط وتكون حلقة الإندومورفيزمات له منتظمة، [1]. أيضاً إذا كانت (المودولات الجزئية) الصورة المباشرة والنواة لأي تشاكل لمودول ما، حدوداً مباشرة فإن حلقة الإندومورفيزمات لهذا المودول تكون منتظمة، [3]. كذلك إذا كانت (المودولات الجزئية) الصورة المباشرة والنواة لأي تشاكل لمودول ما، تحوي حداً مباشراً فإن حلقة الإندومورفيزمات لهذا المودول تكون شبه جامدة وأساس جاكبسون لها معدوم، [5].

في هذه الورقة العلمية درسنا تأثير العوادم والعوادم المرافقة للمودولات الجزئية لمودول ما في حلقة الإندومورفيزمات لمودول ما وذلك عندما تكون هذه العوادم ومرافقاتها حدوداً مباشرة. وقد تبين لنا أن العوادم والعوادم المرافقة للمودولات الجزئية لمودول ما لها ذات التأثير الذي تقوم به المودولات الجزئية وذلك في حالة كون المودولات الجزئية حدوداً مباشرة أو تحوي حدوداً مباشرة مغايرة للصفر أو تكون محتواه في حدود مباشرة تختلف عن المودول ذاته.

فعلى سبيل المثال، أثبتنا أن حلقة الإندومورفيزمات لمودول ما تكون منتظمة عندما وفقط عندما يكون عادم النواة لأي تشاكل لهذا المودول والعادم المرافق للصورة المباشرة لأي تشاكل لهذا المودول حدوداً مباشرة في حلقة الإندومورفيزمات.

فضلاً عن ذلك، أوجدنا عدداً من الشروط اللازمة والكافية كي تكون حلقة الإندومورفيزمات لمودول ما منتظمة، شبه جامدة من خلال العوادم والعوادم المرافقة لبعض المودولات الجزئية للمودول.

الهــدف مــن البحــــث.

نعلم أن المودولات الجزئية لمودول ما تلعب دوراً مهماً في دراسة المودول ذاته. إن الهدف من هذا البحث هو معرفة الدور الذي تلعبه العوادم والعوادم المرافقة للمودولات الجزئية لمودول ما. وقد تبين لنا أن العوادم والعوادم المرافقة للمودولات الجزئية لمودول ما لها ذات التأثير الذي تقوم به المودولات الجزئية وذلك في حالة كون المودولات الجزئية حدوداً مباشرة أو تحوي حدوداً مباشرة مغايرة للصفر أو تكون محتواة في حدود مباشرة تختلف عن المودول ذاته.

1 – الــدراســـــة المــرجعيـــــة.

جميع الحلقات R التي سندرسها هي حلقات واحدية فيها $0 \neq 1$ والمودولات فوق هذه الحلقات هي مودولات يمينية لأجل أي مودول M فوق R سنرمز لحلقة الإندومورفيزمات للمودول M بالشكل $S = End_R(M)$.

1–1. نسمي تقاطع جميع المثاليات اليسارية (اليمينية) الأعظمية في الحلقة R بأساس جاكبسون للحلقة R ونرمز له $J(R)$، [8].

1–2. نقول عن الحلقة R إنها منتظمة إذا كان لأجل كل عنصر $a \in R$ يوجد عنصر $b \in R$ يحقق $a = aba$، [3].

1–3. نقول عن الحلقة R إنها شبه جامدة إذا كان كل عنصر $a \in R$، $a \notin J(R)$، يوجد عنصر مغاير للصفر $b \in R$ يحقق $b = bab$، [5].

1–4. لتكن R حلقة. نقول عن العنصر $e \in R$ إنه جامد إذا كان $e^2 = e$، [1].

1–5. ليكن M مودولاً و U مودولاً جزئياً في M. إن المجموعة:

$$\ell_S(U) = \{\alpha : \alpha \in S; \alpha(U) = 0\}$$

تشكل مثالياً يسارياً في الحلقة S يسمى العادم للمودول الجزئي U في S، [1].

1–6. ليكن M مودولاً و U مودولاً جزئياً في M. إن المجموعة:

$$D_S(U) = \{\alpha : \alpha \in S; \alpha(M) \subseteq U\}$$

تشكل مثالياً يمينياً في الحلقة S يسمى العادم المرافق للمودول الجزئي U في S، [4].

1−7. ليكن M مودولاً فوق حلقة R و $S = End_R(M)$. نقول عن المودول M إنه نصف إسقاطي إذا كان لأجل $g \in S$ فإن $hom_R(M, Im(g)) = gS$، [9].

1−9. ليكن M مودولاً فوق حلقة R و $S = End_R(M)$. نقول عن المودول M إنه نصف أفقي إذا كان لأجل $g \in S$ فإن $\ell_S(Ker(g)) = Sg$، [2].

تمهيدية 1−1 [1].

ليكن M مودولاً فوق حلقة R و X, Y مودولين جزئيين في M و $S = End_R(M)$.
عندئذ القضايا الآتية صحيحة:

1 − إذا كان $X \subseteq Y$ فإن $\ell_S(Y) \subseteq \ell_S(X)$.

2 − $\ell_S(X+Y) = \ell_S(X) \cap \ell_S(Y)$ وأن $\ell_S(X) + \ell_S(Y) \subseteq \ell_S(X \cap Y)$.

3 − $\ell_S(X) \cap \ell_S(Y) \subseteq \ell_S(X \cap Y)$.

تمهيدية 1−2 [4].

ليكن M مودولاً فوق حلقة R و X, Y مودولين جزئيين في M و $S = End_R(M)$.
عندئذ القضايا الآتية صحيحة:

1− إذا كان $X \subseteq Y$ فإن $D_S(X) \subseteq D_S(Y)$.

2− $D_S(X \cap Y) = D_S(X) \cap D_S(Y)$ وأن $D_S(X) \cap D_S(Y) \subseteq D_S(X+Y)$.

3− $D_S(X) + D_S(Y) \subseteq D_S(X+Y)$.

مبرهنة 1−3 [7].

ليكن M_R مودولاً وليكن $\alpha \in S = End_R(M)$. عندئذ الشرطان الآتيان متكافئان:

1 − يوجد $\beta \in S$ بحيث يكون $\alpha = \alpha\beta\alpha$.

2 − كل من $Im(\alpha),\ Ker(\alpha)$ هو حد مباشر في M.

مبرهنـــــة 1-4 [6].

ليكن M مودولاً فوق حلقة R وأن $S = End_R(M)$. عندئذ أياً كان $\alpha, \beta \in S$ فإن القضيتين الآتيتين صحيحتان:

1 - $Im(\alpha - \alpha\beta\alpha) = Im(\alpha) \cap Im(1_N - \alpha\beta)$.

2 - $Ker(\alpha - \alpha\beta\alpha) = Ker(\alpha) + Ker(1_M - \beta\alpha)$.

2 – الـدراســـــة البحثيـــــــة.

تمهيديـــــة 2-1.

لـيكن M مـودولاً فـوق حلقـة R و $S = End_R(M)$. إذا كانـت الحلقـة S منتظمـة، عندئذ أياً كان $g \in S$ فإن كلاً من $D_S(Im(g))$ و $\ell_S(Ker(g))$ حد مباشر في S.

البرهـــــان.

لنفرض أن الحلقة S منتظمة وليكن $g \in S$، عندئذ يوجد $h \in S$ بحيث $g = ghg$.

لنضع $e = gh$ و $e' = hg$ فنجد أن $e, e' \in S$ عناصر جامدة في S وبحسب التمهيدية (1-2) نجد أن:

$$D_S(Im(g)) = D_S(Im(ghg)) \subseteq D_S(Im(gh)) = D_S(Im(e))$$

$$D_S(Im(e)) = D_S(Im(gh)) \subseteq D_S(Im(g))$$

ومنه نجد أن $D_S(Im(g)) = D_S(Im(e)) = eS$، أي إن $D_S(Im(g))$ حد مباشر في S. من جهة أخرى، لما كان $Ker(hg) \subseteq Ker(ghg)$ فإنه بحسب التمهيدية (1-2) نجد أن:

$$\ell_S(Ker(g)) = \ell_S(Ker(ghg)) \subseteq \ell_S(Ker(hg)) = \ell_S(Ker(e'))$$

ولما كان $Ker(g) \subseteq Ker(hg)$ نجد أن:

$$\ell_S(Ker(e')) = \ell_S(Ker(hg)) \subseteq \ell_S(Ker(g))$$

ومنه نجد أن $\ell_S(Ker(e')) = \ell_S(Ker(e))$ وبالتالي فإن:

$$\ell_S(Ker(g)) = \ell_S(Ker(e')) = Se'$$

أي إن $\ell_S(Kerg)$ حد مباشر في S.

مبرهنـــــة 2-2.

ليكن M مودولاً فوق حلقة R و $S = End_R(M)$. عندئذ الشرطان الآتيان متكافئان:

1 - الحلقة S منتظمة.

2 - أياً كان $g \in S$ فإن كلاً من $D_S(Im(g))$ و $\ell_S(Ker(g))$ حد مباشر في S.

البرهـــــان.

$(1) \Leftarrow (2)$. ينتج مباشرة من التمهيدية $(2-1)$.

$(2) \Leftarrow (1)$. ليكن $g \in S$ ولنفرض أن كلاً من $D_S(Im(g))$ و $\ell_S(Ker(g))$ حد مباشر في S، عندئذ يوجد عنصران جامدان $e, e' \in S$ بحيث $D_S(Im(g)) = eS$ وأن $\ell_S(Ker(g)) = Se'$. لما كان $D_S(Im(g)) = eS$ نجد أن $e \in D_S(Im(g))$ ومنه فإن $Im(e) \subseteq Im(g)$. أيضاً لما كان $g \in D_S(Im(g))$ نجد أن $g \in eS$ وبالتالي يوجد $\alpha \in S$ بحيث $g = e\alpha$ ومنه $Im(g) \subseteq Im(e)$ وهكذا فإن $Im(g) = Im(e)$، أي إن $Im(g)$ حد مباشر في M. أيضاً لما كان $\ell_S(Ker(g)) = Se'$ نجد أن $e' \in \ell_S(Ker(g))$ ومنه $e'(Ker(g)) = 0$ وبالتالي يكون $Ker(g) \subseteq Ker(e')$. أيضاً لما كان $g \in \ell_S(Ker(g))$ نجد أن $g \in Se'$ وبالتالي يوجد $\beta \in S$ بحيث إن $g = \beta e'$ ومنه فإن $Ker(e') \subseteq Ker(g)$ وهذا يبين أن $Ker(g) = Ker(e')$ أي إن $Ker(g)$ حد مباشر في M. مما سبق وبحسب المبرهنة $(1-3)$ نجد أن الحلقة S منتظمة.

تمهيديـــــة 2-3.

ليكن M مودولاً فوق حلقة R و $S = End_R(M)$. إذا كانت الحلقة S شبه جامدة، عندئذ لأجل كل $g \in S$ بحيث إن $g \notin J(S)$ فإن كل من $D_S(Im(g))$ و $\ell_S(Ker(g))$ يحوي حداً مباشراً للحلقة S.

البرهـــــان.

لنفرض أن الحلقة S شبه جامدة وليكن $g \in S$ بحيث $g \notin J(S)$، عندئذ يوجد عنصر مغاير للصفر $f \in S$ بحيث $f = fgf$. لنضع $e = gf$ و $e' = fg$ فنجد أن $e, e' \in S$ عنصران جامدان مغايران للصفر في S ولما كان $Im(e) \subseteq Im(g)$ فإنه بحسب

التمهيدية$(2-1)$ نجد أن $D_S(Im(e)) \subseteq D_S(Im(g))$ ومنه فإن $D_S(Im(e)) = eS$ وبالتالي فإن $eS \subseteq D_S(Im(g))$، أي إن $D_S(Im(g))$ يحوي حداً مباشراً للحلقة S.

أيضاً لما كان $Ker(g) \subseteq Ker(e')$ نجد بحسب التمهيدية $(1-1)$ أن:

$$\ell_S(Ker(e')) \subseteq \ell_S(Ker(g))$$

ولما كان $\ell_S(Ker(e')) = Se'$ نجد أن $Se' \subseteq \ell_S(Ker(g))$، أي إن $\ell_S(Ker(g))$ يحوي حداً مباشراً للحلقة S.

مبرهنـــــة 2-4.

ليكن M مودولاً فوق حلقة R و $S = End_R(M)$. عندئذ الشروط الآتية متكافئة:

1 - الحلقة S شبه جامدة.

2 - أياً كان $g \in S$ بحيث $g \notin J(S)$ يوجد عنصر مغاير للصفر $\lambda \in S$ بحيث إن كلاً من $D_S(Im(\lambda g))$ و $\ell_S(Ker(\lambda g))$ هو حد مباشر في S.

3 - أياً كان $g \in S$ بحيث $g \notin J(S)$ يوجد عنصر مغاير للصفر $\mu \in S$ بحيث إن كلاً من $D_S(Im(g\mu))$ و $\ell_S(Ker(g\mu))$ هو حد مباشر في S.

البرهـــــان.

$(1) \Leftarrow (2)$. لنفرض أن الحلقة S شبه جامدة وليكن $g \in S$ بحيث $g \notin J(S)$، عندئذ يوجد عنصر مغاير للصفر $\lambda \in S$ بحيث $\lambda = \lambda g \lambda$. لنضع $e = \lambda g$ فنجد أن $e \in S$ عنصر جامد مغاير للصفر في S وأن $\ell_S(Ker(\lambda g)) = \ell_S(Ker(e))$ ولما كان $\ell_S(Ker(e)) = Se$، نجد أن $\ell_S(Ker(\lambda g))$ حد مباشر في S. كما أن:

$$D_S(Im(\lambda g)) = D_S(Im(e))$$

ولما كان $D_S(Im(e)) = eS$ نجد أن $D_S(Im(\lambda g))$ حد مباشر في S.

$(2) \Leftarrow (1)$. ليكن $g \in S$ بحيث $g \notin J(S)$، عندئذ بحسب الفرض يوجد عنصر مغاير للصفر $\lambda \in S$ بحيث إن كلاً من $D_S(Im(\lambda g))$و $\ell_S(Ker(\lambda g))$ حد مباشر في S. ومنه يوجد عنصران جامدان مغايران للصفر $e, e' \in S$بحيث إن $D_S(Im(\lambda g)) = e'S$ وأن $\ell_S(Ker(\lambda g)) = Se$. لما كان $\ell_S(Ker(e)) = Se$ نجد $e \in \ell_S(Ker(\lambda g))$

ومنه فإن $e(Ker(\lambda g))=0$ وبالتالي فإن $Ker(\lambda g)\subseteq Ker(e)$. فضلاً عن ذلك، لما كان $\lambda g\in \ell_S(Ker(\lambda g))$ فإنه يوجد $\alpha\in S$ بحيث $\lambda g=\alpha e$ ومنه فإن:

$$Ker(\lambda g)=Ker(e)$$

أي إن $Ker(\lambda g)$ حد مباشر في M. أيضاً لما كان $D_S(Im(\lambda g))=e'S$ نجد أن $e'\in D_S(Im(\lambda g))$ ومنه فإن $Im(e)\subseteq Im(\lambda g)$. فضلاً عن ذلك، لما كان $\lambda g\in D_S(Im(\lambda g))$ يوجد $\beta\in S$ بحيث $\lambda g=e'\beta$ ومنه $Im(\lambda g)\subseteq Im(e')$ وهكذا نجد $Im(\lambda g)=Im(e')$، أي إن $Im(\lambda g)$ حد مباشر في M وبحسب المبرهنة (3−1) فإنه يوجد $f\in S$ بحيث إن $\lambda g=(\lambda g)f(\lambda g)$. لنضع $h=f(\lambda g)f$ فنجد أن $h\in S$ وأن $hgh=(f\lambda gf)g(f\lambda gf)=f(\lambda gf\lambda g)f=f\lambda gf=h$ ومنه نجد أن الحلقة S شبه جامدة. $(1)\Leftrightarrow(3)$. يبرهن بطريقة مشابهة.

مبرهنـــــة 2-5.

ليكن M مودولاً فوق حلقة R و $S=End_R(M)$. عندئذ الشروط الآتية متكافئة:

1 − الحلقة S شبه جامدة.

2 − لأجل كل $\alpha\in S$ بحيث إن $\alpha\notin J(S)$ يوجد عنصر مغاير للصفر $\beta\in S$ يحقق أن $D_S(Im(\beta))\cap D_S(Im(1-\beta\alpha))=0$.

3 − لأجل كل $\alpha\in S$ بحيث إن $\alpha\notin J(S)$ يوجد عنصر مغاير للصفر $\beta\in S$ يحقق أن $\ell_S(Ker(\beta))\cap \ell_S(Ker(1-\alpha\beta))=0$.

البرهـــــان.

$(1)\Rightarrow(2)$. لنفرض أن الحلقة S شبه جامدة وليكن $\alpha\in S$ بحيث إن $\alpha\notin J(S)$، عندئذ يوجد عنصر مغاير للصفر $\beta\in S$ يحقق أن $\beta=\beta\alpha\beta$. وبحسب المبرهنة (1−4) يكون لدينا $Im(\beta)\cap Im(1-\beta\alpha)=Im(\beta-\beta\alpha\beta)$. ولما كان $\beta=\beta\alpha\beta$ نجد أن $Im(\beta)\cap Im(1-\beta\alpha)=0$. وبحسب التمهيدية (2−1) نجد أن:

$$D_S(Im(\beta))\cap D_S(Im(1-\beta\alpha))=$$
$$=D_S(Im(\beta)\cap Im(1-\beta\alpha))=D_S(0)=0$$

$(2)\Leftarrow(1)$. ليكن $\alpha \in S$ بحيث إن $\alpha \notin J(S)$، عندئذ يوجد عنصر مغاير للصفر $\beta \in S$ يحقق أن $D_S(Im(\beta)) \cap D_S(Im(1-\beta\alpha)) = 0$

وبحسب التمهيدية $(2-1)$ نجد أن:

$$D_S(Im(\beta) \cap Im(1-\beta\alpha)) =$$
$$= D_S(Im(\beta)) \cap D_S(Im(1-\beta\alpha)) = 0$$

وبالتالي يكون $D_S(Im(\beta) \cap Im(1-\beta\alpha)) = 0$. وبحسب المبرهنة $(4-1)$ نجد أن:

$$Im(\beta) \cap Im(1-\beta\alpha) = Im(\beta - \beta\alpha\beta)$$

ومنه فإن $D_S(Im(\beta - \beta\alpha\beta)) = 0$ ولما كان $\beta - \beta\alpha\beta \in D_S(Im(\beta - \beta\alpha\beta))$ نجد أن $\beta - \beta\alpha\beta = 0$ ومنه فإن $\beta = \beta\alpha\beta$ وهذا يبين أن الحلقة S شبه جامدة.

$(1)\Leftarrow(3)$. لنفرض أن الحلقة S شبه جامدة وليكن $\alpha \in S$ بحيث إن $\alpha \notin J(S)$، عندئذ يوجد عنصر مغاير للصفر $\beta \in S$ يحقق أن $\beta = \beta\alpha\beta$. وبحسب المبرهنة $(1-4)$ يكون لدينا $Ker(\beta - \beta\alpha\beta) = Ker(\beta) + Ker(1-\alpha\beta)$ ولما كان $\beta = \beta\alpha\beta$ نجد أن $Ker(\beta) + Ker(1-\alpha\beta) = Ker(0) = M$ ومنه يكون:

$$\ell_S(Ker(\beta) + Ker(1-\alpha\beta)) = \ell_S(M)$$

ويحسب التمهيدية $(1-1)$ نجد أن $\ell_S(Ker(\beta)) \cap \ell_S(Ker(1-\alpha\beta)) = 0$.

$(3)\Leftarrow(1)$. ليكن $\alpha \in S$ بحيث إن $\alpha \notin J(S)$، عندئذ بحسب الفرض يوجد عنصر مغاير للصفر $\beta \in S$ يحقق أن $\ell_S(Ker(\beta)) \cap \ell_S(Ker(1-\alpha\beta)) = 0$. وحسب التمهيدية $(1-1)$ نجد أن $\ell_S(Ker(\beta) \cap Ker(1-\alpha\beta)) = 0$ ولما كان حسب المبرهنة $(1-4)$ أن $Ker(\beta - \beta\alpha\beta) = Ker(\beta) + Ker(1-\alpha\beta)$ نجد أن $\ell_S(Ker(\beta - \beta\alpha\beta)) = 0$ ولما كان $\beta - \beta\alpha\beta \in \ell_S(Ker(\beta - \beta\alpha\beta))$ نجد $\beta - \beta\alpha\beta = 0$ ومنه فإن $\beta = \beta\alpha\beta$ وهذا يبين أن الحلقة S شبه جامدة.

مبرهنـــــة 2-6.

ليكن M مودولاً فوق حلقة R و $S = End_R(M)$. عندئذ الشروط الآتية متكافئة:

1 − الحلقة S شبه جامدة.

2 − لأجـل كـل $\alpha \in S$ بحيـث إن $\alpha \notin J(S)$ بوجـد $\beta \in S$ وأن $\beta \neq 0$ يحقـق أن $D_S(Im(1-\alpha\beta))$ حد مباشر في S.

3 − لأجـل كـل $\alpha \in S$ بحيـث إن $\alpha \notin J(S)$ بوجـد $\gamma \in S$ وأن $\gamma \neq 0$ يحقـق أن $D_S(Im(1-\gamma\alpha))$ حد مباشر في S.

البرهـــــان.

$(1) \Rightarrow (2)$. لنفـرض أن الحلقـة S شـبه جامـدة ولـيكن $\alpha \in S$ بحيـث إن $\alpha \notin J(S)$، عندئذ يوجد عنصر مغاير للصفر $\beta \in S$ يحقق أن $\beta = \beta\alpha\beta$. لنفرض أن $e = \alpha\beta$ فنجد أن $e \in S$ عنصر جامد مغاير للصفر، ومنه فإن $Im(1-\alpha\beta) = Im(1-e)$ حد مباشر للمودول M ومنه نجد أن:

$$D_S(Im(1-\alpha\beta)) = D_S(Im(1-e)) = (1-e)S$$

وهذا يبين أن $D_S(Im(1-\alpha\beta))$ حد مباشر في S.

$(2) \Rightarrow (1)$. ليكن $\alpha \in S$ بحيث إن $\alpha \notin J(S)$، عندئذ بحسب الفرض يوجد عنصر مغاير للصفر $\beta \in S$ يحقق أن $D_S(Im(1-\alpha\beta))$ حد مباشر فـي S. ومنـه يوجد عنصـر جامـد مغـاير للصـفر $e \in S$ بحيـث $D_S(Im(1-\alpha\beta)) = eS$. ولمـا كـان $1-\alpha\beta \in D_S(Im(1-\alpha\beta))$ نجـد أن $1-\alpha\beta \in eS$ وبالتـالي يوجـد $\lambda \in S$ بحيـث $1-\alpha\beta = e\lambda$ ومنــــه فــــإن $e(1-\alpha\beta) = e(e\lambda) = e\lambda = 1-\alpha\beta$ ومنــــه فــــإن $1-e = \alpha\beta - e\alpha\beta$، أي إن $1-e = \alpha\beta(1-e)$ ومنــــه $\beta(1-e) = \beta(1-e)\alpha\beta$ وأن $\beta(1-e) = \beta(1-e)\alpha\beta(1-e)$. لنضع $g = \beta(1-e)$ فنجد أن $g \in S$ عنصر مغاير للصفر وأن $g = g\alpha g$ وهذا يبين أن الحلقة S شبه جامدة.

$(1) \Leftrightarrow (3)$. يبرهن بطريقة مشابهة.

مبرهنـــــــة 2-7.

ليكن M مودولاً فوق حلقة R و $S = End_R(M)$. عندئذ الشروط الآتية متكافئة:

1 - الحلقة S شبه جامدة.

2 - لأجـل كـل $\alpha \in S$ بحيـث إن $\alpha \notin J(S)$ يوجـد $\beta \in S$ وأن $\beta \neq 0$ يحقـق أن $\ell_S(Ker(1-\alpha\beta))$ حد مباشر في S.

3 - لأجـل كـل $\alpha \in S$ بحيـث إن $\alpha \notin J(S)$ يوجـد $\gamma \in S$ وأن $\gamma \neq 0$ يحقـق أن $\ell_S(Ker(1-\gamma\alpha))$ حد مباشر في S.

البرهــــــان.

$(1) \Leftarrow (2)$. لنفـرض أن الحلقـة S شـبه جامـدة ولـيكن $\alpha \in S$ بحيـث إن $\alpha \notin J(S)$، عندئذ يوجد عنصـر مغاير للصـفر $\beta \in S$ يحقق أن $\beta = \beta\alpha\beta$. لنفرض أن $e = \alpha\beta$ فنجد أن $e \in S$ عنصـر جامد مغاير للصـفر، ومنه فإن $Ker(1-\alpha\beta) = Ker(1-e)$ حد مباشر للمودول M ومنه فإن $\ell_S(Ker(1-\alpha\beta)) = \ell_S(Ker(1-e))$ ولما كان $1-e \in S$ عنصراً جامداً نجد أن $\ell_S(Ker(1-e)) = Se$ ومنه يكون:

$$\ell_S(Ker(1-\alpha\beta)) = S(1-e)$$

وهذا يبين أن $\ell_S(Ker(1-\alpha\beta))$ حد مباشر في S.

$(2) \Leftarrow (1)$. ليكن $\alpha \in S$ بحيث إن $\alpha \notin J(S)$، عندئذ بحسب الفرض يوجد عنصـر مغـاير للصـفر $\beta \in S$ يحقق أن $\ell_S(Ker(1-\alpha\beta))$ حـد مباشـر فـي S. ومنـه يوجـد عنصــر جامـد مغـاير للصـفر $e \in S$ بحيـث $\ell_S(Ker(1-\alpha\beta)) = Se$. ولمـا كـان $1-\alpha\beta \in \ell_S(Ker(1-\alpha\beta))$ نجـد أن $1-\alpha\beta \in Se$ وبالتـالي يوجـد $\lambda \in S$ بحيـث $1-\alpha\beta = \lambda e$ ومنه فإن:

$$e - e\alpha\beta = (\lambda e)e = \lambda e = 1-\alpha\beta$$

وبالتالي يكون $1-e = \alpha\beta - e\alpha\beta$، أي إن $1-e = \alpha\beta(1-e)$ وبالتالي يكون:

$$1-e = (1-e)\alpha\beta(1-e)$$

$$\beta(1-e) = \beta(1-e)\alpha\beta(1-e)$$

لنضع $g = \beta(1-e)$ فنجد أن $g \in S$ عنصـر مغاير للصـفر وأن $g = g\alpha g$ وهذا يبين أن الحلقة S شبه جامدة. $(1) \Leftrightarrow (3)$. يبرهن بطريقة مشابهة.

تمهيديـــة 2−8.

ليكن M مودولاً فوق حلقة R و $S = End_R(M)$. عندئذ الشرطان الآتيان متكافئان:

1 − المودول M نصف إسقاطي.

2 − لأجل كل $\alpha, \beta \in S$ بحيث $D_S(Im(\alpha)) \subseteq D_S(Im(\beta))$ فإن $\alpha S \subseteq \beta S$.

البرهـــــان.

$(1) \Leftarrow (2)$. لنفرض أن المودول M نصف إسقاطي وليكن $\alpha, \beta \in S$ بحيث إن:

$$D_S(Im(\alpha)) \subseteq D_S(Im(\beta))$$

عندئذ فإن $hom_R(M, Im(\alpha)) \subseteq hom_R(M, Im(\beta))$ ومنه نجد أن $\alpha S \subseteq \beta S$.

$(2) \Leftarrow (1)$. ليكن $\alpha : M \to M$ تشاكلاً غامراً للمودول M وليكن $\beta : M \to M$ تشاكلاً للمودول M يحقق $Im(\beta) \subseteq Im(\alpha)$، عندئذ حسب التمهيدية $(2-1)$ نجد أن $D_S(Im(\beta)) \subseteq D_S(Im(\alpha))$ وبحسب الفرض نجد أن $\beta S \subseteq \alpha S$ ومنه يوجد عنصر $\lambda \in S$ بحيث $\beta = \alpha\lambda$ وهذا يبين أن المودول M نصف إسقاطي.

مبرهنـــــة 2−9.

ليكن M مودولاً نصف إسقاطياً فوق حلقة R وأن $S = End_R(M)$. عندئذ الشرطان الآتيان متكافئان:

1 − الحلقة S منتظمة.

2 − لأجل كل $g \in S$ فإن $D_S(Im(g))$ حد مباشر في S.

البرهـــــان.

$(1) \Leftarrow (2)$. ينتج مباشرة من التمهيدية $(2-8)$.

$(2) \Leftarrow (1)$. ليكن $g \in S$، عندئذ حسب الفرض فإن $D_S(Im(g))$ حد مباشر في S وبالتالي يوجد عنصر جامد $e \in S$ بحيث إن $D_S(Im(g)) = eS$. ولما كان المودول M نصف إسقاطي نجد أن $D_S(Im(g)) = hom_R(M, Im(g)) = gS$ ومنه فإن $eS = gS$ وبالتالي يوجد $\lambda, \mu \in S$ بحيث إن $g = e\lambda, e = g\mu$ ومنه فإن:

$$g = e\lambda = e(e\lambda) = g\mu g$$

وهذا يبين أن الحلقة S منتظمة.

مبرهنـــــة 2-10.

ليكن M مودولاً نصف إسقاطي فوق حلقة R وأن $S = End_R(M)$. عندئذ الشرطان الآتيان متكافئان:

1 - الحلقة S شبه جامدة.

2 - لأجل كل $g \in S$ بحيث $g \notin J(S)$ يوجد $\lambda \in S$ بحيث إن $D_S(Im(\lambda g))$ حد مباشر في S وأن $\lambda \neq 0$.

3 - لأجل كل $g \in S$ بحيث $g \notin J(S)$ يوجد $\mu \in S$ بحيث إن $D_S(Im(g\mu))$ حد مباشر في S وأن $\mu \neq 0$.

البرهـــــان.

$(1) \Leftarrow (2)$. ينتج مباشرة من التمهيدية (2-3).

$(2) \Leftarrow (1)$. ليكن $g \in S$ بحيث $g \notin J(S)$، عندئذ حسب الفرض يوجد $\lambda \in S$ بحيث إن $D_S(Im(\lambda g))$ حد مباشر في S وأن $\lambda \neq 0$. ومنه يوجد عنصر جامد $e \in S$ بحيث إن $D_S(Im(\lambda g)) = eS$. ولما كان المودول M نصف إسقاطي نجد أن $D_S(Im(\lambda g)) = (\lambda g)S$ ومنه نجد أن $(\lambda g)S = eS$ وبالتالي يوجد $\alpha, \beta \in S$ بحيث إن $e = (\lambda g)\alpha$ وأن $\lambda g = e\beta$ وبالتالي فإن:

$$\lambda g = e\beta = e(e\beta) = (\lambda g)\alpha(\lambda g)$$

لنضع $h = \alpha\lambda g\alpha\lambda$ فنجد أن $h \in S$ وأن:

$$hgh = (\alpha\lambda g\alpha\lambda)g(\alpha\lambda g\alpha\lambda) = \alpha(\lambda g\alpha\lambda g)\alpha\lambda = \alpha\lambda g\alpha\lambda = h$$

وهذا يبين أن الحلقة S شبه جامدة.

$(1) \Leftrightarrow (3)$. يبرهن بطريقة مشابهة.

مبرهنـــــة 2-11.

ليكن M مودولاً نصف إسقاطي فوق حلقة R وأن $S = End_R(M)$. عندئذ الشرطان الآتيان متكافئان:

1 - الحلقة S شبه جامدة.

2 – لأجل كل $g \in S$ بحيث إن $g \notin J(S)$ فإن $D_S(Im(g))$ يحوي حداً مباشراً مغايراً للصفر للحلقة S.

البرهـــان.

$(1) \Leftarrow (2)$. لنفرض أن الحلقة S شبه جامدة. وليكن $g \in S$ بحيث $g \notin J(S)$، عندئذ يوجد عنصر مغاير للصفر $f \in S$ يحقق أن $f = fgf$. لنضع $e = gf$ فنجد أن $e \in S$ عنصر جامد مغاير للصفر وأن $Im(e) = Im(gf) \subseteq Im(g)$ وبحسب التمهيدية $(2-1)$ نجد أن $D_S(Im(e)) \subseteq D_S(Im(g))$ ولما كان $e \in S$ عنصراً جامداً مغايراً للصفر ومنه نجد أن $D_S(Im(e)) = eS$ ومنه فإن $eS \subseteq D_S(Im(g))$ وأن eS حد مباشر مغاير للصفر للحلقة S.

$(2) \Leftarrow (1)$. ليكن $g \in S$ بحيث $g \notin J(S)$، عندئذ حسب الفرض يوجد عنصر جامد مغاير للصفر $e \in S$ بحيث إن $eS \subseteq D_S(Im(g))$. ومنه فإن $Im(e) \subseteq Im(g)$ وبالتالي يكون:

$$hom_R(M, Im(e)) \subseteq hom_R(M, Im(g))$$

ولما كان المودول M نصف إسقاطي نجد أن $eS \subseteq gS$ وبالتالي يوجد $\lambda \in S$ بحيث إن $e = g\lambda$ ومنه يكون $e = eg\lambda e$ وأن $\lambda e = (\lambda e)g(\lambda e)$. لنفرض أن $f = \lambda e$ فنجد أن $f \in S$ عنصر مغاير للصفر وأن $f = fgf$ وهذا يبين أن الحلقة S شبه جامدة.

تمهيديـــة 2-12.

ليكن M مودولاً فوق حلقة R و $S = End_R(M)$. عندئذ الشرطان الآتيان متكافئان:

1 – المودول M نصف أفقي.

2 – أياً كان $\alpha, \beta \in S$ بحيث $\ell_S(Ker(\alpha)) \subseteq \ell_S(Ker(\beta))$ فإن $S\alpha \subseteq S\beta$.

البرهـــان.

$(1) \Leftarrow (2)$. لنفرض أن المودول M نصف أفقي وليكن $\alpha, \beta \in S$ بحيث إن:

$$\ell_S(Ker(\alpha)) \subseteq \ell_S(Ker(\beta))$$

عندئذ فإن $S\alpha \subseteq S\beta$.

$(2)\Leftarrow(1)$. لـيكن $\alpha : M \to M$ تشـاكلاً متبايناً للمـودول M ولـيكن $\beta : M \to M$ تشاكلاً آخر للمودول M، عندئذ فإن $Ker(\alpha) \subseteq Ker(\beta)$ وبحسب التمهيديـة $(1-1)$ نجـد أن $\ell_S(Ker(\beta)) \subseteq \ell_S(Ker(\alpha))$ وبحسـب الفـرض نجـد أن $S\beta \subseteq S\alpha$ ومنـه يوجد عنصر $\lambda \in S$ بحيث $\beta = \lambda\alpha$ وهذا يبين أن المودول M نصف أفقي.

مبرهنـــــة 2-13.

ليكن M مـودولاً نصـف أفقيـاً فـوق حلقـة R وأن $S = End_R(M)$. عندئـذ الشـرطان الآتيان متكافئان:

1 - الحلقة S منتظمة.

2 - لأجل كل $g \in S$ فإن $\ell_S(Ker(g))$ حد مباشر في S.

البرهـــــان.

$(1)\Leftarrow(2)$. ينتج مباشرة من التمهيدية $(2-1)$.

$(2)\Leftarrow(1)$. ليكن $g \in S$، عندئذ حسب الفرض فإن $\ell_S(Ker(g))$ حد مباشر في S وبالتالي يوجد عنصر جامد $e \in S$ بحيث إن $\ell_S(Ker(g)) = Se$. ولما كان المودول M نصـف أفقـي نجـد أن $\ell_S(Ker(g)) = Sg$ ومنـه فـإن $Se = Sg$ وبالتـالي يوجـد $\lambda, \mu \in S$ بحيـث إن $g = \lambda e, e = \mu g$ ومنــه فــإن $g = \lambda e = (\lambda e)e = g\mu g$ وهـذا يبين أن الحلقة S منتظمة.

مبرهنـــــة 2-14.

ليكن M مـودولاً نصـف أفقـي فـوق حلقـة R وأن $S = End_R(M)$. عندئـذ الشـروط الآتية متكافئة:

1 - الحلقة S شبه جامدة.

2 - لأجل كل $g \in S$ بحيث $g \notin J(S)$ يوجد $\lambda \in S$ بحيث إن $\ell_S(Ker(\lambda g))$ حد مباشر في S وأن $\lambda \neq 0$.

3 - لأجل كل $g \in S$ بحيث $g \notin J(S)$ يوجد $\mu \in S$ بحيث إن $\ell_S(Ker(g\mu))$ حد مباشر في S وأن $\mu \neq 0$.

البرهـــــان.

$(1)\Leftarrow(2)$. ينتج مباشرة من التمهيدية (2−3).

$(2)\Leftarrow(1)$. لـيكن $g\in S$ بحيـث $g\notin J(S)$ ، عندئـذ حسـب الفـرض يوجـد عنصـر $\lambda\in S$ بحيث إن $\ell_S(Ker(\lambda g))$ حد مباشر في S وأن $\lambda\neq 0$. ومنـه يوجد عنصـر جامد $e\in S$ بحيث إن $\ell_S(Ker(\lambda g))=Se$. ولمـا كـان المـودول M نصـف أفقـي نجـد أن $\ell_S(Ker(\lambda g))=S(\lambda g)$ ومنـــه نجـــد أن $S(\lambda g)=Se$ وبالتـــالي يوجـــد $\alpha,\beta\in S$ بحيث إن $e=\alpha(\lambda g)$ وأن $\lambda g=\beta e$ وبالتالي فإن:

$$\lambda g=\beta e=(\beta e)e=(\lambda g)\alpha(\lambda g)$$

لنضـع $h=\lambda g$ فنجـد أن $h\in S$ عنصـر مغـاير للصـفر وأن $hgh=h$ وهـذا يبـين أن الحلقة S شبه جامدة.

$(1)\Leftrightarrow(3)$. يبرهن بطريقة مشابهة.

مبرهنـــــة 2−15.

ليكن M مودولاً نصف أفقي فوق حلقة R وأن $S=End_R(M)$. عندئذ الشرطان الآتيان متكافئان:

1 − الحلقة S شبه جامدة.

2 − لأجـل كـل $g\in S$ بحيـث إن $g\notin J(S)$ فـإن $\ell_S(Ker(g))$ يحـوي حـداً مباشـراً مغايراً للصفر للحلقة S.

البرهـــــان.

$(1)\Leftarrow(2)$. لنفـرض أن الحلقـة S شـبه جامـدة. ولـيكن $g\in S$ بحيـث إن $g\notin J(S)$، عندئـذ يوجـد عنصـر مغـاير للصـفر $f\in S$ يحقـق أن $f=fgf$. لنضـع $e=fg$ فنجـد أن $e\in S$ عنصر جامد مغاير للصفر وأن $Ker(g)\subseteq Ker(fg)=Ker(e)$ وبحسب التمهيديـة (1−1) نجـد أن $\ell_S(Ker(e))\subseteq\ell_S(Ker(g))$ ولمـا كـان $e\in S$ عنصـراً جامداً مغايراً للصـفر نجد أن $\ell_S(Ker(e))=Se$ ومنـه فـإن $Se\subseteq\ell_S(Ker(g))$ وأن Se حد مباشر مغاير للصفر للحلقة S.

$(2)\Leftarrow(1)$. ليكن $g \in S$ بحيث $g \notin J(S)$ ، عندئذ حسب الفرض يوجد عنصر جامد مغاير للصفر $e \in S$ بحيث إن $Se \subseteq \ell_S(Ker(g))$. ومنه فإن $Ker(g) \subseteq Ker(e)$ وبالتالي يكون $\ell_S(Ker(e)) \subseteq \ell_S(Ker(g))$ ولما كان المودول M نصف أفقي نجد أن $Se \subseteq Sg$ وبالتـالي يوجـد $\lambda \in S$ بحيـث إن $e = \lambda g$ ومنـه يكـون $e = e\lambda ge$ وأن $e\lambda = (e\lambda)g(e\lambda)$. لنفرض أن $f = e\lambda$ فنجد أن $f \in S$ عنصر مغاير للصفر وأن $f = fgf$ وهذا يبين أن الحلقة S شبه جامدة.

المــراجـــع العـــلميــــة.

[1] – Anderson, F. W.and Fuller, K. R., " Rings and Categories of Modules ", New York. Springer (1973).

[2] – Amini, B, and Ershad, M. Sharif, H., " Co-retractable Modules ", J. Aust. Math. Soc., 86,. (2009), 289 – 304.

[3] – Goodearl, K. R., " Von Neumann Regular Rings ", Pitman 1979 .

[4] – Haghany, A., and Vedadi, M.R., " Study of semi-projective retractable modules ", Algebra Colloq., (3) 14 (2007), 489-496.

[5] – Hamza, H. " I_0 – Rings and I_0 – Modules ", Math. J. Okayama Univ. Vol. 40, (1998), p. 91 – 97.

[6] – Hamza, H., " Semi M-Projective and Semi N-Injective Modules ", Kyungpook J. Math. 56 (2016), pp. 83 – 94.

[7] – Kasch, F. " Modules and Rings ", London Math. Soc. Mono. 1982.

[8] – Lambek, J. " Lectures on Rings and Modules ", Blaisdell, Mass. 1966.

[9] – Tansee, H., and Wongwai, S., " A note on Semi-projective Modules ", Kyungpook J. Math. Vol. 42. (2002). 369 – 380.