الحساب التقريبي للتكاملات المضاعفة في منطقة السيمبلكس غير المنتظم $T_n^{(a_i)}$

د. حامد عباس–أستاذ مساعد في قسم الرياضيات –كلية العلوم – جامعة البعث

ملخص البحث

يهتم هذا البحث بدراسة التكاملات المضاعفة التقريبية في منطقة السميبلكس غير المنتظم $T_n^{(a_i)}$ بطريقة النواة المولدة ،من خلال إيجاد كثيرات الحدود المتعامدة النظيمة، حيث إن:

$$T_n^{(a_i)} = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^{n} x_i \le \max a_i \quad , \quad 0 \le x_i \le a_i \right\}$$

أوجدنا دستوراَ جديداَ يمكننا من خلاله إيجاد التكاملات المضاعفة لكثيرات الحدود ذات القوى الصحيحة في المنطقة $T_n^{(a_i)}$. ، والذي تم استخدامه في إيجاد كثيرات الحدود المتعامدة النظيمة $F(x)$، و تم إيجاد صيغة النواة المولدة الموافقة لذلك .

حصلنا من صيغة النواة المولدة على علاقة تكعيبية جديدة صحيحة تماما من أجل كل كثيرة حدود $f(x)$ دقتها الجبرية تساوي 2 ،وعدد النقاط (n+1) ، وبعض من الأمثلة العددية.

الكلمة المفتاحية: العلاقات التكعيبية للسيمبلكس ، الدوال المتعامدة، التكاملات المضاعفة.

Approximation calculate multi integrals in irregular simplex region $T_n^{(a_i)}$

D.Hamed abbas - Albaath university – Science faculty- Math department .

Abstract

The research consists of study approximate multi integrals in the irregular simplex $T_n^{(a_i)}$ by method reproducing kernel, without construction orthogonal and normal polynomials, where:

$$T_n^{(a_i)} = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^{n} x_i \le \max a_i \quad , \quad 0 \le x_i \le a_i \right\}$$

We find new formulae for calculate multi integral polynomials in the irregular simplex $\boldsymbol{T_n^{(a_i)}}$, which we use new formulae for obtain orthogonal and normal polynomials . and reproducing kernel for construction cubature formulae. Construct the cubature formulae for

are obtained, which have the algebraic degree of exactness 2 and the number of the nodes (n+1) and some numerical examples . .

.

key words: cubature formulae for simplex, orthogonal polynomials, multi integrals.

مقدمة البحث:

درس عدد كبير من العلماء حساب التكاملات والتكاملات المضاعفة بطرائق تقريبية متعددة منهم نيوتن و لاغرانج وسيمبسون وغاوس وغيرهم. وضع I.P.Mysovskikh في بداية السبعينيات من القرن الماضي النظرية العامة لطريقة النواة المولدة لتشكيل العلاقات التكعيبية ،والتي تعتمد على كثيرات الحدود المتعامدة النظامية . برهن Moller النظرية العامة، ثم أثبت نظرية أخرى مشابهة، حيث اعتبر أن المنطقة التكاملية تمتلك خاصة التناظر المركزي. استخدم كل من .Moller.H.M و Rasputin.G.G Abbas.H.Aو وNaskof هذه الطريقة ، ودرست بعض خواص النواة المولدة في تلك المنطقة.

تم تشكيل بعض العلاقات التكعيبية البسيطة من أجل منطقة السمبيلكس المنتظم الذي طول حرفه يساوي الواحد 1 [5] . إن البحوث الجارية في هذا المجال تدور حول دراسة خواص النواة المولدة وتطبيق هذه الطريقة في مناطق تكاملية أوسع، وفي فضاءات أخرى، والحصول على علاقات تقريبية جديدة يمكن استخدامها من أجل حساب التكاملات المضاعفة في مناطق تكاملية متعددة.

مفاهيم ومبرهنات أساسية:

العلاقة التكعيبية: هي مساواة تقريبية من الشكل:

$$\int_{\Omega} \omega(x).f(x)\,dx \cong \sum_{j=1}^{N} C_J f(x_j) \qquad (1)$$

إشارة التكامل على المنطقة التكاملية **Ω** تعني التكامل المضاعف ، حيث إن x_j هي نقاط مختلفة مثنى مثنى وتدعى نقاط المكاملة أو عقد العلاقة التكعيبية ،و C_j الثوابت الموافقة لتلك النقاط ، $f(x)$الدالة المراد مكاملتها و $\omega(x)$ دالة الوزن.

الدقة الجبرية: نقول عن العلاقة التكعيبية أن دقتها الجبرية تساوي k، إذا كانت صحيحة تماماً من أجل كل كثيرة حدود درجتها لا تتجاوز k وتقريبية فيما عدا ذلك.

النواة المولدة: هي كثيرة حدود من الدرجة k تحتوي على $2n$ من المتحولات يرمز لها بالرمز $k_k\left(u,x\right)$ حيث $x=\left(x_1,x_2,....,x_n\right)$ و $u=\left(u_1,u_2,...,u_n\right)$.تدعى مولدة لأنها تحقق الخاصة التالية:

$$F\left(u\right)=\int_{\Omega}\omega(x).K_K\left(u,x\right).F\left(x\right)dx$$

حيث $dx=dx_1.dx_2\ \ ...dx_n$.و k هي درجة كثيرة الحدود المتعامدة النظامية $F(x)$.
تكون $F_i\left(x\right)$, $i=0,1,2,...,n$ متعامدة نظامية إذا كان:

$$(F_i\left(x\right).F_j\left(x\right))=\int_{\Omega}\omega(x).F_i\left(x\right).F_J\left(x\right)dx=\begin{cases}0 & i\neq j\\ 1 & i=j\end{cases}\quad ;\qquad (2)$$

مبرهنة1: [2] بفرض أن Ω تحوي نقاط داخلية ، وبفرض أن $\omega(x)$ تحقق الشرط: $\omega(x)\geq 0\ ,\ \forall x\in\Omega\Rightarrow\int_{\theta}\omega(x)dx>0$، والعلاقة التكعيبية(1) بـ N من النقاط تملك دقة جبرية d ، ومن أجل $d\geq 2$ نقاط العلاقة (1) لا تقع على سطح جبري من المرتبة k ، عند ذلك يكون:

$$N\geq\partial=M\left(n,k\right)=\frac{(n+k)!}{n!.k!}\quad :\quad k=\left\lfloor\frac{d}{2}\right\rfloor\qquad (3)$$

الرمز $k=\left\lfloor\frac{d}{2}\right\rfloor$ يعني القسم الصحيح من الكسر $\frac{d}{2}$.

يمكننا إيجاد النواة المولدة بالشكل التالي:

$$k_k(u,x)=\sum_{j=1}^{\delta}F_j(u).F_j(x) \quad , \quad \tilde{k}_k(u,x)=\sum_{j=1}^{\delta}{}^{*}F_j(u).F_j(x)\,. \qquad (4)$$

حيثُ إن: $\delta=M(n,k)=\dfrac{(n+k)}{n!k!}$

الإشارة * فوق رمز المجموع الأخير تعني أن المجموع يؤخذ بـ j الموافقة لـــ k،فإذا كانت k فردية ، فإن j تأخذ القيم الفردية فقط ، أما إذا كانت k زوجية ، فإن j تأخذ القيم الزوجية فقط .النواة $\tilde{K}_k(x,u)$ تستخدم في حالة كون كل من الوزن $\omega(x)$ والمنطقة Ωتمتلك خاصة التناظر المركزي ، أي أن :

$$x\in\Omega\Rightarrow -x\in\Omega \quad ,\omega(x)=\omega(-x) \qquad (5)$$

لتشكيل العلاقات التكعيبية نستخدم المبرهنة التالية:

مبرهنة 3:[2] بفرض أن النقاط $a^{(i)}$ و $i=1,2,........,n$ تحقق الشرط :

$$K_k(a^{(i)},a^{(j)})=b_i\,\delta_{ij} \quad ;i,j=1,2,......,n \qquad (6)$$

يتألف $\bigcap_{i=1}^{n}H_i$ من النقاط $x^{(j)}$ و $s=k^n,j=1,2,......,s$ عندئذ ذلك يمكن تشكيل العلاقة التكعيبية :

$$\int_{\Omega}\omega(x).f(x)dx\cong\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{b_i}f(a^{(i)})+\sum_{j=1}^{s}C_j f(a^{(j)}) \qquad (7)$$

حيث أن: $b_i=K_k(a^{(i)},a^{(i)})\neq 0$

مبرهنة 4: [2]بفرض أن كلا من $\omega(x)$ و Ω تحقق خاصة التناظر المركزي(5) ،والنقاط $a^{(i)}$ تحقق الشرط:

$$\tilde{K}_k(a^{(i)},a^{(i)})=b_i\,.\delta_{ij} \quad ;i,j=1,2,.....,n \qquad (8)$$

يتألف $\bigcap_{i=1}^{n} \tilde{H}_i$ من النقاط المختلفة مثنى مثنى $s = k^n, x^{(j)}, j = 1,2,...,s$ عندئذ يمكن تشكيل العلاقة التكعيبية :

$$\int_{\Omega} \omega(x).f(x)dx \cong \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{2b_i}\left[f(a^{(i)}) + f(-a^{(i)})\right] + \sum_{j=1}^{s} C_j f(x^{(j)}) \qquad (9)$$

فكل من $\tilde{H}_i, H_i$ معادلة سطح من الدرجة K ،التي تحددها النقطة $a^{(i)}$ بالشكل :

$$H_i \equiv K_k(a^{(i)}, x) = 0 \quad , \quad \tilde{H}_i \equiv \tilde{K}_k(a^{(i)}, x) = 0$$

أما $\bigcap_{i=1}^{n} H_i$ وكذلك $\bigcap_{i=1}^{n} \tilde{H}_i$ فهو حل جملة المعادلات غير خطية بـ n متحول. العلاقة(7) صحيحة من أجل كثيرات الحدود التي درجتها لا تتجاوز $2k$ ،أما(9) فهي صحيحة من أجل كثيرات الحدود التي درجتها لا تتجاوز $2k+1$.

يتضمن البحث المراحل التالية:

- تشكيل كثيرات الحدود المتعامدة النظامية، وذلك باستخدام العلاقة (2).
- إيجاد صيغة النواة المولدة $K_k(u,x)$ او $\widehat{K}_K(u,x)$ حسب العلاقة (3).
- اختيار النقاط $u_i = a^{(i)}$، حيث إن: $i = 1,2,.....,n$ ، وبعد التعويض في

إحدى صيغتي النواة السابقة (7) أو (9) نحصل على مجموعة من المعادلات غير الخطية بشكل عام ، والتي يجب حلها للحصول على نقاط العلاقة التكعيبية $x^{(i)}$. نختار النقاط $u_i = a^{(i)}$ بحيث تكون جملة المعادلات الناتجة قابلة للحل ،واخيرا نحسب الثوابت C_j من كون العلاقة التكعيبية تحقق الدقة الجبرية المطلوبة وبالتالي نحصل على العلاقة التكعيبية المناسبة.

2- هدف البحث وطريقته:

يهدف هذا البحث إيجاد دستور تكاملي نستخدمه في إيجاد كثيرات الحدود المتعامدة النظامية في منطقة السيمبلكس غير المنتظم $\Omega = T_n^{(a_i)}$ ، الذي أطوال أحرفه a_i مختلفة مثنى مثنى في الفضاء $\mathbb{R}^n$ ودالة الوزن $\omega(x) = 1$، و تطبيق طريقة النواة المولدة لتشكيل العلاقات التكعيبية في منطقة السيمبلكس غير المنتظم ، ومن أجل الحصول على علاقات تكعيبية ،يمكن استخدامها في حساب القيمة التقريبية للتكاملات المضاعفة. قبل ذلك يجب إيجاد كثيرات الحدود المتعامدة النظامية في المنطقة المذكورة اعتماداً على طريقة غرام- شميدت ، فالمسألة المطروحة هي : إمكانية تطبيق هذه الطريقة على منطقة السيمبلكس غير المنتظم الذي أطوال أحرفه a_i مختلفة مثنى مثنى في الفضاء $\mathbb{R}^n$ ودالة الوزن $\omega(x) = 1$.

النتائج ومناقشتها:

1-إيجاد الدستور التكاملي في المنطقة $T_n^{(a_i)}$

تعريف: السميبلكس غير المنتظم في الحالة العامة هو منطقةٌ من الفضاء $\mathbb{R}^n$، يكونُ فيها أطوال أحرفه a_i مختلفة مثنى مثنى ، ويُعَرَّفُ بالشكل الآتي:

$$T_n^{(a_i)} = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \ \sum_{i=1}^{n} x_i \le \max a_i \quad , \quad 0 \le x_i \le a_i \right\}$$

في المستوي عبارة عن مثلث قائم في مبدأ الإحداثيات، وفي الفضاء ثلاثي البعاد عبارة عن رباعي وجوه ناتج عن تقاطع مستوي مع المحاور الإحداثية بنقاط $a_i \ , \ i = 1,2,..,n$ غير متساوية البعد عن مبدأ الاحداثيات .

نوجد دستور تكاملُ الدّوال ذات القوى الصَّحيحة من الشّكل التالي:

$$\int_{T_n^{(a_i)}} x^{\alpha} dx = \int . \underset{T_n^{(a_i)}}{\cdots} \int x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n} dx_1 dx_2 \ldots dx_n$$

من أجل ذلك سنعتمد على صيغة ديرخليه للتكاملات المتكررة في الفضاء $\mathbb{R}^n$ والتي تكتب بالشكل التالي:

$$\int\limits_{(\frac{x_1}{a_1})^{\beta_1}+....+(\frac{x_n}{a_n})^{\beta_n}\le 1} ...... \int x_1^{p_1-1}x_2^{p_2-1}...x_n^{p_n-1}dx_1dx_2...dx_n =$$

$$=\frac{a_1^{p_1}.a_2^{p_2}...a_n^{p_n}\ .\Gamma\left(\frac{p_1}{\beta_1}\right).\Gamma\left(\frac{p_2}{\beta_2}\right)...\Gamma\left(\frac{p_n}{\beta_n}\right)}{\beta_1.\beta_2....\beta_n\ \ \Gamma\left(\frac{p_1}{\beta_1}+\frac{p_2}{\beta_2}+...+\frac{p_n}{\beta_n}+1\right)}$$

نضع $\beta_1=\beta_2...=.\beta_n=1$ نجد:

$$\int\limits_{T_n^{(a_i)}}......\int x_1^{p_1-1}x_2^{p_2-1}...x_n^{p_n-1}dx_1dx_2...dx_n$$

$$=\frac{a_1^{p_1}.a_2^{p_2}...a_n^{p_n}\ .\Gamma(p_1).\Gamma(p_2)...\Gamma(p_n)}{\Gamma(p_1+p_2+...+p_n+1)}$$

حيثُ إنَّ: $\frac{x_1}{a_1}+\frac{x_2}{a_2}+...+\frac{x_n}{a_n}\le 1$

نضعُ في علاقة دير خليه $p_i-1=a_i\ ,\ i=1,2,...,n$ ، نجد إن:

$$\int\limits_{T_n^{(a_i)}}......\int x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}...x_n^{\alpha_n}dx_1dx_2...dx_n$$

$$=\frac{a_1^{p_1}.a_2^{p_2}...a_n^{p_n}\ \Gamma(\alpha_1+1)\Gamma(\alpha_2+1)...\Gamma(\alpha_n+1)}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2+...+n+1)}$$

وباعتبار $\Gamma(\alpha_i+1)=\alpha_i\,!$ ، يكونُ:

$$\int\limits_{T_n^{(a_i)}}x^{\alpha}dx=\frac{\alpha_1!\alpha_2!...\alpha_n!\,.\prod_{i=1}^{n}a_i^{\alpha_i+1}}{(\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_n+n)!}\quad ;\quad |\alpha|=\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_n$$

نفرض أن : $\alpha! = \alpha_1!\alpha_2!...\alpha_n!$ ، إذن :

$$\int_{T_n^{(a_i)}} x^{\alpha} dx = \frac{\alpha!}{\left(|\alpha| + n\right)!} . \prod_{i=1}^{n} a_i^{\alpha_i + 1} \tag{10}$$

وهي علاقة اساسية جديدة بالتكاملات المتكررة ،وصحيحة فقط من أجل كثيرات الحدود ذات القوى الصحيحة الموجبة بالنسبة للمتحولات x_i .

ملاحظة: تم إيجاد هذا الدستور التكاملي بطريقة أخرى وهي طريقة التدريج، أي تم إيجاد الدستور في التكاملات الأحادية والثنائية والثلاثية و... ، وحصلنا على العلاقة (10) .

2-إيجاد كثيرات الحدود المتعامدة والنظامية:

نعتمد على مبدأ غرام شميث في التعامد والنظيم ، حيث نحصل على كثيرات الحدود المتعامدة والنظامية على المنطقة $T_n^{(a_i)}$ انطلاقاً من مجموعة الدوال المستقلة خطياً التالية : $1, x^1, x^2, x^3, ..., x^n$. كثيرات الحدود المتعامدة والنظامية من الدرجة n تكتب على الشكل التالي:

$$\boldsymbol{F_n(x) = C_n\left(x^n - \sum_{k=0}^{n-1} \beta_k F_k\right)} \tag{11}$$

حيث إن: $\boldsymbol{\beta_k = \langle x^n, F_k \rangle \quad , \quad k = 0,1,...,n-1}$. نجد الثابت C_n بحيث يكون:

$$\langle F_n(\mathrm{x}), F_n(\mathrm{x}) \rangle = 1$$

بحساب هذه الثوابت وتبديلها في المساواة (11) نحصل على كثيرات الحدود المتعامدة.

$$F_0(x)=\sqrt{\frac{n!}{\mu}}\ ,\quad \mu=\prod_{i=1}^{n}a_i$$

$$F_1(x)=\frac{1}{a_1}\sqrt{\frac{(n+2)!}{n(n+1)\mu}}\left[(n+1)x_1-a_1\right]$$

$$F_2(x)=\frac{1}{a_2}\sqrt{\frac{(n+2)!}{n(n-1)\mu}}\left[nx_2+\frac{a_2}{a_1}x_1-a_2\right]$$

$$F_3(x)=\frac{1}{a_3}\sqrt{\frac{(n+2)!}{(n-1)(n-2)\mu}}\left[(n-1)x_3+\frac{a_3}{a_1}x_1+\frac{a_3}{a_2}x_2-a_3\right]$$

....

$$F_n(x)=\frac{1}{a_n}\sqrt{\frac{(n+2)!}{1.2.\mu}}\left[2x_n+\sum_{i=1}^{n-1}\frac{a_n}{a_i}x_i-a_n\right]$$

وهي كثيراتُ الحدود المتعامدة والنظاميَّة من الدرجة الأولى. يمكن كتابة كثيرات الحدود المتعامدة والنظيمة السابقة ضمن صيغة موحدة على الشكل التالي:

$$F_k(x)=\frac{1}{a_k}\sqrt{\frac{(n+2)!}{(n-k+2)(n-k+1)..\mu}}\left[(n-k+2)x_k+\sum_{i=1}^{k-1}\frac{a_k}{a_i}x_i-a_k\right]$$

$k=1,2,...,n$

3-إيجاد صيغة النواة المولدة: اعتماداً على الصيغة العامة للنواة (4) ،جد:

$$K_1(u,x)=\frac{n!}{\mu}+\frac{(n+2)!}{a_1^2 n(n+1)\mu}.\left[(n+1).x_1-a_1\right].\left[(n+1)u_1-a_1\right]+$$

$$+\frac{(n+2)!}{a_2^2 n(n-1)\mu}.\left[nx_2+\frac{a_2}{a_1}x_1-a_2\right].\left[nu_2+\frac{a_2}{a_1}u_1-a_2\right]+$$

$$+\frac{(n+2)!}{a_3^2(n-1)(n-2)\mu}.[(n-1)x_3+\frac{a_3}{a_2}x_2+\frac{a_3}{a_1}x_1-a_3].$$

$$.[(n-1)u_3+\frac{a_3}{a_2}u_2+\frac{a_3}{a_1}u_1-a_3]+$$

....

$$+\frac{(n+2)!}{a_{n-1}^2.2.\,3.\mu}.[3x_{n-1}+\sum_{i=1}^{n-2}\frac{a_{n-1}}{a_i}x_i-a_{n-1}].[3u_{n-1}+\sum_{i=1}^{n-2}\frac{a_{n-1}}{a_i}u_i-a_{n-1}]$$

$$+\frac{(n+2)!}{a_n^2.1.2.\mu}.[2x_n+\sum_{i=1}^{n-1}\frac{a_n}{a_i}x_i-a_n].[2u_n+\sum_{i=1}^{n-1}\frac{a_n}{a_i}u_i-a_n]$$

بإخراج العامل المشترك $\frac{(n+2)!}{\mu}$ نجد إن:

$$K_1(u,x)=\frac{n!}{\mu}+\frac{(n+2)!}{\mu}\left\{\frac{1}{a_1^2 n(n+1)}.\left[(n+1).x_1-a_1\right].\left[(n+1)u_1-a_1\right]+\right.$$

$$+\frac{1}{a_2^2 n(n-1)}.\left[nx_2+\frac{a_2}{a_1}x_1-a_2\right].\left[nu_2+\frac{a_2}{a_1}u_1-a_2\right]+$$

$$+\frac{1}{a_3^2(n-1)(n-2)}.[(n-1)x_3+\frac{a_3}{a_2}x_2+\frac{a_3}{a_1}x_1-a_3].[(n-1)u_3+\frac{a_3}{a_2}u_2+\frac{a_3}{a_1}u_1-a_3]+$$

....

$$+\frac{1}{a_{n-1}^2.2.\,3.}.[3x_{n-1}+\sum_{i=1}^{n-2}\frac{a_{n-1}}{a_i}x_i-a_{n-1}].[3u_{n-1}+\sum_{i=1}^{n-2}\frac{a_{n-1}}{a_i}u_i-a_{n-1}]$$

$$+\frac{1}{a_n^2.1.2.}.[2x_n+\sum_{i=1}^{n-1}\frac{a_n}{a_i}x_i-a_n].[2u_n+\sum_{i=1}^{n-1}\frac{a_n}{a_i}u_i-a_n]$$

نحسب الحد الثابت ، ثم نكتب المضاريب التي تضم x_1 ، ثم المضاريب التي تضم x_2 وهكذا.....،حتى نصل الى المضاريب التي تضم x_n ، فنجد :

- **حساب الحد الثابت العام للنواة:**

$$\frac{n!}{\mu}+\frac{(n+2)!}{\mu}[\frac{1}{n(n+1)}+\frac{1}{n(n-1)}+\frac{1}{(n-1)(n-2)}+......+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{2}]$$

من المعلوم أن:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+.......+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1} \qquad (12)$$

وبالتالي فان:

$$\frac{n!}{\mu}+\frac{(n+2)!}{\mu}(\frac{n}{n+1})=\frac{(n+2)!}{\mu}.(\frac{n+1}{n+2})$$

- - **حساب أمثال x_1 :**

$$K_1(u,x)=\frac{n!}{\mu}+\frac{(n+2)!}{\mu}\left\{\frac{1}{a_1^2 n\left(n+1\right)}.\left[(n+1).x_1-a_1\right].\left[(n+1)u_1-a_1\right]+\right.$$

$$+\frac{1}{a_2^2 n\left(n-1\right)}.\left[nx_2+\frac{a_2}{a_1}x_1-a_2\right].\left[nu_2+\frac{a_2}{a_1}u_1-a_2\right]+$$

$$+\frac{1}{a_3^2\left(n-1\right)\left(n-2\right)}.[(n-1)x_3+\frac{a_3}{a_2}x_2+\frac{a_3}{a_1}x_1-a_3].$$

$$.[(n-1)u_3+\frac{a_3}{a_2}u_2+\frac{a_3}{a_1}u_1-a_3]+$$

....

$$+\frac{1}{a_{n-1}^2.2.\,3.}.[3x_{n-1}+\sum_{i=1}^{n-2}\frac{a_{n-1}}{a_i}\,x_i-a_{n-1}].[3u_{n-1}+\sum_{i=1}^{n-2}\frac{a_{n-1}}{a_i}\,u_i-a_{n-1}]$$

$$+\frac{1}{a_n^2.1.2.}.[2x_n+\sum_{i=1}^{n-1}\frac{a_n}{a_i}x_i-a_n].[2u_n+\sum_{i=1}^{n-1}\frac{a_n}{a_i}\,u_i-a_n]$$

●●● نوجد أمثال x_1 نجد:

$$\frac{(n+2)!}{\mu}x_1\left\{\frac{1}{a_1^2 n}[(n+1)u_1-a_1]+\frac{1}{a_1a_2n(n-1)}[nu_2+\frac{a_2}{a_1}u_1-a_2]+\right.$$
$$\frac{1}{a_1a_3(n-1)(n-2)}[(n-1)u_3+\frac{a_3}{a_2}u_2+\frac{a_3}{a_1}u_1-a_2]$$
$$+...$$
$$+.\frac{1}{a_1a_{n-1}.2.\,3.}.[3u_{n-1}+\sum_{i=1}^{n-2}\frac{a_{n-1}}{a_i}u_i-a_{n-1}].+.\frac{1}{a_1a_n.1.\,2}[2u_n+\sum_{i=1}^{n-1}\frac{a_n}{a_i}u_i-a_n]$$

نكتب أمثال u_1 ، أمثال u_2 ، ... وهكذا أمثال u_n ، والحد الثابت، نجد إن:

$$=\frac{(n+2)!}{\mu}x_1[\frac{1}{a_1^2}(\frac{n+1}{n}+\frac{1}{n(n-1)}+\frac{1}{(n-1)(n-2)}+...........+\frac{1}{6}+\frac{1}{2})u_1$$
$$+\frac{1}{a_1a_2}(\frac{n}{n(n-1)}+\frac{1}{(n-1)(n-2)}+.........+\frac{1}{6}+\frac{1}{2})u_2$$
$$+......................$$
$$+\frac{1}{a_1a_{n-1}}(\frac{1}{1}+\frac{1}{2})u_{n-1}+\frac{1}{a_1a_n}u_n-\frac{1}{a_1}(\frac{1}{n}+\frac{1}{n(n-1)}+......+\frac{1}{2})]$$

اعتماداً على المساواة (12) نجد إن

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+.........+\frac{1}{n(n-1)}+\frac{n+1}{n}=\frac{n}{n+1}-\frac{1}{n(n+1)}+\frac{n+1}{n}=2$$
$$\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+.........+\frac{1}{(n-1)(n-2)}+\frac{n}{n(n-1)}=\frac{n}{n+1}-\frac{1}{n(n-1)}-\frac{1}{n(n+1)}+\frac{n}{n(n-1)}$$
$$=\frac{n}{n+1}+\frac{1}{n}+\frac{1}{n(n+1)}=1$$

إن أمثال u_1 تساوي العدد 2 ، و أمثال u_i . $i=2,3....,n$ تساوي العدد 1 ، وبالتالي تكتب أمثال x_1 بالشكل:

$$\frac{(n+2)!}{\mu.a_1}x_1[\frac{1}{a_1}u_1+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}u_i-1]$$

نفس المناقشة بالنسبة للحدود التي تحوي x_2 . نجد إن أمثال u_2 تساوي العدد 2 ، وباقي الأمثال تساوي العدد 1,أي أن أمثال x_2:

$$\frac{(n+2)!}{\mu.a_2}x_2[\frac{1}{a_2}u_2+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}u_i-1]$$

وأخيراَ في حساب أمثال x_n نجد إن أمثال u_n تساوي العدد 2 ، وباقي الأمثال تساوي العدد 1 أي :

$$\frac{(n+2)!}{\mu.a_n}x_n[\frac{1}{a_n}u_n+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}u_i-1]$$

وبالتالي يمكننا كتابة النواة المولدة بالشكل:

$$K_1(u,x)=\frac{(n+2)!}{\mu}\left\{\sum_{j=1}^{n}\frac{x_j}{a_j}.\ (\frac{u_j}{a_j}+\sum_{i=1}^{n}\frac{u_i}{a_i}-1)-\sum_{i=1}^{n}\frac{u_i}{a_i}+\frac{n+1}{n+2}\right\} \quad (13)$$

وهي الصيغة العامة للنواة المولدة.

4-تشكيل العلاقة التكعيبية:

يمكن اختار النقاط $u^{(i)}$ بأشكال متعددة بشكل عام ،ولكن بشرط أن تتقاطع السطوح الناتجة في النقاط $x^j\ ,\ j=1,2,....,N$ ، بعبارة أخرى يجب أن تكون جملة المعادلات الناتجة قابلة للحل. أو مصفوفة أمثالها غير شاذة ، إضافة لذلك يجب أن تكون النقاط $x^j\ ,\ j=1,2,....,N$ داخل أو على محيط المنطقة التكاملية أو في جوارها ، ومن الأفضل أن تكون حقيقية . نختار النقاط $u^{(i)}$ بالشكل الآتي:

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{u_i}{a_i}=1 \qquad (14)$$

نأخذ النقطة $u^{(1)}=(a_1,0,..,0)$، بالتبديل في صيغة النواة المولدة (13) نجد المستوي:

$$\pi_1 \equiv \frac{n+2}{a_1}x_1-1=0$$

على هذا المستوي نختار النقطة الثانية، والتي تحقق الشرط (14):

$$u^{(2)}=(\frac{a_1}{n+2},\frac{(n+1)\,a_2}{n+2},0,.......,0)$$

بالتبديل في صيغة النواة المولدة (13) نجد معادلة المستوي التالي:

$$\pi_2 \equiv \frac{x_1}{a_1}+\frac{n+1}{a_2}x_2-1=0$$

على تقاطع المستويين π_1 , π_2 نختار النقطة الثالثة والتي تحقق الشرط(14) بالشكل:

$$u^{(3)}=(\frac{a_1}{n+2},\frac{a_2}{n+2},\frac{n.a_3}{n+2},0,........,0)$$

بالتبديل في صيغة النواة المولدة (13) نجد معادلة المستوي التالي:

$$\pi_3 \equiv \frac{x_1}{a_1}+\frac{x_2}{a_2}+\frac{n}{a_3}x_2-1=0$$

وهكذا نختار النقطة الأخيرة $u^{(n)}$ على التقاطع $\bigcap_{i=1}^{n-1}\pi_i$ وتحقق الشرط (14) كما يلي:

$$u^{(n)}=(\frac{a_1}{n+2},.......\frac{a_{n-1}}{n+2},\frac{3a_n}{n+2})$$

هذه النقطة تحدد المستوي التالي:

$$\pi_n \equiv \frac{x_1}{a_1}+\frac{x_2}{a_2}+....+\frac{x_{n-1}}{a_{n-1}}+\frac{3x_n}{a_n}-1=0$$

حل جملة المعادلات التالية الناتجة عن تقاطع المستويات π_i , $i = 1, 2, \ldots n$ هو:

$$\bigcap_{i=1}^{n} \pi_I = x^{(1)} = \left(\frac{a_1}{n+2}, \frac{a_2}{n+2}, \ldots\ldots, \frac{a_n}{n+2}\right) = u^{(n+1)}$$

حسب المبرهنة (3) يمكننا كتابة العلاقة التكعيبية التالية:

$$\int_{T_n^{(a_i)}} \omega(x).f(x)dx \cong \sum_{i=1}^{n} A_I f(u^{(i)}) + Cf(x^{(1)}) \qquad (15)$$

حيث إن: $A_i = \dfrac{1}{b_i}$ ، وحسب العلاقة (6) يكون:

$$A_i = \left[k_1(a^{(i)}, a^{(i)})\right] \ , i = 1.2\ldots.n \quad \Rightarrow$$

$$A_1 = \frac{\mu(n+2)}{(n+1)(n+2)(n+1)!}$$

$$A_2 = \frac{\mu(n+2)}{n(n+1)(n+1)!}$$

$$A_3 = \frac{\mu(n+2)}{(n-1)n(n+1)!}$$

....

$$A_n = \frac{\mu(n+2)}{2.3.(n+1)!} \qquad , \quad \mu = \prod_{i=1}^{n} a_i$$

أما الثابت C فنحصل عليه من كون العلاقة (15) صحيحة من أجل كل كثيرة حدود درجتها لا تتجاوز الثانية، فمن أجل $f(x) = 1$ نجد إن:

$$C = \frac{\mu(n+2)}{2.(n+1)!} = A_{n+1}$$

بشكل عام يمكن كتابة الثوابت A_K ، $k = 1, 2, \ldots\ldots, n+1$ بالشكل التالي:

$$A_k = \frac{\mu(n+2)}{(n+1)![(n-k+3)].[n-k+2]} \quad , k = 1,2,..,n+1$$

أخيراً يمكن كتابة العلاقة التكعيبية (15) بالشكل الآتي:

$$\int_{T_n^{(a_i)}} \omega(x).f(x)dx \cong \sum_{i=1}^{n+1} A_i f(a^{(i)}) \qquad (16)$$

العلاقة التكعيبية (16) مع الثوابت A_k , $k = 1,2,...,n+1$ صحيحة من أجل كل كثيرات الحدود التي درجتها لا تتجاوز $k = 1 \Rightarrow m = 2k = 2$ وتقريبية إذا كانت درجة كثيرات الحدود من درجات عليا . عدد نقاط العلاقة التكعيبية يطابق الحد الأدنى لعدد النقاط حسب المبرهنة (1) ، وجميع النقاط داخل المنطقة التكاملية والثوابت موجبة.

مثال 1: من أجل $f(x) = 1$ نجد في المستوي R^2 إن:

$$\int_{T_2^{(a_i)}} A_1 + A_2 + A_3 = C_1 = \frac{4.a_1a_2}{3.4.3!} + \frac{4.a_1a_2}{3.2.3!} + \frac{4.a_1a_2}{1.2.3!} = \frac{.a_1a_2}{2}$$

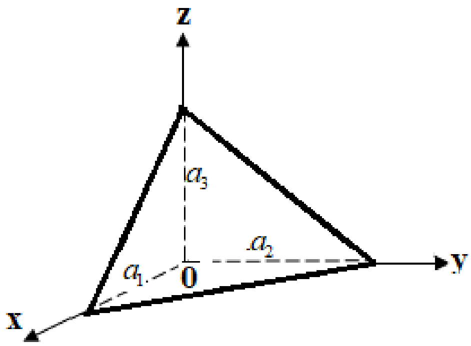
وهي مساحة المثلث القائم ، الذي طول كل من ضلعيه القائمتين a_1 , a_2 .

مثال 2: في الفضاء ثلاثي الأبعاد R^3 ، و $f(x) = 1$ نجد أن :

$$\int_{T_3^{(a_i)}} dx = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 = \frac{a_1.a_2.a_3}{4.4!} + \frac{5a_1.a_2.a_3}{4!.3.4} + \frac{5a_1.a_2.a_3}{4!.3.4} + \frac{5a_1.a_2.a_3}{4!.2.3} + \frac{5a_1.a_2.a_3}{4!.1.2}$$

$$= \frac{a_1.a_2.a_3}{6}$$

كما في الشكل:



هو حجم السيمبلكس في الفضاء R^3 ، والذي احرفه $a_1 \ , \ a_2 \ , \ a_3$.

يمكن استخدام العلاقة التقريبية (16)لحساب التكاملات التقريبية لأي دالة $f\ (x)$،وتكون النتائج تقريبية في حالة كون هذه الدالة من درجات أعلى من الدرجة الثانية ، والتي تحوي حدود غير جبرية [دوال أسية _ مثلثية – جذرية_ لوغاريتمية ...]

الاقتراحات والتوصيات:

1-تشكيل علاقات تقريبية ذات دقة أعلى.

2-العلاقات التقريبية للتكاملات المضاعفة اللانهائية.

3- التكامل في مناطق تكاملية أخرى غير منتظمة مثل المناطق الناقصية والزائدية.

المراجع المستخدمة:

[1]. Mysovskih.I.p.Abbas.H.A.1991 about. method reproducing Kernel Cubature Formulas. vestnig Leningrad univer _N7 P 3-11

[2]. M ysovskikh.I.P.1981 Interpolation cubature formulas Nawka . Moscow. 336.p

[3]. cege.g.1962 orthogonal polynomials, Mowscou.500. p.

[4]. Abbas.H.A.1991 about. method reproducing Kernel Cubature Formulas for cub and simplex, vestnig Leningrad

[5].Krilov .1967 approximation Numerical integration .Hawka.Mowscou.500.

[6].Moller.H.M. polynomials and cubature formulas. univ_Dortmund_1973

[7].Rasputin.G.G. construction cubature formulas tor triangle and square _1978

[8] R. Cools; , I.P. Mysovskikh, H.J. Schmidt, Cubature formulae and orthogonal polynomials_2001