

نظرية ميلنيكوف وتطبيقها على معادلة دفينغ

ذات القساوة السالبة

طالبة الماجستير: بنان كاخيا كلية العلوم - جامعة البعث

الدكتور المشرف: د. محمد العلي

ملخص البحث

يهدف هذا البحث إلقاء الضوء على نظرية ميلنيكوف وتطبيقها على معادلة دفينغ ذات القساوة السالبة.

نعتبر في بداية البحث منظومة ديناميكية ذات درجة حرية واحدة مع اضطراب دوري، بحيث تملك المنظومة الأساسية للمنظومة المضطربة نقطة ثابتة زائدية متصلة مع نفسها بمسار هوموكليني.

بعد ذلك نقوم بتعريف المنظومة المعلقة المتعلقة بها والتي تملك فضاء طوري ثلاثي البعد، وتعريف تطبيق بوانكاريه المتعلق بها والذي يملك نقطة ثابتة متوافقة لمسار دوري للمنظومة المعلقة .

بعدها نقوم بحساب المسافة بين المتنوعتين المستقرّة وغير المستقرّة للنقطة الثابتة الزائدية الموافقة لتطبيق بوانكاريه للتقاطعات الرأسية في فضاء طوري، والتي نستنتج من خلالها دالة ميلنيكوف التي أصفارها تشير إلى وجود الفوضى.

أخيراً، نطبق هذه الطريقة على معادلة دفينغ ذات القساوة السالبة

كلمات مفتاحية: المنظومة الهاملتونية المضطربة - المنظومة المعلقة - النقطة الثابتة

الزائدية - دالة ميلنيكوف - معادلة دفينغ ذات القساوة السالبة - المسار الهوموكليني.

The Melnikov method and its application to the Duffing's equation with negative stiffness

Master Student: Banan Kakhia

Faculty of Science – Albaath University

Supervisor: Dr. Mohamad Alali

Abstract

We aim in this research to study the Melnikov's method and applying it to the Duffing's equation with negative stiffness.

First, We consider a dynamical system with one- degree of freedom and periodic perturbation, such that , its basic unperturbed system has a hyperbolic fixed point connected to itself through a homoclinic orbit.

, We define the suspended system with three – dimensional phase space and its poincare map of cross sections which has a fixed point corresponding to periodic orbit of the suspended system.

Hence, we define the distance function between the stable and unstable manifolds of the fixed point of the Poincare map of cross sections in the phase space.

We deduce the formula for Melnikov's function that its zeros refer to chaos.

Finally We apply it to the Duffing's equation with negative stiffness.

Keywords: Perturbed Hamiltonian system - Suspended system - Hyperbolic fixed point - Melnikov's function - Duffing's Equation with negative stiffness - Homoclinic orbit.

1 - مقدمة:

طريقة ميلينكوف هي واحدة من الطرق التحليلية القليلة الموجودة لاكتشاف الفوضى ودراستها، وتمكننا هذه الطريقة من إثبات وجود نقاط التقاطع الرأسية الهوموكليينية (homoclinic) والتشعبات الهوموكليينية في فئة محددة وهامة من المنظومات الديناميكية.

تعود الفكرة الأساسية لهذه الطريقة للعالم بوانكاريه عندما كتب ورقة البحث الشهيرة حول مسألة الأجسام الثلاثة، حيث أنه كان يحاول إثبات عدم قابلية حل مسألة الأجسام الثلاثة المقصورة، إلا أن مساهمات ميلنيكوف [Melnikov (1963)] و أرنولد [Arnold (1964)] الهامة أدت إلى ظهور طريقة مبسطة يمكن من خلالها إثبات عدم قابلية مثل هذه المنظومات الديناميكية للمكاملة. وقد قام سميل [Smale (1967)] وتشيريكوف [Chirikov (1979)] وهولمز [Holmes (1980)] وتشاو [Chow, Hale and (1980)]، لاحقاً بإحياء هذه الطريقة و تثبيتها من خلال تطبيقها.

سنذكر في هذا البحث عملية استنتاج هذه الطريقة، وإيجاد دالة ميلنيكوف وتطبيقها على معادلة دفينغ ذات القساوة السالبة.

2- هدف وأهمية البحث:

دراسة المنظومة الهاملتونية المضطربة ومنظومتها الأساسية غير المضطربة والمنظومة المعلقة المتعلقة بها وتطبيق بوانكاريه وإيجاد دالة المسافة بين المتنوعتين المستقرة وغير المستقرة و تطبيقها على معادلة دفينغ ذات القساوة السالبة.

وتكمن أهمية البحث بالآتي:

3- طرق وأدوات البحث:

سنقوم بذكر أهم التعاريف الأساسية المتعلقة ببحثنا وإيجاد دالة ميلنيكوف وتطبيقها على معادلة دفينغ ذات القساوة السالبة.

4- مشكلة البحث:

قد نعلم من دراسات سابقة أنّ بعض المنظومات الهاملتونية تسلك سلوكاً فوضوياً، لذلك سنبحث عن طرائق التنبؤ بالسلوكية الفوضوية لمثل هذه المنظومات وأفضل الطرائق للتحقق من ذلك.

5- التعاريف الأساسية:

من أجل متطلبات هذا البحث يلزم تقديم التعاريف الآتية:

المنظومة الديناميكية: [1]

مجموعة من المعادلات الرياضية (تفاضلية (differential) أو فرقية (difference) أو تكاملية (integral) أو جبرية (algebraic) أو مزيج منها معاً)، تعطي قيمة المتغير الذي يحدد حالة المنظومة الديناميكية مع تغيير الزمن بدلالة الحالة أو الحالات السابقة لهذه المنظومة، وتتكون المنظومة الديناميكية من فضاء الموضع أو الحالة Π (phase space or state space) الذي يمكن أن يكون أي مجموعة جزئية من \mathbb{R}^N تصف إحدائياته الحالة الحركية للمنظومة في أية لحظة زمنية، ومتحول الزمن t الذي يمكن أن يكون مستمراً

$(t \in \mathbb{R})$ أو متقطعاً $(t \in \mathbb{Z})$ ، وعلاقة ديناميكية (دالة رياضية) تحدد قانون التغير

الزمني لمتغير الحالة مع الزمن. يحدد قانون التغير الزمني،

الحالة المستقبلية لمتغيرات فضاء الموضع بدلالة القيم

الحالية لها فقط، على افتراض أن هذه الدالة تحقق الشروط التالية:

$$\phi(0, x) = x \quad .1$$

$$\phi(t_1, \phi(t_2, x)) = \phi(t_1 + t_2, x) \quad .2$$

.3 الدالة $\phi(t, x)$ مستمرة بالنسبة للمتغيرات (t, x) .

النقطة الثابتة: [1]

ليكن لدينا الانسياب المعرف بالشكل:

$$\frac{dx}{dt} = f(x, \mu) \quad (1)$$

تسمى النقطة $x^* \in \mathbb{R}^n$ التي تحقق العلاقة $f(x^*, \mu) = 0$ ، نقطة توازن أو نقطة ثابتة

للمنظومة. يمكننا أن نفرض دون المساس بعمومية المسألة أن النقطة هي $x^* = 0$

بالتالي يمكن جعل هذه المنظومة خطية عن طريق النشر حول هذه النقطة وكتابتها

على الشكل:

$$\frac{dx}{dt} = A(\mu) \cdot x + g(x, \mu).$$

حيث أن $A(\mu)$ هي المصفوفة اليعقوبية للدالة $f(x, \mu)$ ، والتي نحصل عليها من

قيم مشتقات الدالة f بالنسبة لإحداثيات x في نقطة التوازن، وأن:

$$g(x, \mu) = f(x, \mu) - A(\mu) \cdot x \approx 0(x, \mu)$$

و على أي حال، لكي ندرس الاستقرار المحلي للمنظومة (1) قرب نقطة التوازن، نقوم بدراسة الاستقرار الخطي للمنظومة الخطية التالية:

$$\frac{dx}{dt} = A(\mu) \cdot x$$

و يتم ذلك عادةً عن طريق دراسة القيم الذاتية للمصفوفة $A(\mu)$ والتي هي قيم λ التي نحصل عليها عن طريق حل المعادلة المميزة $|\lambda \cdot I - A(\mu)| = 0$ ، حيث أن I هي المصفوفة الواحدية من المرتبة n . فإذا كان الجزء الحقيقي لجميع القيم الذاتية لا يساوي الصفر، فإن نقطة التوازن تدعى زائدية (hyperbolic).

المنحى المستقر (غير المستقر): [1]

نقول عن متجه قيمة ذاتية e_i مقابل للقيمة الذاتية λ_i أنه منحى مستقر (أو غير مستقر) إذا وفقط إذا كان $\lambda_i < 0$ (أو $\lambda_i > 0$). أما إذا كان λ_i عدداً مركباً (عقدي)، وبالتالي لا بدّ من وجود مرافق عقدي لهذه القيمة الذاتية، عندئذٍ نقول أنّ نقطة التوازن x^* هي مركز مستقر (أو غير مستقر) إذا وفقط إذا كان $\text{Re}\{\lambda_i\} < 0$ (أو $\text{Re}\{\lambda_i\} > 0$)، حيث أنّ $\text{Re}\{\lambda_i\}$ هو الجزء الحقيقي للعدد المركب λ_i .

المتنوعة المستقرة (غير المستقرة): [1]

يسمى الفضاء الجزئي من فضاء موضع المنظومة الديناميكية في جوار نقطة التوازن x^* والمتولّد بجميع المتجهات التي تمثل المناحي المستقرة (أو غير المستقرة) للمصفوفة $A(\mu)$ بالتنوعة المحلية المستقرة (أو غير المستقرة) للنقطة x^* . وهكذا فإن المتنوعة المستقرة (أو غير المستقرة) للنقطة x^* ، بشكل عام، هي مجموعة نقاط

فضاء موضع المنظومة الديناميكية التي تسعى إلى النقطة x^* عندما يسعى الزمن t إلى $+\infty$ (أو $-\infty$).

6- النتائج والمناقشة:

ليكن لدينا منظومة هاملتونية مضطربة ذات درجة حرية واحدة :

$$\frac{dX}{dt} = F(X) + \varepsilon f(X, t) \quad (2)$$

حيث $X = [x, y]^T$ و $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ و $f: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ دالة دورية بالنسبة لـ t دورها T ، أي أنه من أجل كل x و t تحقق الدالة f العلاقة $f(X, t) = f(X, t+T)$ كما أنّ $\varepsilon f(X, t)$ هو اضطراب صغير. [2]

عندها $\varepsilon = 0$ ، نحصل على المنظومة الأساسية وهي:

$$\frac{dX}{dt} = F(X) \quad (3)$$

والتي هي منظومة هاملتونية مستقلة، تمتد مساراتها على منحنيات معادلاتها $H(y, x) = E$ ، حيث أنّ E ثابتة مختلفة. بالإضافة إلى ذلك، نفرض أنّ هذه المنظومة تملك نقطة سرجية X_0 ذات اتصال هوموكليني، حيث أنّ $\{q_0(t)\}$ هو المسار الهوموكليني للمنظومة ويحقق المعادلة (3) و يسعى هذا المسار إلى X_0 عندما يسعى الزمن إلى $\pm\infty$.

تطبق $q_0(t)$ على كلتي المتنوعتين المستقرّة $W^s(X_0)$ وغير المستقرّة $W^u(X_0)$ لـ X_0 للمعادلة (3) ومن أجل كلّ t تتطابق المتنوعتان المستقرّة وغير المستقرّة على طول المسار الهوموكلييني.

لاحظ أنّ فضاء الطور للمنظومة (3) هو فضاء ثنائي البعد وأنّ متنوعاتها هي فقط منحنيات سوية.

في حال كانت $\varepsilon \neq 0$ ، سيكون من المفيد اعتبار المنظومة المعلقة:

(4)

$$\frac{dX}{dt} = F(X) + \varepsilon f(X, \theta) \quad ; \quad \frac{d\theta}{dt} = 1$$

وهي منظومة تلقائيّة، فضاءها الطوري ثلاثي البعد بالنسبة لـ (x, θ) ومطابقة للمنظومة الأساسية لـ (2).

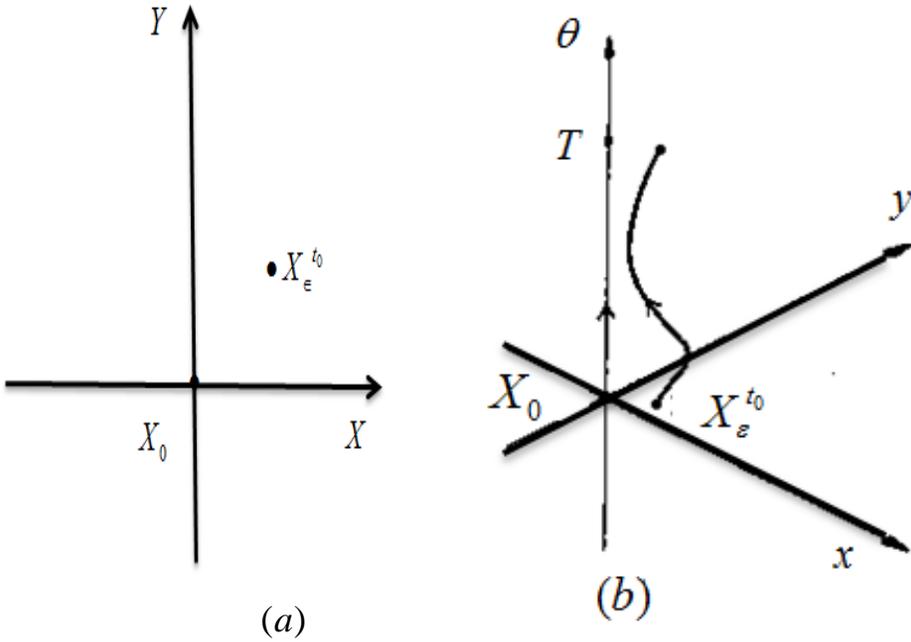
لنعرّف تطبيق بوانكاريه لهذه المنظومة بالشكل:

$$P_\varepsilon^{t_0} : \Sigma^{t_0} \rightarrow \Sigma^{t_0}$$

حيث

$$\Sigma^{t_0} = \{(x, \theta) : \theta = t_0 \in [0, t)\}$$

يملك هذا التطبيق $P_\varepsilon^{t_0}$ نقطة ثابتة $X_\varepsilon^{t_0}$ تحقق $X_\varepsilon^{t_0} = X_0 + O(\varepsilon)$ ، وتتطابق هذه النقطة الثابتة مع مسار دوري للمنظومة (4) كما هو موضح بالشكل:



الشكل (1) في (a): النقطة الثابتة $X_\epsilon^{t_0}$ للتطبيق $P_\epsilon^{t_0}$ و النقطة الثابتة X_0 للتطبيق $P_\epsilon^{t_0}$ في المستوي (x, y) وفي (b): المسار الدوري للمنظومة (2) الموافق للنقطة الثابتة $X_\epsilon^{t_0}$ والمسار الدوري الموافق للمنظومة (3)

نرمز للمتوعة المستقرّة للنقطة الثابتة لتطبيق بوانكاريه $P_\epsilon^{t_0}$ بالرمز $M_\epsilon^s(X_\epsilon^{t_0})$ والمتوعة غير المستقرّة بـ $M_\epsilon^u(X_\epsilon^{t_0})$.

وبشكل خاص، سنأخذ $M_0^s(X_0) = W^s(X_0)$ و $M_0^u(X_0) = W^u(X_0)$ على طول المسار الهوموكليني. من جهة أخرى أيّ كان $x \in M_\epsilon^s(X_\epsilon^{t_0})$ تتقارب صور هذه النقاط وفق تطبيق بوانكاريه $(P_\epsilon^{t_0})^n(x)$ بشكل

أسي من $X_\varepsilon^{t_0}$ عندما $n \rightarrow \infty$ ، وبشكل مشابه أياً كان $x \in M_\varepsilon^u(X_\varepsilon^{t_0})$ عندها تتقارب الصور العكسية $(P_\varepsilon^{t_0})^n(x)$ بشكل أسي من $X_\varepsilon^{t_0}$ عندما $n \rightarrow -\infty$ [3]

باختيار نقطة كيفية q_0 على المسار الهوموكليني للمنظومة الأساسية (3) وبأخذ طور الحل q_0 التي من أجلها تكون $q_0(0)$ النقطة المختارة. بعدها بحساب المسافة M بين المتنوعة المستقرة $M_\varepsilon^s(X_\varepsilon^{t_0})$ وغير المستقرة $M_\varepsilon^u(X_\varepsilon^{t_0})$ في جوار النقطة $q_0(0)$ من أجل كل t_0 على أن نلاحظ أن هذه المسافة M ستكون تابعة لـ $q_0(0)$ والطور t_0 . فإذا وجدت قيمة لـ t_0 تتقاطع المتنوعتان المستقرة $M_\varepsilon^s(X_\varepsilon^{t_0})$ وغير المستقرة $M_\varepsilon^u(X_\varepsilon^{t_0})$ بشكل أسي في التقاطع الرأسي Σ^{t_0} ، وذلك لأن t_0 طور q_0 فقط، والانسحاب الزمني يكافئ إلى الانسحاب على المسار الهوموكليني، وتتقاطع المتنوعتان عدد لا نهائي من المرات ليس فقط من أجل هذه القيمة ولكن من أجل كل قيم t_0 .

الآن نوجد بدايةً معادلات المسارات $\{q_\varepsilon^s(t, t_0), t\}$ و $\{q_\varepsilon^u(t, t_0), t\}$ والتي تحقق أن المعادلة (4) تقع على طول المتنوعتين المستقرة $M_\varepsilon^s(X_\varepsilon^{t_0})$ وغير المستقرة $M_\varepsilon^u(X_\varepsilon^{t_0})$ في الفضاء الطوري ثلاثي البعد.

بعدها، بنشر حلّي المنظومة (2) في جوار t_0 نجد:

(5)

$$q_{\varepsilon}^s(t, t_0) = q_0(t-t_0) + \varepsilon q_1^s(t, t_0) + O(\varepsilon^2) \quad t \geq t_0$$

$$q_{\varepsilon}^u(t, t_0) = q_0(t-t_0) + \varepsilon q_1^u(t, t_0) + O(\varepsilon^2) \quad t \leq t_0$$

وباختيار الحدود الخطية فقط في جوار q_0 من أجل ε صغير نجد أن:

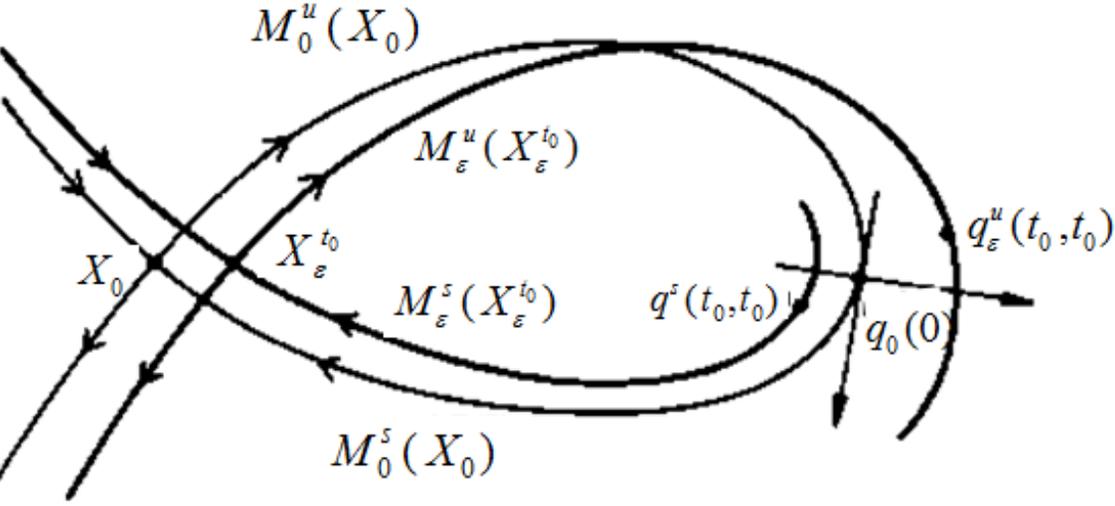
$$\frac{dq_1^s(t, t_0)}{dt} = J(q_0(t-t_0)) q_1^s(t, t_0) + f(q_0(t-t_0), t) \quad (6)$$

من أجل $t \geq t_0$ ، حيث J المصفوفة اليعقوبية لـ F ، تحقق $q_1^u(t, t_0)$ المعادلة (6) من أجل كل $t \leq t_0$.

من أجل ε صغير، نحسب البعد بين المتنوعتين المستقرّة وغير المستقرّة عن طريق قياسها في اتجاه ناظم المسار الهوموكليني للمنظومة (3) في النقطة $q_0(0)$ حيث يعطى متجه الإزاحة بالعلاقة:

$$d(t_0) = q_{\varepsilon}^u(t_0, t_0) - q_{\varepsilon}^s(t_0, t_0) \quad (7)$$

علماً أنّ $q_{\varepsilon}^s(t, t_0)$ و $q_{\varepsilon}^u(t, t_0)$ نقطتان مجاورتان لـ $q_0(0)$ ، والمتنوعتان مماسان للمسار الهوموكليني عند $q_0(0)$ ، كما في الشكل 2:



الشكل (2) : المسافة بين المدارات على المتتوعتين المستقرة وغير المستقرة بالقرب من $q_0(0)$ في اللحظة

$$t_0$$

ونلاحظ أنه إذا كان: $F = [F_1, F_2]^T$ عندئذ يعطى متجه واحدة الناظم الخارجي بالشكل:

$$n = [-F_2(q_0(0)), F_1(q_0(0))]^T / |F(q_0(0))|$$

تعرف مسافة ميلنيكوف بين المتتوعتين في النقطة $q_0(0)$ بالشكل:

$$D(t_0) = d \cdot n \quad (8)$$

$$= \frac{\varepsilon F(q_0(0)) \wedge \{q_1^u(t_0, t_0) - q_1^s(t_0, t_0)\}}{|F(q_0(0))|} + O(\varepsilon^2)$$

(9)

حيث الجداء الخارجي لأي زوج من المتجهين $a = [a_1, a_2]^T$ و $b = [b_1, b_2]^T$ ،
معرف بالعلاقة :

$$a \wedge b = a_1 b_2 - a_2 b_1$$

من أجل حساب D ، تساعدنا المعادلة (6) في إزالة q_1^s و q_1^u من العبارة (8) وذلك
لأن q_1^s و q_1^u غير معرفة صراحةً.

نعرف بدايةً:

$$\Delta^s(t, t_0) = F(q_0(t-t_0)) \wedge q_1^s(t, t_0) \quad (10)$$

بالاشتقاق نجد أنّ:

$$\begin{aligned}
 \frac{d \Delta^s(t, t_0)}{dt} &= J(q_0(t-t_0)) F(q_0(t-t_0)) \wedge q_1^s(t, t_0) \\
 &\quad + F(q_0(t-t_0)) \wedge \frac{d q_1^s(t, t_0)}{dt} \\
 &= J(q_0(t-t_0)) F(q_0(t-t_0)) \wedge q_1^s(t, t_0) \\
 &\quad + F(q_0(t-t_0)) \wedge \{ J(q_0(t-t_0)) q_1^s(t, t_0) + f(q_0(t-t_0), t) \} \\
 &= \text{trace}\{J(q_0(t-t_0))\} F(q_0(t-t_0)) \wedge q_1^s(t, t_0) \\
 &\quad + F(q_0(t-t_0)) \wedge f(q_0(t-t_0), t) \\
 &= F(q_0(t-t_0)) \wedge f(q_0(t-t_0), t). \\
 (11)
 \end{aligned}$$

و ذلك لأن:

$$(J a) \wedge b + a \wedge (J b) = (\text{trace } J)(a \wedge b)$$

$$\text{trace } J = \partial F_1 / \partial x_1 + \partial F_2 / \partial y = \partial^2 H / \partial x \partial y - \partial^2 H / \partial y \partial x = 0$$

بمكاملة (11) من t_0 إلى ∞ نجد أن:

$$\Delta^s(t_0, t_0) = \Delta^s(\infty, t_0) - \int_{t_0}^{\infty} F(q_0(t-t_0)) \wedge f(q_0(t-t_0), t) dt$$

(12)

حيث

$$\Delta^s(\infty, t_0) = \lim_{t \rightarrow \infty} F(q_0(t-t_0)) \wedge q_1^s(t, t_0) = 0$$

لأن $q_1^s(t, t_0)$ محدود و $\lim_{t \rightarrow \infty} F(X_0) = 0$.

بالتعويض في (11) نجد أن:

$$\Delta^s(t_0, t_0) = - \int_{t_0}^{\infty} F(q_0(t-t_0)) \wedge f(q_0(t-t_0), t) dt \quad (13)$$

بنفس الطريقة نجد أن:

$$\Delta^u(t_0, t_0) = \int_{-\infty}^{t_0} F(q_0(t-t_0)) \wedge f(q_0(t-t_0), t) dt \quad (14)$$

بتعويض (13) و (14) في المعادلة (9) نجد أن:

$$D(t_0) = \frac{\varepsilon M(t_0)}{|F(q_0(0))|} + O(\varepsilon^2) \quad (15)$$

حيث أن $M(t_0)$ هي دالة ميلنيكوف المعرّفة بالشكل :

$$M(t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} F(q_0(t_0-t)) \wedge f(q_0(t_0-t), t) dt \quad (16)$$

بشكل عام، إذا ملكت الدالة M صفراً بسيطاً τ ، عندها تملك المسافة D صفراً بسيطاً في جوار τ من أجل ε صغير وتتقاطع المتنوعتان المستقرّة وغير المستقرّة عدداً لا نهائياً من المرات عند النقطة الموافقة لـ $t_0 = \tau$.

و إذا لم تملك الدالة M صفراً بسيطاً عندها لن تملك المسافة D صفراً بسيطاً أيضاً، ولن تتقاطع المتنوعتان المستقرّة وغير المستقرّة. [4]

مثال تطبيقي:

تعطى معادلة دفينغ ذات القساوة السالبة بالشكل:

$$\frac{dx}{dt} = y \quad \frac{dy}{dt} = x - x^3 + \varepsilon(\gamma \cos wt - \delta y)$$

حيث $0 < \varepsilon \leq 1$ و $r, \delta, w > 0$.

لنضع $f = [0, \gamma \cos wt - \delta y]^T$ و $F = [y, x - x^3]^T$ من أجل $\varepsilon = 0$ ، توجد نقطة سرجية عند نقطة الأصل $(0, 0)$ في المستوي الطوري مع منحنين هوموكلينيين متناظرين. [5]

وتملك مسارات المنظومة الأساسية المعادلة $H(y, x) = E$ ، حيث

$$F = (\partial H / \partial y, -\partial H / \partial x) \Rightarrow (y, x - x^3) = (\partial H / \partial y, -\partial H / \partial x)$$

$$\partial H / \partial y = y \Rightarrow H = \frac{1}{2} y^2$$

$$-\partial H / \partial x = x - x^3 \Rightarrow H = \frac{1}{4} x^4 - \frac{1}{2} x^2$$

$$\Rightarrow H = \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x^4 = E$$

ومنه ينتج معادلة المسارات الهوموكليتيّة ، وذلك عندما $E=0$ ، أي أنّ

$$\frac{1}{2}y^2 = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}x^4 \Rightarrow y = \pm x \sqrt{1 - \frac{1}{2}x^2} \quad (17)$$

ومن معادلة دفينغ لدينا $y = \frac{dx}{dt}$ بتعويضها في (16) وبالمكاملة نجد أنّ:

$$\int \frac{\frac{dx}{\sqrt{2}}}{\frac{x}{\sqrt{2}} \sqrt{1 - \left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2}} = t \Rightarrow t = \operatorname{arcsec} h \frac{x}{\sqrt{2}}$$

ومنّه نجد $x = \sqrt{2} \operatorname{sech} t$ ، وبالتعويض في (17) نجد:

$$y = \pm \sqrt{2} \operatorname{sech} t \sqrt{1 - \frac{1}{2} 2(\operatorname{sech} t)^2} = \pm \sqrt{2} \operatorname{sech} t \sqrt{1 - \frac{1}{\cosh^2 t}} = \pm \sqrt{2} \operatorname{sech} t \tanh t$$

ويصبح الحل الهوموكليتي معطى بالشكل:

$$q(t) = \pm \left(\sqrt{2} \operatorname{sech} t , \sqrt{2} \operatorname{sech} t \tanh t \right)$$

و بأخذ $q_0(0) = (\pm \sqrt{2} , 0)$ ، ولنوجد دالة ميلنيكوف المعطاة بالشكل:

$$M(t_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(q_0(t-t_0)) \wedge f(q_0(t-t_0)) dt$$

بتعويض قيمة الدالتين F و f في عبارة التكامل:

$$M(t_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} y_0(t-t_0) \{ \gamma \cos wt - \delta y_0(t-t_0) \} dt. \quad (18)$$

بإجراء تغيير في المتحول أي $x=t-t_0$ وتعويضها في (18) نجد:

$$M(t_0) = \sqrt{2} \gamma \sin wt_0 \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{sech} x \tanh x \sin wx dx - 2\delta \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{sech}^2 x \tanh^2 x dx. \quad (19)$$

نلاحظ أن قيمة الدالة M مرتبطة بقيمة التكاملين، ولنوجد قيمة التكاملين:

$$I_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \tanh^2 x \operatorname{sech}^2 x dx = \frac{1}{3}(1+1) = \frac{2}{3} \quad (20)$$

أما التكامل الثاني فيحل عن طريق نظرية الرواسب

$$I_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{sech} x \tanh x \sin wx dx$$

نعلم أن $e^x = \cos x + i \sin x$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{sech} x \tanh x e^{iwx} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{sech} x \tanh x \cos x dx + i \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{sech} x \tanh x \sin wx dx$$

نكامل الطرف الأول بالتجزئة:

$$u = e^{iwx} \quad , \quad du = i w e^{iwx} dx$$

$$dv = \operatorname{sech} x \tanh x \quad , \quad v = -\operatorname{sech} x$$

بالتعويض في التكامل نجد أن:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{sech} x \tanh x e^{iwx} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{sech} x e^{iwx} dx$$

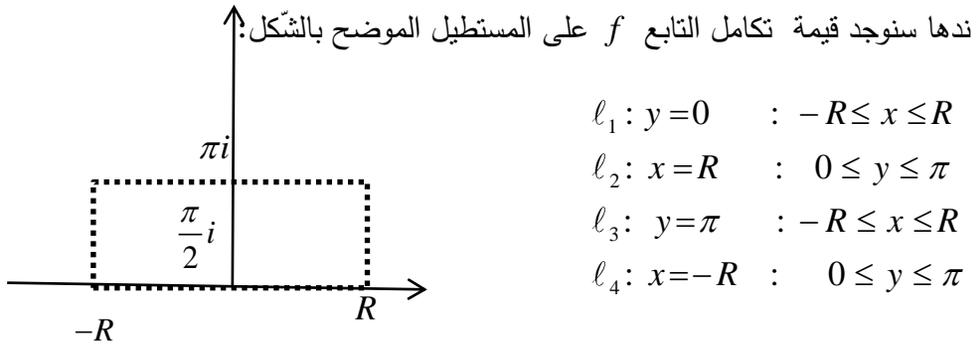
من جهة أخرى يمكن كتابة التكامل بالشكل الآتي:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{sech} x e^{iwx} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2e^{iwx}}{e^x + e^{-x}} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2e^{(iw+1)x}}{1+e^{2x}} dx$$

لنفرض أن التابع $f = \frac{2e^{(iw+1)x}}{1+e^{2x}}$ يملك عدد لا نهائي من النقاط الشاذة في المستوي

العقدي $x = (2k+1)\frac{\pi}{2}i$ ، فإنه من غير المناسب اختيار منطقة التكامل

على شكل دائرة كبيرة فإنها سوف تحتوي عدد لا نهائي من النقاط الشاذة.



ونلاحظ أن النقطة الشاذة $x = \frac{\pi i}{2}$ تقع داخل C حسب مبرهنة كوشي للرواسب

$$\begin{aligned}
 \oint_C \frac{e^{(iw+1)x}}{1+e^{2x}} dx &= \int_{-R}^R \frac{2e^{(iw+1)x}}{1+e^{2x}} dx + \int_0^\pi \frac{2e^{(iw+1)(R+iy)}}{1+e^{2(R+iy)}} i dy \\
 &+ \int_{+R}^{-R} \frac{2e^{(iw+1)(x+\pi i)}}{1+e^{2(x+\pi i)}} dx + \int_\pi^0 \frac{2e^{(iw+1)(-R+iy)}}{1+e^{2(-R+iy)}} i dy \\
 &= 2\pi i \operatorname{Res} \left(\frac{2e^{(iw+1)x}}{1+e^{2x}}, \frac{\pi}{2} i \right) = 2\pi i \frac{e^{(iw+1)\frac{\pi}{2}i}}{e^{\pi i}} = 2\pi e^{-\frac{w\pi}{2}}
 \end{aligned}$$

ويجعل $R \rightarrow \infty$ نجد أن:

$$\left| \int_\pi^0 \frac{2e^{(iw+1)(-R+iy)}}{1+e^{2(-R+iy)}} i dy \right| \leq \pi \frac{2e^{-(iw+1)R}}{1+e^{-2R}} \rightarrow 0$$

$$\left| \int_0^\pi \frac{2e^{(iw+1)(R+iy)}}{1+e^{2(R+iy)}} i dy \right| \leq \int_0^\pi \frac{2e^{(iw+1)R}}{1+e^{2R}} dy = \pi \frac{e^{(iw+1)R}}{1+e^{2R}} \rightarrow 0$$

و

$$\begin{aligned}
 \int_{-R}^{+R} \frac{e^{(iw+1)x}}{1+e^{2x}} dx - \int_{-R}^{+R} \frac{e^{(iw+1)(x+\pi i)}}{1+e^{2(x+\pi i)}} dx &= \int_{-R}^{+R} \frac{e^{(iw+1)x}}{1+e^{2x}} dx - \int_{-R}^{+R} \frac{e^{(iw+1)x} e^{(iw+1)\pi i}}{1+e^{2x} e^{2\pi i}} dx = \int_{-R}^{+R} \frac{e^{(iw+1)x}}{1+e^{2x}} dx \\
 + \int_{-R}^{+R} \frac{e^{(iw+1)x} e^{-w\pi}}{1+e^{2x}} dx &= (1+e^{-w\pi}) \int_{-R}^{+R} \frac{2e^{(iw+1)x}}{1+e^{2x}} dx = 2\pi e^{-\frac{w\pi}{2}}
 \end{aligned}$$

ومنه نجد أن

$$\int_{-R}^{+R} \frac{2e^{(i w+1)x}}{1+e^{2x}} dx = \frac{2\pi e^{-\frac{w\pi}{2}}}{1+e^{-w\pi}} = \frac{2\pi}{e^{\frac{w\pi}{2}} + e^{-\frac{w\pi}{2}}} = \pi \operatorname{sech} \frac{w\pi}{2} \quad (21)$$

بتعويض قيمة التكاملين (20) و (21) في (19) نجد أن:

$$M = -\frac{4\delta}{3} + \sqrt{2} \pi \gamma w \operatorname{sech}\left(\frac{1}{2} \pi w\right) \sin(wt_0)$$

بفرض أن:

$$R^0(w) = \frac{4 \cosh\left(\frac{\pi w}{2}\right)}{3\sqrt{2} \pi w}$$

فإذا كان $\frac{\gamma}{\delta} > R^0(w)$ عندها تتقاطع المتنوعتان المستقرّة وغير المستقرّة من أجل ε

صغير، بينما إذا كان $\frac{\gamma}{\delta} < R^0(w)$ عندها $M < 0$ ولن تتقاطع المتنوعتان المستقرّة

وغير المستقرّة.

ملاحظة: [6]

إذا كانت الدالة f هاملتونية (أي مشتقة من دالة هاملتونية):

$$f_1 = \frac{\partial G}{\partial y} \quad f_2 = -\frac{\partial G}{\partial x}$$

عندها تصبح دالة ميلنيكوف معطاة بالشكل :

$$M(t_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \{H(q_0(t-t_0)), G(q_0(t-t_0)), t\} dt$$

حيث $\{H, f\}$ قوس بواسون المعطى بالشكل:

$$\{H, G\} = \frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial G}{\partial y} - \frac{\partial H}{\partial y} \frac{\partial G}{\partial x}.$$

الاستنتاجات والمقترحات:

بعد استنتاج طريقة ميلنيكوف بشكل نظري، استطعنا تطبيق هذه الطريقة على منظومة ذات درجة حرية واحدة والتي هي معادلة دفينغ ذات القساوة السالبة، وأوجدنا دالة ميلنيكوف، وبيئاً أنّ أصفار هذه الدالة تشير إلى النقطعات الرأسية المتنوعتين المستقرة وغير المستقرة.

بالإضافة إلى ذلك، يمكن تطبيق طريقة ميلنيكوف في حال كانت المنظومة أكثر من درجة حرية واحدة، وكانت الدالة F المذكورة في المعادلة (1) غير هاملتونية، لذلك نرجو دراسة تلك الطريقة في تلك الحالتين مع ذكر أمثلة توضيحية لذلك.

المراجع:

- 1- ALI M., 2005- Chaos predictability and controiability in nonlinear system
" Ph D Thesis", University of Delhi, Delhi.
- 2- BENETTIN G., 2002- The elements of Hamiltonian perturbation theory , Dipartimento di Matematic ,
University de Padava, Italy.
- 3- WIGGINS S., 2003- Introduction to applied nonlinear dynamical systems and chaos. Volume 2 ed, Springer science & Business Media, New york , USA.
- 4- Drazin P.G, 1992 – Nonlinear systems. Cambridge University press , NewYork , USA.
- 5- FASSO F., 2016 – Homoclinic chaos and the Poincare – Melnikov method. University de Padova " Galileo Galilei" , Italy.
- 6- Matkowsky B., 1970- A simple nonlinear dynamical stability problem , Bull,Amer,Moscow,Russia.

