وجود الحل المستمر لمعادلة مونـج ـأمبـير العقديـة من أجل قياس يـحقق بـعض الشروط

الدكتور: محمد شراباتي

كلية العلوم – جامعة البعث

الملخص

ندرس في هذا البحث مسألة وجود الحل المستمر لمعادلة مونج ـ أمبير العقدية في ساحة محدودة من $\mathbb{R}^n$ ، في حالة كون الطرف الثاني من المعادلة هو قياس محدود بقياس مونج ـ أمبير لتابع متعدد تحت توافقي ومستمر وبمعامل استمرار من نمط معين.

كما نؤكد على أن هذا القياس محدود بواسطة سعة بيدفورد ـ تايلور وكذلك نثبت مبرهنة تتعلق بمكاملة التوابع المتعددة تحت توافقية بالنسبة لهذا القياس.

الكلمـات المفتاحيـة. معادلـة مونج . أمبيـر العقديـة، سـعة بيدفورد وتـايلور، مبـدأ المقارنـة، التابع المتعدد تحت توافقي.

The existence of continuous solution to the complex Monge-Ampere equation for a measure satisfying some conditions

Dr. Mohamad Charabati
Faculty of Science / Al-Baath University

Abstract

We study in this paper the problem of the existence of continuous solution to the complex Monge-Ampere equation in a bounded domain in $\mathbb{C}^n$, in the case that the right-hand side is a measure dominated by the Monge-Ampere measure of a continuous plurisubharmonic function with special modulus of continuity.

We ensure that such a measure is well dominated by Bedford-Taylor capacity and also obtain a theorem for the integrability of plurisubharmonic function with respect to this measure.

Key Words: Complex Monge-Ampere equation, Bedford-Taylor capacity, comparison principle, plurisubharmonic function.

المقدمـة.

تعد معادلة مونج ـ أمبير العقدية واحدة من أهم المسائل البحثية في الرياضيات وبشكل أخص في التحليل العقدي والتي يتم دراستها منذ عدة سنوات وحتى وقتنا الحالي.

ويعود الفضل الرئيس في دراستها إلى العالم ياو Yau الذي درس وجود الحل الأملس لمعادلة مونج ـ أمبير العقدية فوق متنوعة كالير المتراصة، وكذلك إلى أبحاث العالمين بيدفورد Bedford وتايلور Taylor واللذين أثبتا وجود حل ضعيف لهذه المعادلة، كما عرفا مؤثر مونج ـ أمبير العقدي لتوابع متعددة تحت توافقية محدودة محلياً.

سنعرض في هذا البحث مسألة ديرخليه من أجل معادلات مونج ـ أمبير العقدية في ساحة محدودة $\Omega \subset \mathbb{C}^n$. ليكن φ تابع مستمر على حدود الساحة $\partial\Omega$ و μ هو قياس بوريل على Ω بحيث $\mu(\Omega) < \infty$ ، إن مسألة ديرخليه هنا تمثل وجود تابع u متعدد تحت توافقي في الساحة Ω ومستمر على $\overline{\Omega}$ بحيث يكون:

$$\begin{cases} (dd^c u)^n = \mu & in\ \Omega \\ u = \varphi & on\ \partial\Omega \end{cases} \qquad (1)$$

هنا $(dd^c.)^n$ يشير إلى مؤثر مونج ـ أمبير العقدي.

لقد تمت دراسة هذه المسألة من قبل عدة باحثين وهنا نشير إلى المراجع [2] و[6] و [9] و [12] وذلك لمزيد من المعلومات حول الموضوع.

في بادئ الأمر، تم إثبات وجود الحل المستمر للمسألة من قبل Bedford و Taylor في [2] من أجل قياس ليبيغ في $\mathbb{C}^n$ على ساحة ذات حدود ملساء.

كما تمكن Kolodziej في [11] من الوصول إلى وجود حل مستمر للمسألة في حال كون القياس μ محدوداً بالسعة أي

$$\mu(K) \le ACap(K,\Omega)^{1+\alpha}$$

حيث A و α ثوابت موجبة.

كما تم دراسة وجود الحل واستمرارية هولدر له في [5] وذلك على ساحة ذات حدود غير ملساء والطرف الثاني من المعادلة هو قياس هاوسدورف ـ ريس، كما تمت دراسة المسألة في حال وجود حل جزئي مستمر ويحقق شرط هولدر في [13] و [14] .

الهدف من البحث.

إن الهدف من هذا البحث هو دراسة وجود الحل المستمر لمسألة ديرخليه (1) على ساحة ذات حدود غير ملساء وذلك من أجل قياس بوريل موجب μ (أي القياس المعرف على المجموعات البوريلية) يحقق:

$$\mu \leq (dd^c w)^n$$

حيث w هو تابع متعدد تحت توافقي في الساحة Ω ومستمر على $\overline{\Omega}$ (لصاقة Ω) ومعامل استمراره ω يحقق العلاقة:

$$\int_0^1 \frac{\omega(t)}{t^{1+\delta}} dt < \infty \qquad (2)$$

حيث $\delta > 0$ ثابت.

بعض المفاهيم الأساسية.

تعريــف.

نقول عن التابع $u\colon \Omega \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ إنه متعدد تحت توافقي plurisubharmonic على Ω إذا كان هذا التابع تحت توافقي على تقاطع المجموعة Ω مع أي مستقيم عقدي من الشكل $\{a + b\xi \ ; \ \xi \in \mathbb{C}\}$ حيث $a, b \in \mathbb{C}^n$.

نرمز عادة بـ $PSH(\Omega)$ لمجموعة جميع التوابع المتعددة تحت التوافقية على Ω .

سنورد هنا بعض الخصائص الأساسية لهذه التوابع ويمكن الرجوع إلى إثباتها في المرجع[10].

1. إذا كان $u, v \in PSH(\Omega)$ فإن $\lambda\, u + \mu v \in PSH(\Omega)$ حيث $\lambda, \mu \geq 0$.

2. إذا كان $u \in PSH(\Omega)$ و $\chi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ تابع محدب متزايد فإن $\chi \circ u \in PSH(\Omega)$.

3. إذا كانت $\{u_j\}$ متتالية متناقصة من التوابع من $PSH(\Omega)$ فإن $u := \lim_{j\to\infty} u_j$ هو تابع متعدد تحت توافقي في Ω .

4. إذا كان $u \in PSH(\Omega)$ فإن $u_{\mathcal{E}} = u * \rho_{\mathcal{E}}$ هو تابع متعدد تحت توافقي في الساحة $\Omega_{\mathcal{E}} := \{z \in \Omega | dist(z, \partial\Omega) > \mathcal{E}\}$ ، حيث إنّ $(\rho_{\mathcal{E}})$ أسرة النوى الملساء ذات الدعامات المتراصة $supp\rho_{\mathcal{E}} \subset B(0, \mathcal{E})$ بحيث $\int_{B(0,\mathcal{E})} \rho_{\mathcal{E}}\, dv = 1$ ويكون $u \searrow u_{\mathcal{E}}$ عندما $0 \searrow \mathcal{E}$ و يسمى $u_{\mathcal{E}}$ التنظيم القياسي standard regularization للتابع u .

5. لتكن U مجموعة جزئية مفتوحة من Ω ، إذا كان $u \in PSH(\Omega)$ و $v \in PSH(U)$ و $\lim sup_{z\to y} v(z) \le u(y)$ من أجل أي $y \in \partial U \cap \Omega$ ، عندئذ يكون التابع

$$\omega = \begin{cases} max\{u, v\} & in\ U \\ u & in\ \ \Omega \backslash U \end{cases}$$

متعدد تحت توافقي في Ω .

6. لتكن $\{u_\alpha\} \subset PSH(\Omega)$ أسرة من التوابع المحدودة محلياً وبانتظام من الأعلى، وليكن $u = sup\, u_\alpha$ عندها يكون التابع

$$u^*(x) = \limsup_{\substack{y \to x \\ y \in \Omega}} u(y)$$

متعدد تحت توافقي ويساوي u تقريباً في كل مكان.

لنعرف الآن المؤثرين التفاضليين $d = \partial + \bar{\partial}$ و $d^c = i/4(\bar{\partial} - \partial)$ عندها يكون

$$dd^c = i/2\, \partial\, \bar{\partial}$$

إذا كان التابع u أملساً في الساحة Ω فإنه من الواضح أن

$$dd^c u = i/2 \sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial z_j\, \partial \overline{z_k}} dz_j \wedge d\overline{z_k}$$

وبذلك يمكن تعريف مؤثر مونج ـ أمبير العقدي للتوابع الملساء كما يلي:

$$(dd^c u)^n = det\left(\frac{\partial^2 u}{\partial z_j\, \partial \overline{z_k}}\right) \beta^n$$

حيث

$$\beta = i/2 \sum_{j=1}^{n} dz_j \wedge d\overline{z_j}$$

وتمكن بيدفورد وتايلور في بحثهما [2] من تعميم تعريف هذا المؤثر إلى توابع متعددة تحت توافقية محدودة محلياً وإثبات أن $(dd^c u)^n$ يشكل قياساً على المجموعة Ω .

سنحتاج في بحثنا إلى مفهوم السعة لمجموعة بمفهوم بيدفورد وتايلور Bedford-Taylor capacity ولذلك سنورد التعريف التالي:

تعريـــف.

لتكن K مجموعة جزئية من المجموعة Ω نعرف السعة وفق بيدفورد وتايلور، والتي سنرمز لها $Cap(K,\Omega)$ ، بالعلاقة:

$$Cap(K,\Omega) = sup\left\{\int_K (dd^c u)^n \quad ; u \in PSH(\Omega); -1 \leq u \leq 0\right\}$$

سنورد الآن مبدأ المقارنة المتعلق بمؤثر مونج . أمبير العقدي والذي يساعدنا في إثبات وحدانية الحل لمسألة ديرخليه المدروسة.

مبرهنة (مبدأ المقارنة)[12].

ليكن $u, v \in PSH(\Omega)$ بحيث $lim\, inf_{z\to\partial\Omega}\big(u(z) - v(z)\big) \geq 0$ ، وإذا كان $(dd^c u)^n \leq (dd^c v)^n$ بمعنى القياس على Ω ، عندئذ فإن $u \leq v$ في Ω .

سنتعامل في بحثنا هذا مع نمط من المجموعات المحدودة وذات حدود ليست بالضرورة أن تكون ملساء كما في التعريف التالي:

تعريـــف.

نقول عن الساحة المحدودة $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ إنها ساحة ليبشتز فوق محدبة بقوة إذا وجدت مجموعة مفتوحة Ω' تحوي $\overline{\Omega}$ وتابع متعدد تحت توافقي يحقق شرط ليبشتز $\rho: \Omega' \to \mathbb{R}$ بحيث يكون:

- $\Omega = \{\rho < 0\}$ و $\partial\Omega = \{\rho = 0\}$.
- $dd^c\rho \geq \beta$ في Ω .

مثال.

1. كل ساحة محدبة بقوة هي ساحة ليبشتز فوق محدبة بقوة، وذلك يعود لوجود تابع تعريف للساحة المحدبة بقوة ρ وهو تابع ليبشتز يحقق $\rho - c|z|^2$ محدب حيث c ثابت موجب.
2. كل ساحة شبه محدبة بقوة strictly psuedoconvex هي ساحة ليبشتز فوق محدبة بقوة.
3. تقاطع أي عدد منتهٍ من ساحات ليبشتز فوق محدبة بقوة هو أيضاً ساحة ليبشتز فوق محدبة بقوة.

النتائج ومناقشتها.

بداية نذكر بتعريف معامل الاستمرار للتابع w والذي نرمز له بالرمز $\omega(t)$ والمعرف بالعلاقة:

$$\omega(t) = \sup_{|x-y|\leq t} |w(x) - w(y)|$$

نريد في هذا البحث الوصول إلى إثبات المبرهنة الآتية التي تضمن لنا وجود الحل المستمر لمسألة ديرخليه من أجل قياس بوريل محدود بقياس مونج . أمبير لتابع مستمر وذلك على ساحة ذات حدود غير ملساء.

مبرهنة 1.

ليكن φ تابع مستمر على $\partial\Omega$ أي $\varphi \in C(\partial\Omega)$ ، ليكن μقياس بوريل الموجب على ساحة ليبشتز فوق محدبة بقوة $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ ويحقق $\mu \leq (dd^c w)^n$ حيث w تابع متعدد تحت توافقي على Ω ومستمر على $\overline{\Omega}$ ومعامل استمراره يحقق العلاقة (2)، عندئذ يوجد حل وحيد ومستمر لمسألة ديرخليه (1).

ولإثبات هذه المبرهنة سنتبع الخطوات التالية:

1. إيجاد حد أعلى لتكاملات جميع التوابع $\varphi \in PSH(\Omega)$ السالبة والمحدودة في Ω والتي من أجلها يكون $\int_\Omega (dd^c\varphi)^n \leq 1$ ، وذلك بالنسبة للقياس μ المعرف آنفاً.
2. الحصول على محدودية للقياس μ بدلالة سعة مونج ـ أمبير وذلك لأي مجموعة متراصة $K \subset \Omega_\varepsilon$.
3. إثبات المبرهنة المساعدة والتي تضمن وجود الحل المستمر لمسألة ديرخليه من أجل أي قياس محدود بالسعة مع افتراض وجود حل جزئي لها.
4. تشكيل الحل الجزئي المناسب للمسألة ومن ثم الاستفادة مما تم إثباته للوصول إلى وجود حل مستمر ووحيد لمسألة ديرخليه المعطاة.

في المرحلة الأولى نحتاج إلى تقدير التكاملات لتوابع متعددة تحت توافقية بالنسبة للقياس μ، وهذا ما يستدعي إثبات المبرهنة التالية:

مبرهنة2.

ليكن μ قياس بوريل على الساحة Ω ، كما في المبرهنة 1، من أجل أي مجموعة متراصة $K \subset \Omega_\varepsilon$ ، وأي عدد موجب λ يوجد عدد موجب c بحيث يتحقق:

$$\int_K (-\varphi)^{n+\lambda} d\mu \le \frac{c}{\varepsilon^{2n}} \qquad (4)$$

حيث $\varphi \in PSH(\Omega)$ تابع سالب ومحدود في Ω بحيث يحقق $\int_\Omega (dd^c\varphi)^n \le 1$.

البرهان.

لنضع $a := 3/\delta$ ، حيث δ ثابت موجب كما في العلاقة (2)، ولنثبت بالاستقراء صحة العلاقة الآتية:

$$\int_K (-\varphi)^{(n+\lambda)a^{2n-2j}} (\mathrm{dd^c w})^{\mathrm{j}} \wedge \beta^{\mathrm{n-j}} \le \frac{\mathrm{c}}{\varepsilon^{2\mathrm{j}}} \mathrm{B^j} \qquad (5)$$

حيث $B = 2(n!)^{1/2}\left(4||w||^2 + n||w|| + n\right)^{n/2}$ و $j = 0,1,\dots,n$.

لقد تم الإثبات في [1] أن:

$$\int_\Omega e^{-2\varphi} dV \le \left(\pi^n + \frac{a_n}{(n-1)^n}\right)\left(diam(\Omega)\right)^{2n}$$

حيث a_n ثابت يتعلق فقط بـ n .

ليكن $\chi: \Omega \to [0,1]$ تابع أملس ذي دعامة متراصة في $\Omega_{\varepsilon/2}$ ويساوي الواحد على Ω_ε ولنعرف التابعين $\varphi_M = max\{\varphi, -M\}$ و $\psi_M = \varphi_{M-1} - \varphi_M$ حيث $M \ge 0$.

من الواضح أن

$$0 \le \psi_M \le 1$$

كما أن ψ_M يساوي الواحد على المجموعة $\{\varphi < -M\}$ ودعامته محتواه في $\{\varphi < -M + 1\}$.

لنفرض أن العلاقة (5) صحيحة من أجل $j - 1$ أي أن

$$\int_K (-\varphi)^{(n+\lambda)\, a^{2n-2j+2}} (\mathrm{dd^c w})^{\mathrm{j-1}} \wedge \beta^{\mathrm{n-j+1}} \le \frac{\mathrm{c}}{\varepsilon^{2\mathrm{j-2}}} \mathrm{B^{j-1}}$$

الآن لدينا

$$I=\int_{K\cap\{\varphi<-M\}}(dd^cw)^j\wedge\beta^{n-j}\leq\int_{\Omega_{\varepsilon/2}}\chi\psi_M(dd^cw)^j\wedge\beta^{n-j}$$

باستخدام التمهيدية 2.3 في [7]، ينتج أن:

$$\int_{\Omega_{\varepsilon/2}}\chi\psi_M(dd^cw)^j\wedge\beta^{n-j}=$$

$$=-\int_{\Omega_{\varepsilon/2}\setminus\Omega_\varepsilon}w\,\psi_M\,dd^c\chi\wedge(dd^cw)^{j-1}\wedge\beta^{n-j}$$
$$-2\int_{\Omega_{\varepsilon/2}\setminus\Omega_\varepsilon}\psi_M\,d\chi\wedge d^cw\wedge(dd^cw)^{j-1}\wedge\beta^{n-j}$$
$$+\int_{\Omega_{\varepsilon/2}}\chi\,w\,dd^c\psi_M\wedge(dd^cw)^{j-1}\wedge\beta^{n-j}$$

إن التكامل الأول يمكن تقديره كما يلي:

$$I_1\leq\frac{c||w||}{\varepsilon^2}\int_{\{\varphi<-M+1\}}(dd^cw)^{j-1}\wedge\beta^{n-j+1}$$

$$\leq\frac{c||w||B^{j-1}}{\varepsilon^{2j}(M-1)^{a^{2n-2j+2(n+\lambda)}}}$$

باستخدام متراجحة كوشي شوارتز، يمكن كتابة التكامل الثاني بالشكل:

$$I_2\leq\left(\int_{\Omega_{\varepsilon/2}\setminus\Omega_\varepsilon}\psi_M\,d\chi\wedge d^c\chi\wedge(dd^cw)^{j-1}\wedge\beta^{n-j}\right)^{1/2}\times$$

$$\left(\int_{\Omega_{\varepsilon/2}\setminus\Omega_\varepsilon}\psi_M\,dw\wedge d^cw\wedge(dd^cw)^{j-1}\wedge\beta^{n-j}\right)^{1/2}$$

بما أن $dd^c(w+||w||)^2\geq dw\wedge d^cw$ و Ω ساحة ليبشتز فوق محدبة بقوة، يمكننا أن نستنتج

$$I_2 \leq \frac{cB^{(j-1)/2}}{\varepsilon^j (M-1)^{a^{2n-2j+2}(n+\lambda)/2}} \times$$
$$\left(\int_{\{\varphi<-M+1\}} dd^c(w+||w||^2) \wedge (dd^c\rho)^{n-1}\right)^{1/2}$$

بما أن φ سالب ومحدود وبذلك يكون:

$$I_2 \leq \frac{cB^{(j-1)/2}}{\varepsilon^j (M-1)^{a^{2n-2j+2}(n+\lambda)/2}} \left(\int_{\Omega} \left(\frac{-\varphi}{M-1}\right)^n (dd^c v)^n\right)^{1/2} \;;$$

حيث $v = (w+||w||)^2 + (n-1)\rho$.

بالاستفادة من النتيجة 2.2 في [3] نحصل على :

$$I_2 \leq \frac{cB^{(j-1)/2}}{\varepsilon^j (M-1)^{\left(n+a^{2n-2j+2}(n+\lambda)\right)/2}} (\mathrm{n}!)^{1/2} ||v||^{\mathrm{n}/2} \left(\int_{\Omega} (\mathrm{dd^c}\varphi)^{\mathrm{n}}\right)^{1/2}$$

وبما أن التابع φ يملك كتلة مونج ـ أمبير أقل من الواحد على Ω ، يكون:

$$I_2 \leq \frac{cB^{(j-1)/2}}{\varepsilon^j (M-1)^{\left(n+a^{2n-2j+2}(n+\lambda)\right)/2}} (\mathrm{n}!)^{1/2} ||v||^{\mathrm{n}/2}$$

أخيراً لندرس التكامل الثالث، لتبسيط الرموز نضع:

$$\varepsilon' := \frac{1}{(M-1)^{a^{2n-2j+1}(n+\lambda)}} \ll \varepsilon$$

وذلك من أجل قيم كبيرة لـ M .

لنضيف ونطرح التابع $w_{\varepsilon'}$ (التنظيم القياسي للتابع w) وذلك تحت إشارة التكامل الثالث، ولنكتب هذا التكامل على شكل مجموع تكاملين كما يلي :

$$I_3 = \int_{\Omega_{\varepsilon/2}} \chi w_{\varepsilon'} dd^c\psi_M \wedge (dd^c w)^{j-1} \wedge \beta^{n-j}$$
$$+ \int_{\Omega_{\varepsilon/2}} \chi(w - w_{\varepsilon'}) dd^c\psi_M \wedge (dd^c w)^{j-1} \wedge \beta^{n-j}$$

يمكننا تقدير التكامل الأخير الذي نرمز له I_3'' مستفيدين من معامل استمرار w

$$I_3'' = \int_{\Omega_{\varepsilon/2}} \chi(w - w_{\varepsilon'}) dd^c\psi_M \wedge (dd^c w)^{j-1} \wedge \beta^{n-j}$$

$$\leq \int_{\Omega_{\varepsilon/2}} \chi(w_{\varepsilon'} - w) dd^c \varphi_M \wedge (dd^c w)^{j-1} \wedge \beta^{n-j}$$
$$\leq \omega(\varepsilon') \int_{\Omega_{\varepsilon/2}} \chi dd^c \varphi_M \wedge (dd^c w)^{j-1} \wedge \beta^{n-j}$$
$$\leq \frac{c\omega(\varepsilon')}{\varepsilon^2} \int_{\Omega_{\varepsilon/2}} (-\varphi)(dd^c w)^{j-1} \wedge \beta^{n-j+1}$$
$$\leq \frac{c\omega(\varepsilon')}{\varepsilon^2} \left(\int_{\Omega_{\varepsilon/2}} (-\varphi)^{a^{2n-2j+2(n+\lambda)}} \ (dd^c w)^{j-1} \wedge \beta^{n-j+1} + \int_{\Omega_{\varepsilon/2}} (dd^c w)^{j-1} \wedge \beta^{n-j+1} \right)$$
$$\leq \frac{c\omega(\varepsilon')}{\varepsilon^2} \left(\frac{\mathrm{c}}{\varepsilon^{2\mathrm{j}-2}} B^{j-1} + \int_{\Omega} (dd^c w)^{j-1} \wedge \beta^{n-j+1} \right)$$
$$\leq \frac{c\omega(\varepsilon')}{\varepsilon^2} \left(\frac{\mathrm{c}}{\varepsilon^{2\mathrm{j}-2}} B^{j-1} + \left[\int_{\Omega} (dd^c w)^n\right]^{(\mathrm{j}-1)/n} \left[\int_{\Omega} (dd^c \rho)^n\right]^{(n-\mathrm{j}+1)/n} \right)$$
$$\leq \frac{c\omega(\varepsilon')}{\varepsilon^{2j}} B^{j-1}$$

باستخدام التمهيدية 2.3 في [7] فإن التكامل :

$$I_3' = \int_{\Omega_{\varepsilon/2}} \chi w_{\varepsilon'} dd^c \psi_M \wedge (dd^c w)^{j-1} \wedge \beta^{n-j}$$

يكتب بطريقة مشابهة لدراسة التكامل الأساسي في بداية البرهان لنحصل على

$$I_3' = \int_{\Omega_{\varepsilon/2} \setminus \Omega_\varepsilon} w_{\varepsilon'} \ \psi_M \ dd^c \chi \ \wedge (dd^c w)^{j-1} \wedge \beta^{n-j}$$
$$+2 \int_{\Omega_{\varepsilon/2} \setminus \Omega_\varepsilon} \psi_M \ d\chi \ \wedge d^c w_{\varepsilon'} \wedge (dd^c w)^{j-1} \wedge \beta^{n-j}$$
$$+ \int_{\Omega_{\varepsilon/2}} \chi \ \psi_M \ dd^c w_{\varepsilon'} \ \wedge (dd^c w)^{j-1} \wedge \beta^{n-j}$$

وهكذا يكون بنفس الطريقة :

$$I_3' \leq \frac{c||w||B^{j-1}}{\varepsilon^{2j-2}(M-1)^{a^{2n-2j+2}(n+\lambda)}}\left(\frac{1}{\varepsilon^2}+\frac{2}{\varepsilon\varepsilon'}+\frac{1}{\varepsilon'^2}\right)$$
$$\leq \frac{c||w||B^{j-1}}{\varepsilon^{2j}(M-1)^{a^{2n-2j+1}(n+\lambda)}}$$

وبالنتيجة يكون التكامل الأساسي محدود بالمقدار الآتي:

$$I \leq \frac{CB^{j-1}}{\varepsilon^{2j}}\left(\frac{2||w||+(n!)^{1/2}\big||v|\big|^{n/2}}{(M-1)^{a^{2n-2j+1}(n+\lambda)}}+\omega(\varepsilon')\right)$$

لنلاحظ أن $\big||v|\big| \leq 4||w||^2+n||w||+n$ وبالتالي فإن المتراجحة الأخيرة تؤول إلى العلاقة التالية :

$$I \leq \frac{CB^{j}}{\varepsilon^{2j}}\left(\frac{1}{(M-1)^{a^{2n-2j+1}(n+\lambda)}}+\omega(\varepsilon')\right)$$

وبالتالي نجد :

$$\int_K (-\varphi)^{a^{2n-2j}(n+\lambda)}(\mathrm{dd^c w})^{\mathrm{j}}\wedge\beta^{\mathrm{n-j}} \leq$$
$$\leq \frac{CB^{j}}{\varepsilon^{2j}}\int_2^{+\infty} t^{a^{2n-2j}(n+\lambda)-1}\left(\frac{1}{(t-1)^{a^{2n-2j+1}(n+\lambda)}}\right.$$
$$\left.+\,\omega\left(t^{-a^{2n-2j+1}(n+\lambda)}\right)\right)dt$$
$$\leq \frac{CB^{j}}{\varepsilon^{2j}}\int_2^{+\infty} t^{a^{2n-2j}(n+\lambda)-1}\ \left(t^{-a^{2n-2j+1}(n+\lambda)}\right.$$
$$\left.+\,\omega\left(t^{-a^{2n-2j+1}(n+\lambda)}\right)\right)\ dt$$

وبتغيير المتحول نحصل على الصيغة الأخيرة لهذا التكامل :

$$\int_K (-\varphi)^{(n+\lambda)\,a^{2n-2j}}(\mathrm{dd^c w})^{\mathrm{j}}\wedge\beta^{\mathrm{n-j}} \leq \frac{CB^{j}}{\varepsilon^{2j}}\left(C+\int_0^1\frac{\omega(\mathrm{s})}{\mathrm{s}^{1+\delta/3}}ds\right)$$

وبحسب العلاقة (2) فإن التكامل :

$$\int_0^1\frac{\omega(\mathrm{s})}{\mathrm{s}^{1+\delta/3}}ds \leq C$$

وبالتالي

$$\int_K (-\varphi)^{(n+\lambda)}\, a^{2n-2j} (dd^c w)^j \wedge \beta^{n-j} \le \frac{CB^j}{\varepsilon^{2j}}$$

وهذا ما يثبت صحة المبرهنة.

ولننتقل الآن إلى إثبات الخطوة الثانية المشار إليها سابقاً تمهيداً للوصول إلى إثبات المبرهنة الأساسية (1).

نتيجة.

ليكن μقياس بوريل الموجب على ساحة ليبشتز فوق محدبة بقوة Ω ويحقق $\mu \le (dd^c w)^n$ حيث w تابع متعدد تحت توافقي على Ω ومستمر على $\overline{\Omega}$ ومعامل استمراره يحقق العلاقة (2)، عندئذٍ من أجل أي عدد موجب ε وأي عدد موجب τ يوجد ثابت موجب A متعلق بـ τ و $\|w\|_\infty$ ، بحيث يكون من أجل أي مجموعة متراصة $K \subset \Omega_\varepsilon$ ، يكون:

$$\mu(K) \le \frac{A}{\varepsilon^{2n}} Cap(K,\Omega)^{1+\tau} \qquad (3)$$

البرهان.

لنأخذ التابع :

$$\varphi := \frac{h_K^*}{\mathrm{Cap}(K,\Omega)^{1+\tau}}$$

حيث :

$$h_K(z) = sup\{\, u(z)\ ; u \in PSH(\Omega)\, , u \le 0\, , u|_K \le -1\}$$

وبالتالي ينتج من المبرهنة 3 ما يلي:

$$\mu(K) \le Cap(K,\Omega)^{1+\tau} \int_{\Omega_\varepsilon} |\varphi|^{n(1+\tau)} d\mu \le \frac{C}{\varepsilon^{2n}} Cap(K,\Omega)^{1+\tau}$$

وهي العلاقة المطلوب إثباتها.

مبرهنة3:

ليكن $\varphi \in C(\partial\Omega)$ وليكن μقياس بوريل الموجب على ساحة Ω ويحقق $\mu \leq (dd^c w)^n$ حيث $w \in PSH(\Omega) \cap L^{\infty}(\Omega)$ و $\lim_{z \to \partial\Omega} w(z) = \varphi$.

إذا كان هذا القياس محدوداً بسعة بيدفورد وتايلور، عندئذ فإن مسألة ديرخليه (1) تملك حلاً مستمراً.

البرهان.

بما أن القياس بالفرض محدود بالسعة فإنه بحسب المبرهنة C في [11] أو وفق خطوات الإثبات في [4] (الصفحة 59) من أجل الساحات غير الملساء، ينتج وجود حل محدود u لمسألة ديرخليه (1).

ولإثبات استمرارية هذا الحل، نأخذ مجموعة ما $K \subset \Omega$ ولتكن u_j التنظيم القياسي للتابع u. من أجل أي $d > 0$ صغير نستطيع إيجاد مجموعة مفتوحة K_d بحيث $K_d \supset K$ و $j_0 > 0$ بحيث يكون :

$$\varphi < u + d$$

وكذلك

$$u_j < \varphi + d/2$$

وذلك في جوار ما للمجموعة ∂K_d ومهما تكن $j \geq j_0$.

وبالتالي يكون في ذلك الجوار $u_j < u + d$ مهما تكن $j \geq j_0$، منه نستنتج أن

$$\lim\inf_{z \to \xi} \left(u(z) + d - u_j(z) \right) \geq 0$$

من أجل أي $\xi \in \partial K_d$.

لنثبت الآن أن المجموعة $\{u_j - u > 2d\}$ خالية من أجل أي $j \geq j_0$ ، وسنتبع طريقة نقض الفرض للوصول إلى هذه النتيجة.

لنعرف التابع :

$$g(s) \coloneqq Cap\left(\{u_j - u > s + d\}\right)$$

من أجل $s \geq 0$.

ولنعرف المتتالية المتزايدة $\{k_m\}$ بحيث يكون $k_0 = 0$ والحد العام لهذه المتتالية يعطى بالعلاقة:

$$k_m = sup\{ k > k_{m-1}; g(k) > g(k_{m-1})/e\}$$

من الواضح أنّ :

$$g(k_m) \le g(k_{m-1})/e$$

لنلاحظ أن $g(d) \neq 0$ لأننا فرضنا جدلاً أن المجموعة $\{u_j - u > 2d\}$ ليست خالية

الآن إذا فرضنا أن $k_m < d$ مهما تكن m ، هذا سيقودنا إلى العلاقة :

$$g(d) \le g(k_m) \le g(0)/e^m \quad ; \forall m \in \mathbb{N}$$

وبأخذ النهاية يكون $g(d) = 0$ وهذا لا يمكن.

لذلك لابد من وجود عدد طبيعي N بحيث يكون $k_N \le d < k_{N+1}$ ، وبحسب علاقة الحد العام للمتتالية $\{k_m\}$ يكون :

$$g(d) \ge g(k_N)/e$$

وبحسب التمهيدية 1.3 في [8] وبما أن القياس μ محدود بالسعة على المجموعة K_d ، نحصل على

$$(d - k_N)^n g(d) \le \mu\big(\{u_j - u > k_N + d\}\big) \le Ae^{1+\tau} g(d)^{1+\tau}$$

حيث الثابت A يعتمد على d .

ومنه نحصل على المتراجحة الآتية :

$$d - k_N \le A^{1/n} e^{(1+\tau)/n} g(d)^{\tau/n} \qquad (6)$$

الآن لنستخدم مجدداً التمهيدية 1.3 في [8] وذلك بعد أخذ $t := k - k_{m-1}$ و $0 <$ $k_{m-1} < k \le d$ بحيث يكون $g(k) > g(k_{m-1})/e$ لنحصل على

$$t^n g(k) \le \mu\big(\{u_j - u > k_{m-1} + d\}\big) \le Aeg(k)g(k_{m-1})^\tau$$

وبالاختصار نحصل على

$$t \le (Ae)^{1/n} g(k_{m-1})^{\tau/n}$$

لنأخذ النهاية عندما $k \to k_m^-$ ، نجد :

$$t_m := k_m - k_{m-1} \le (Ae)^{1/n} g(k_{m-1})^{\tau/n}$$

وبالتالي

$$k_N = \sum_{m=1}^{N} t_m \le (Ae)^{1/n} \sum_{m=1}^{N} g(k_{m-1})^{\tau/n} \le (Ae)^{1/n} N g(0)^{\tau/n}$$

وبحسب تعريف التقارب بالسعة، من أجل $j \ge j_0$ يكون $g(0)$ صغير جداً وهذا يقود إلى أن k_N صغير جداً أيضاً ويصح أن نكتب $k_N \le d/2$.

عندئذ فإن العلاقة (6) تصبح بالشكل :

$$d/2 \le A^{1/n} e^{(1+\tau)/n} g(d)^{\tau/n}$$

بما أن $d > 0$ عدد ثابت و $g(d) = Cap\big(\{u_j - u > 2d\}\big)$ يسعى نحو الصفر عندما يسعى j نحو $+\infty$ ، يقتضي ذلك التناقض في المتراجحة الأخيرة.

برهان المبرهنة1:

إن وحدانية حل مسألة ديرخليه (1) ينتج مباشرة من مبدأ المقارنة، لنوضح ذلك ولنفرض وجود حلين u_1 و u_2 لهذه المسألة وبالتالي يكون :

$$(dd^c u_1)^n = (dd^c u_2)^n = \mu$$
$$u_1 = u_2 = \varphi \quad on\ \partial\Omega$$

وبحسب مبدأ المقارنة يكون $u_1 = u_2$ على Ω .

إن القياس μ والذي يحقق $\mu \le (dd^c w)^n$ هو قياس محدود بالسعة وذلك بحسب النتيجة التي توصلنا إليها سابقاً أي أنّ:

$$\mu(K) \le \frac{A}{\varepsilon^{2n}} Cap(K,\Omega)^{1+\tau}$$

مهما تكن $\tau > 0$.

لنشكل الآن حل جزئي لمسألة ديرخليه المفروضة (1)، لنضع

$$v := w + h_{\varphi - w}$$

حيث إنّ $h_{\varphi-w}$ هو حل لمسألة ديرخليه المتجانسة (حالة القياس معدوم)، هذا يعني

$$\left(dd^c h_{\varphi-w}\right)^n = 0 \quad in\ \Omega$$
$$h_{\varphi-w} = \varphi - w \quad on\ \ \partial\Omega$$

إن التابع $h_{\varphi-w}$ مستمر على $\overline{\Omega}$ بحسب المبرهنة 2.3.3 في [4].

من الواضح أن $v \in PSH(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ كما أن

$$(dd^c v)^n \ge \mu$$

ويحقق $v = \varphi$ على $\partial\Omega$.

بحسب المبرهنة 3 فإن مسألة ديرخليه تملك حلاً مستمراً على $\overline{\Omega}$ ، وبالتالي تحققنا من وجود ووحدانية التابع u الذي من أجله

$$u \in PSH(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$$
$$(dd^c u)^n = \mu \quad \text{in} \quad \Omega$$
$$u = \varphi \quad on \quad \partial\Omega$$

المقترحات والتوصيات.

1. دراسة مسألة ديرخليه في حال وجود حل جزئي وبدون شروط على معامل الاستمرار لهذا الحل الجزئي.
2. دراسة انتظام الحل الذي تم إثبات وجوده وإيجاد صيغة دقيقة لمعامل استمرار هذا الحل.

المراجـع العلميـة.

[1] – P. Ahag, U. Cegrell, S. Kolodziej, H. H. Pham and A. Zeriahi, "Partial pluricomplex energy and integrability exponents of plurisubharmonic functions", Adv. Math. 222 (2009), no. 6.

[2] – E. Bedford and B. A. Taylor, "The Dirichlet problem for a complex Monge-Ampere equation", Invent. Math. 37 (1976), 1-44.

[3] – Z. Blocki, "Estimates for the complex Monge-Ampere operator", Bull. Pol. Acad. Sci. Math 41 (1993), 151-157.

[4] – M. Charabati, "The Dirichlet problem for Complex Monge-Ampere equations", PhD Thesis, http://www.theses.fr/19271614X

[5] – M. Charabati, "Regularity of solutions to the Dirichlet problem for Monge-Ampere equations", Indiana University Mathematics Journal 66 (2017), no.6, 2187-2204.

[6] – J.-P. Demailly, S. Dinew, V. Guedj, H. H. Pham, S. Kolodziej and A. Zeriahi, "Holder continuous solutions to Monge-Ampere equations", J. Eur. Math. Soc.(JEMS) 16 (2014), 619-647.

[7] – T.C. Dinh, V.A. Nguyen and N. Sibony," Exponential estimates for plurisubharmonic functions and stochastic dynamics", J. Differential Geom. 84 (2010), no. 3, 465-488.

[8] – V. Guedj, S. Kolodziej and A. Zeriahi, "Holder continuous solutions to Monge-Ampere equations", Bull. Lond. Math. Soc. 40 (2008), 1070-1080.

[9] – V. Guedj and A. Zeriahi, "Degenerate complex Monge-Ampere equations", EMS Tracts in mathematics 26, European Mathematical Society, (2017).

[10] –M. Klimek, " Pluripotential theory", London mathematical Society Monographs,6, Clarendon Press, Oxford, (1991).

[11] – S. Kolodziej, "The complex Monge-Ampere equation", Acta Math. 180 (1998), 69-117.

[12] – S. Kolodziej, "The complex Monge-Ampere equation and pluripotential theory", Mem. Amer. Math. Soc. 178 (2005), no. 840, x+64 pp.

[13] – N.C. Nguyen, "On the Holder continuous subsolution problem for the complex Monge-Ampere equation", Calc. Var. (2018), no. 1, Art. 8, 15 pp.

[14] – N.C. Nguyen, "On the Holder continuous subsolution problem for the complex Monge-Ampere equation II ", Analysis and PDE, Vol. 13, No 2 (2020), 435-453.