إيجاد كرات فيثاغورية أولية باستخدام إحدى المركبات فقط (x, y, z, R)

مريم خالد النديوي [1]

أ.د. عبد الباسط الخطيب [2] أ.د. محمد نور شمه [3]

الملخص:

نقدم في هذا البحث طرائق جديدة لتوليد كرة فيثاغورية (x, y, z, R)

1) بمعرفة المركبة x
2) بمعرفة المركبة y أو z
3) بمعرفة نصف القطر R

وذلك ضمن شروط محددة لكل طريقة حيث نستطيع معرفة الكرة الفيثاغورية التي مركزها O ونصف قطرها R وتحوي على محيطها النقطة الصحيحة (x, y, z) إذا استطعنا معرفة إحدى المركبات الأربعة (x, y, z, R) فقط.

الكلمات المفتاحية:

الكرة ، الكرة الفيثاغورية ، توليد الكرة الفيثاغورية، نصف القطر الفيثاغوري R، النقطة الفيثاغورية، القاسم المشترك الأعظم، باقي القسمة.

[1] طالبة دكتوراه، قسم الرياضيات، كلية العلوم، جامعة البعث.

[2] أستاذ، قسم الرياضيات، كلية العلوم، جامعة البعث.

[3] أستاذ، قسم العلوم الأساسية، كلية الهندسة الميكانيكية والكهربائية، جامعة دمشق.

Finding elementary Pythagorean spheres using only one of the components(x, y, z, R)

(1) Mariam Khaled Al- Nedewy

(2) Dr. Abd Albaset Alkhateeb (3)Dr. Mohamed Nur Shamma

Summary:

In this paper we present new method for generating a Pythagorean sphere (x, y, z, R):

1) Given the component x,
2) Given the component $y\ or\ z$,
3) Given the radius R.

This is within specific conditions for each method of finding out the Pythagorean sphere with center O and radius R, and containing its correct circumference (x, y, z) , if we can know only one of the four compounds:(x, y, z, R).

Key words: Sphere, Pythagorean sphere, generation Pythagorean sphere,

Pythagorean radius R, Pythagorean Point, greatest common divisor, remainder.

---

1) phd. Student.

2) Prof. Department of Mathematics, Faculty of Science, AL-Baath University, Syria.

3) Prof. Department of Basic Science, Faculty of Mechanical Engineering and electro, Damascus University, Syria.

مقدمة البحث ودراسة مرجعية:

تعريف الكرة الفيثاغورية: هي كرة مركزها O ونصف قطرها R وتحقق وجود نقطة على الأقل على السطح مركباتها طبيعية:

$$x, y, z \in N \quad , \quad x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

إن البحث عن الكرات الصحيحة أمر قديم يبحث عنه العلماء لمعرفة النقاط الصحيحة الواقعة على الكرة المركزية التي نصف قطرها عدد صحيح R. هناك جهود كثيرة لتوليد كرات فيثاغورية وبالتالي نقاط صحيحة تقع عليها; أي توليد رباعيات فيثاغورية $(x, y, z, R) \in N^4$ وتحقق $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ مثل الرباعية: $(1,2,2,3)$ هي كرة تحوي النقطة $(1,2,2)$ ونصف قطرها $R = 3$.

تأخرت طريقة توليد هذه الرباعيات بعض الوقت حتى تطور علم نظرية الأعداد وعلم الدوائر الفيثاغورية ثم عُمّم ذلك على الكرات الفيثاغورية.

قدمت الدراسة [2] طريقة جديدة في توليد الكرات الفيثاغورية (a, b, c, d) بالاعتماد على أول مركبتين كمايلي:

ليكن $a, b \in Z^+$ و لنفرض أن $a^2 + b^2 = m$ وأن Ω أحد عوامل $\gcd(a, b)$

ولنضع: $c = \frac{m-\Omega^2}{2\Omega}$ و $d = c + \Omega$

ولننتقي Ω وفق التحديدات التالية:

1) إذا كانت $m = 2l$ حيث $l \in Z^+$، عندها يجب أن يكون Ω عدد زوجي.
2) إذا كانت $m = 2l + 1$ (فردي) عندها يجب أن يكون Ω عدد فردي لأجل القيم الصحيحة لـ c .
3) من أجل القيم الموجبة لـ c يمكن اعتبار أن $m > \Omega^2$.

سنناقش الحالات السابقة

$1-$ إذا كان a زوجي و b فردي أو العكس عندها يجب أن يكون m,Ω أعداد فردية وتكون Ω أحد عوامل $\gcd(a,b)$ أو مضاعفاته.

مثال(1) :

بفرض لدينا العددين: $a=12\ ,\ b=15$ فإن:

$$a^2+b^2=144+225=369=m \quad \text{فردي}$$
$$\gcd(12,15)=3\times 1$$

كما نلاحظ أن: $m=3^2\times 41$

يجب أن يكون Ω فردي و $m>\Omega^2$; إذاً يمكن لـ Ω أن تأخذ القيم

$$\Omega=1\ ,\ \Omega=3\quad ,\ \Omega=3^2=9$$

أما $\Omega=41$ لا تحقق الشرط $m>\Omega^2$ ولنناقش الحالات الممكنة التالية:

في حال $\Omega=1$ عندئذٍ:

$$c=\frac{m-\Omega^2}{2\Omega}=\frac{369-1}{2}=\frac{368}{2}=184$$
$$d=c+\Omega=184+1=185$$

فتكون الرباعية $(12,15,184,185)$ فيثاغورية و تعطينا الكرة $C(185)$ التي مركزها O ونصف قطرها $R=185$ وتحوي النقطة المحيطية: $(12,15,184)$.

في حال $\Omega=3$ عندئذٍ:

$$c=\frac{m-\Omega^2}{2\Omega}=\frac{369-9}{6}=\frac{360}{6}=60$$

$$d = c + \Omega = 60 + 3 = 63$$

فتكون الرباعية $(12,15,60,63)$فيثاغورية وتعطينا الكرة $C(63)$.

و في حال $\Omega = 3^2 = 9$ عندئذٍ:

$$c = \frac{m - \Omega^2}{2\Omega} = \frac{369 - 81}{18} = \frac{288}{18} = 16$$
$$d = c + \Omega = 16 + 9 = 25$$

فتكون الرباعية $(12,15,16,25)$ فيثاغورية وتعطينا الكرة $C(25)$.

2- إذا كـان a زوجـي و b زوجـي، عنـدها يجـب أن يكـون m, Ω أعـداد زوجيـة وتكون Ω أحد عوامل الـ $\gcd(a, b)$ أو مضاعفاتها.

مثال(2) :

بفرض لدينا العددين: $a = 2 \ , \ b = 4$

بالتالي: $a^2 + b^2 = 4 + 16 = 20 = m$ (زوجي)

و $\gcd(2,4) = 2 \times 1$

و يجب أن يكون Ω زوجي و $m > \Omega^2$; إذاً يمكن لـ Ω أن تأخذ القيم:

$$\Omega = 2$$

كما أن: $c = \frac{m-\Omega^2}{2\Omega} = \frac{20-4}{4} = \frac{16}{4} = 4$

و $d = c + \Omega = 4 + 2 = 6$

فتكـون الرباعيـة $(2,4,4,6)$ فيثاغوريـة و تعطينـا الكـرة $C(6)$ والتـي تنـتج عـن الكـرة $C(3)$ بضرب نصف القطر بـ (2) .

3− إذا كـان a فـردي و b فـردي ،عنـدها يجـب أن تكـون: m, Ω أعـداد زوجيـة وتكـون Ω أحـد عوامـل الــ $\gcd(a, b)$ أو مضــاعفاتها ولكـن عوامـل الــ gcd ستكون جميعها أعداد فردية وبالتالي لا يوجد حالة ممكنة لـ Ω .

مثال(3) :

بفرض: $a = 3 \ , \ b = 9$

بالتالي: $a^2 + b^2 = 9 + 81 = 90 = m$ (زوجي)

و $\gcd(3,9) = 3 \times 1$

و يجب أن يكون Ω زوجي و $m > \Omega^2$ وأحد عوامل الـ gcd وهذا غير ممكن.

بينما قدمت الدراسة [2] طريقة جديدة في توليد الكرات الفيثاغورية بالاعتماد على عددين: $m, n \in Z^+$ كما يلي:

بفرض لدينا: $m, n \in Z^+$ و $\gcd(m, n) = 1$ و m عدد فردي، عندها يكون:

$a = m^2$ و $b = 2mn$ و $c = 2n^2$ و $d = m^2 + 2n^2$

مثال(4) :

لنولد كرة فيثاغورية إذا علمت أن: $m = 3 \ , \ n = 4$.

لدينا $\gcd(3,4) = 1$ والشروط محققة، وبالتالي:

$$a = 3^2 = 9,$$

$$b = 2(3)(4) = 24,$$

$$c = 2(4^2) = 32,$$

$$d = 3^2 + 2(4^2) = 9 + 32 = 41$$

عندها تكون الرباعية الفيثاغورية $(9,24,32,41);$ ومنه حصلنا على $C(41)$.

من جهة أخرى قدمت الدراسة [13] طريقة جديدة في توليد الكرات الفيثاغورية بالاعتماد على ثلاثة أعداد: $u, v, w \in Z^+$; بحيث يتحقق $u^2 + w^2 > v^2$، على النحو الآتي:

بفرض أن $g = \gcd(u^2 + w^2, v)$ ، وبفرض أن:

1. $\gcd(u, v, w) = 1$
2. إذا كان v فردي فإن $u + w$ زوجي
3. $a = \frac{2uv}{g}$ ، $b = \frac{2wv}{g}$

$c = \frac{u^2+w^2-v^2}{g}$ ، $d = \frac{u^2+w^2+v^2}{g}$

عندها تكون الرباعية (a, b, c, d) فيثاغورية.

الإثبات :

$$a^2 + b^2 + c^2$$

$$= \frac{4u^2v^2}{g^2} + \frac{4w^2v^2}{g^2} + \frac{(u^2 + w^2 - v^2)^2}{g^2}$$

$$= \frac{2u^2v^2 + 2w^2v^2 + 2u^2w^2 + u^4 + w^4 + v^4}{g^2}$$

$$\frac{(u^2 + w^2 + v^2)^{\mathbf{2}}}{\mathrm{g}^{\mathbf{2}}}$$

$$= \frac{2u^2v^2 + 2w^2v^2 + 2u^2w^2 + u^4 + w^4 + v^4}{g^2}$$

و بالتالي: $d^2 = a^2 + b^2 + c^2$ والرباعية فيثاغورية.

مثال(5) : لنولد كرة فيثاغورية إذا علمت أن $u = 5 \ , \ v = 3 \ , \ w = 7$

نلاحظ أن $u^2 + w^2 = 25 + 49 = 74 > v^2 = 9$

$$g = \gcd(74,3) = 1$$

$$\gcd(u,v,w) = 1$$

$$a = \frac{2uv}{g} = 2(5)(3) = 30$$

$$b = \frac{2wv}{g} = 2(7)(3) = 42$$

$$c = \frac{u^2 + w^2 - v^2}{g} = 74 - 9 = 65$$

$$d = \frac{u^2 + w^2 + v^2}{g} = 74 + 9 = 83$$

فتكون الرباعية الفيثاغورية $(30,42,65,83)$ أي حصلنا على $C(83)$.

مثال(6) : لنولّد كرة فيثاغورية إذا علمنا أن: $u = 15 \ , \ v = 12 \ , \ w = 16$

نلاحظ أن $u^2 + w^2 = 225 + 256 = 481 > v^2 = 144$

$$g = \gcd(481,12) = 1$$

$$\gcd(u,v,w) = 1$$

$$a = \frac{2uv}{g} = \frac{2(15)(12)}{1} = 360$$

$$b = \frac{2wv}{g} = \frac{2(16)(12)}{1} = 384$$

$$c = \frac{u^2 + w^2 - v^2}{g} = \frac{481 - 144}{1} = 337$$

$$d = \frac{u^2 + w^2 + v^2}{g} = \frac{481 + 144}{1} = 625$$

فتكون الرباعية الفيثاغورية $(360,384,337,625)$.

كما قدمت الدراسة [14] طريقة جديدة في توليد الكرات الفيثاغورية بالاعتماد على ثلاثة أعداد $m, n, p \in Z^+$ كما يلي :

بفــــــــرض: $a = 2mp$ و $b = 2np$ و $c = p^2 - (m^2 + n^2)$
و $d = p^2 + (m^2 + n^2)$

عندها تكون الرباعية (a, b, c, d) فيثاغورية.

الإثبات: $a^2 + b^2 + c^2$

$$= 4m^2p^2 + 4n^2p^2 + \left(p^2 - (m^2 + n^2)\right)^2$$

$$= 2m^2p^2 + 2n^2p^2 + 2m^2n^2 + p^4 + m^4 + n^4$$

$$\left(p^2 + (m^2 + n^2)\right)^2$$

$$= 2m^2p^2 + 2n^2p^2 + 2m^2n^2 + p^4 + m^4 + n^4$$

و بالتالي: $d^2 = a^2 + b^2 + c^2$ والرباعية فيثاغورية.

مثال(7) : لنولد كرة فيثاغورية من الثلاثية: $(5,6,8)$.

$$a = 2mp = 2(5)(8) = 80$$

$$b = 2np = 2(6)(8) = 96$$

$$c = p^2 - (m^2 + n^2) = 64 - (25 + 36) = 3$$

$$d = p^2 + (m^2 + n^2) = 64 + (25 + 36) = 125$$

فتكون الرباعية الفيثاغورية $(80,96,3,125)$.

مثال(8) : ولد كرة فيثاغورية من الثلاثية: $(1,3,5)$.

$$a = 2mp = 2(1)(5) = 10$$

$$b = 2np = 2(3)(5) = 30$$

$$c = p^2 - (m^2 + n^2) = 25 - (1 + 9) = 15$$

$$d = p^2 + (m^2 + n^2) = 25 + (1 + 9) = 35$$

فتكون الرباعية الفيثاغورية $(10,30,15,35)$.

بينما قدمت الدراسة [2] طريقة جديدة في توليد الكرات الفيثاغورية بالاعتماد على أربعة أعداد $m,n,p,q \in Z^+$ كما يلي :

بفرض لدينا $m,n,p,q \in Z^+$، حيث: $m + n + p + q = 1 \ mod \ 2$ و $\gcd(m,n,p,q) = 1$

عندها بفرض أن:

$$a = |m^2 + n^2 - p^2 - q^2|,$$

$$b = 2(mq + np),$$

$$c = 2(nq - mp),$$

$$d = m^2 + n^2 + p^2 + q^2$$

عندئذٍ تكون الرباعية: (a,b,c,d) فيثاغورية.

مثال(9) : لنولّد كرة فيثاغورية من الرباعية: $(2,4,3,8)$

نلاحظ أن $\gcd(2,4,3,8) = 1$ و $2 + 4 + 3 + 8 = 17 = 1 \ mod \ 2$

ومنه الفرضيات محققة، وبالتالي إذا أخذنا:

$$a = |m^2 + n^2 - p^2 - q^2| = |4 + 16 - 9 - 64| = 67$$

$$b = 2(mq + np) = 2(2 \times 8 + 3 \times 4) = 56$$

$$c = 2(nq - mp) = 2(3 \times 8 - 2 \times 4) = 32$$

$$d = m^2 + n^2 + p^2 + q^2 = 4 + 9 + 16 + 64 = 93$$

فتكون (67,56,32,93) رباعية فيثاغورية.

هدف البحث:

الحصول على طرائق جديدة لتوليد كرات فيثاغورية أولية بمعطيات أقل أي الحصول على طرائق توليد جديدة بمعرفة مركبة واحدة فقط من المركبات الأربعة (x, y, z, R).

طرائق البحث:

بعض التعاريف والمبرهنات ذات الصلة:

تعريف النقطة الفيثاغورية الأولية: هي نقطة (x, y, z) من كرة فيثاغورية تحقق $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ ، $\gcd(x, y, z, R) = 1$.

مبرهنة (1) :

كل نقطة فيثاغورية غير أولية يمكن أن تولد نقطة فيثاغورية أولية غير واقعة على نفس الكرة.

الإثبات:

بفرض أن الرباعية (x_1, y_1, z_1, R_1) غير أولية عنها يكون $\gcd(x_1, y_1, z_1, R_1) = d$

نقسم جميع عناصر الرباعية على d فنحصل على رباعية أولية (x, y, z, R) والتي تحقق $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

مثال(10) : النقطة (6,8,24,26) نقطة فيثاغورية غير أولية لكنها تولد النقطة (3,4,12,13) نقطة فيثاغورية أولية.

أهم النتائج ومناقشتها:

سنقوم بإثبات أربع مبرهنات أساسية متعلقة بتموضع المركبة داخل الرباعية الفيثاغورية.

مبرهنة (2) : إذا كان x عدداً فردياً، ووضعنا

$$y = \frac{x^2-1}{2} \quad ، \quad z = \frac{\left(\frac{x^2+1}{2}\right)^2 - 1}{2} \quad ، \quad ; R = \frac{\left(\frac{x^2+1}{2}\right)^2 + 1}{2}$$

فعندئذٍ تكون (x, y, z, R) رباعية فيثاغورية أولية، أي $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$

و $\gcd(x, y, z, R) = 1$ (أولية)

الإثبات : لنبين أولاً أن الأعداد x, y, z, R أعداد طبيعية

لدينا x فردي فرضاً وبالتالي يكتب بالشكل $x = 2k + 1 \;\; ; k = 0,1,2,3, \dots$

وبالتالي $y = \frac{(2k+1)^2-1}{2} = 2k(k+1) \in \mathbb{N}$

$$z = \frac{\left(2k^2+2k+1\right)^2 - 1}{2} = 2k^4 + 4k^3 + 4k^2 + 2k \in \mathbb{N}$$

$$R = \frac{4k^4 + 8k^3 + 8k^2 + 4k + 2}{2} = 2k^4 + 4k^3 + 4k^2 + 2k + 1 \in \mathbb{N}$$

لنثبت أن الرباعية أولية:

مما سبق نلاحظ أن $z \,, R$ عددان طبيعيان متتاليان وبالتالي أوليان فيما بينهما و بالتالي تكون الرباعية أولية.

$$x^2 + y^2 + z^2 = x^2 + \left(\frac{x^2-1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\left(\frac{x^2-1}{2}\right)^2 - 1}{2}\right)^2$$

$$= x^2 + \frac{x^4 - 2x^2 + 1}{4} + \left(\frac{x^4 - 2x^2 - 3}{8}\right)^2$$

$$= \frac{x^8 + 4x^6 + 14x^4 + 20x^2 + 25}{64} = \left(\frac{\left(\frac{x^2+1}{2}\right)^2 + 1}{2}\right)^2 = R^2$$

والمبرهنة محققة .

مثال(11) : إذا كان $x = 3$ عندها

$$z = \frac{(\frac{9+1}{2})^2+1}{2} = 13 \quad ، \quad z = \frac{(\frac{9+1}{2})^2-1}{2} = 12 \quad ، \quad y = \frac{9-1}{2} = 4$$

عندها يكون $(3,4,12,13)$ رباعية فيثاغورية أولية.

مبرهنة (3) : إذا كان y عدد طبيعي زوجي وكان $\sqrt{2y+1} \in N$

ووضعنا

$$;\quad R = \frac{y^2+2y+2}{2} = Z + 1 \quad ، \quad Z = \frac{y^2+2y}{2} \quad ، \quad x = \sqrt{2y+1}$$

فعندئذٍ تكون الرباعية (x, y, z, R) رباعية فيثاغورية أولية واقعة في الثمن الأول ;

أي أن $x, y, z, R \in N$ حيث $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$

و $\gcd(x, y, z, R) = 1$

الإثبات:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2y + 1 + y^2 + \left(\frac{y^2 + 2y}{2}\right)^2$$

$$= y^2 + 2y + 1 + \frac{y^4 + 4y^3 + 4y^2}{4}$$

$$\frac{y^4 + 4y^3 + 8y^2 + 8y + 4}{4} = \left(\frac{y^2 + 2y + 2}{2}\right)^2 = R^2$$

ويتم إثبات أن الأعداد x, y, z, R طبيعية وأن الرباعية أولية كما ورد في المبرهنة (2).

مثال(12) : ولد كرة فيثاغورية إذا علمت أن $y = 12$

$$x = \sqrt{24 + 1} = 5 \in N$$

$$Z = \frac{144 + 24}{2} = \frac{168}{2} = 84$$

$$R = \frac{144 + 24 + 2}{2} = \frac{170}{2} = 85$$

فتكون الرباعية (5,12,84,85) .

مثال(13) : ولد كرة فيثاغورية إذا علمت أن $y = 6$

$$x = \sqrt{12 + 1} = \sqrt{13} \notin N$$

لا يمكن التوليد

مبرهنة (4) : إذا كان z عدد طبيعي و كان:

$$\sqrt{2z + 1} - 1 \in \mathcal{N} \quad ، \quad \sqrt{2\sqrt{2z + 1} - 1} \in \mathcal{N}$$

ووضعنا

$$; R = z + 1 \quad y = \sqrt{2z + 1} - 1 \qquad ،x = \sqrt{2\sqrt{2z + 1} - 1}$$

فعندئذٍ تكون (x, y, z, R) رباعية فيثاغورية أولية واقعة في الثمن الأول; أي أن

$x, y, z, R \in N$ حيث $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ و $\gcd(x, y, z, R) = 1$.

الإثبات:

$$x^2+y^2+z^2=2\sqrt{2z+1}-1+\left(\sqrt{2z+1}-1\right)^2+z^2$$
$$=2\sqrt{2z+1}-1+2z+1-2\sqrt{2z+1}+1+z^2$$
$$=z^2+2z+1$$
$$R^2=(z+1)^2=z^2+2z+1$$

ويتم إثبات أن الأعداد x,y,z,R طبيعية وأن الرباعية أولية كما ورد في المبرهنة (2).

مثال(14) : ولد كرة فيثاغورية إذا علمت أن: $z=12$ إن أمكن

$$x=\sqrt{2(5)-1}=3$$
$$y=\sqrt{2(12)+1}=5$$
$$R=12+1=13$$

عندها تكون الرباعية (3,5,12,13) فيثاغورية أولية.

مثال(15) : ولد كرة فيثاغورية إذا علمت أن: $z=8$ إن أمكن

$$x=\sqrt{2\left(\sqrt{17}\right)-1}\notin\mathcal{N}$$

لا يمكن التوليد.

مبرهنة (5) : المبرهنة الأساسية

الشرط اللازم والكافي حتى تكون الرباعية (x,y,z,R) فيثاغورية أولية هو أن يتحقق :

$$x^2+y^2=w(2R-w)$$
$$w=R-z$$

الإثبات :

إذا لم تكن الرباعية فيثاغورية أولية فإننا نخرج القاسم المشترك الأعظم لها d لنحصل على رباعية أولية تحقق الشرط $z_1 - R_1 = w_1$ وبالتالي سيكون $z - R = d.w$ لذلك افترضنا أن تكون الرباعية أولية.

1) لزوم الشرط:

بفرض (x, y, z, R) رباعية فيثاغورية أولية أي أن $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ و $\gcd(x, y, z, R) = 1$ و بفرض أن:

$$w = R - z \Rightarrow z = R - w$$

فإن:

$$x^2 + y^2 = R^2 - z^2$$

$$= (R - z)(R + z)$$

$$= (R - R + w)(R + R - w) = w(2R - w)$$

2) كفاية الشرط : بفرض أن:

$$w = R - z \Rightarrow z = R - w$$

و

$$x^2 + y^2 = w(2R - w)$$

لنثبت أن الرباعية (x, y, z, R) رباعية فيثاغورية أولية أي لنثبت أن

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

$$x^2 + y^2 + z^2$$

$$= w(2R - w) + (R - w)^2$$

$$= 2Rw - w^2 + R^2 - 2wR + w^2 = R^2$$

وبالتالي الرباعية فيثاغورية أولية.

سنعتبر أن $m = x^2 + y^2$ للسهولة.

مثال(16) : لنولد رباعيات فيثاغورية من العدد $R = 3$.

$$w = 1 \implies m = 1(6-1) = 5 \implies 5 = 1^2 + 2^2 \implies$$

$$x = 1 , y = 2 , z = 2 \implies (1,2,2,3)$$

$$w = 2 \implies m = 2(6-2) = 8 \implies 5 = 2^2 + 2^2 \implies$$

$$x = 2 , y = 2 , z = 1 \implies (2,2,1,3)$$

نلاحظ أنه عندما نبدأ بالتكرار نتوقف.

مثال(17) : لنولد رباعية فيثاغورية من العدد $R = 25$

$$w = 1 \implies m = 1(50-1) = 49 \implies 49 \neq x^2 + y^2$$

$$w = 2 \implies m = 2(50-2) = 96 \implies 96 \neq x^2 + y^2$$

$$w = 3 \implies m = 3(50-3) = 141 \implies 141 \neq x^2 + y^2$$

$$w = 4 \implies m = 4(50-4) = 184 \implies 184 \neq x^2 + y^2$$

$$w = 5 \implies m = 5(50-5) = 225 \implies 225 = 9^2 + 12^2 \implies$$

$$x = 9 , y = 12 , z = 20 \implies (9,12,20,25)$$

$$w = 6 \implies m = 6(50-6) = 264 \implies 264 \neq x^2 + y^2$$

$$w = 7 \implies m = 7(50-7) = 301 \implies 301 \neq x^2 + y^2$$

$$w = 8 \implies m = 8(50-8) = 336 \implies 336 \neq x^2 + y^2$$

$$w = 9 \implies m = 9(50-9) = 369 \implies 369 = 15^2 + 12^2$$
$$\implies x = 15 , y = 12 , z = 16 \implies (15,12,16,25)$$

$$w = 10 \implies m = 10(50-10) = 400 \implies 400 = 16^2 + 12^2$$
$$\implies x = 16 , y = 12 , z = 15 \implies (16,12,15,25)$$

نلاحظ أنه عندما نبدأ بالتكرار نتوقف.

أمثلة في حال التضاعف

مثال(18) : لنولد رباعيات فيثاغورية من العدد $R = 3^2 = 9$

$$w = 1 \implies m = 1(18-1) = 17 \implies 17 = 1^2 + 4^2 \implies$$
$$x = 1\,, y = 4\,, z = 8 \implies (1,4,8,9)$$
$$w = 2 \implies m = 2(18-2) = 32 \implies 32 = 4^2 + 4^2 \implies$$
$$x = 4\,, y = 4\,, z = 7 \implies (4,4,7,9)$$
$$w = 3 \implies m = 3(18-3) = 45 \implies 45 = 3^2 + 6^2 \implies$$
$$x = 3\,, y = 6\,, z = 6 \implies (3,6,6,9)$$
$$w = 4 \implies m = 4(18-4) = 56 \implies 56 \neq x^2 + y^2$$
$$w = 5 \implies m = 5(18-5) = 65$$
$$\implies \begin{cases} 65 = 1^2 + 8^2 \implies x = 1\,, y = 8\,, z = 4 \implies (1,8,4,9) \\ 65 = 4^2 + 7^2 \implies x = 4\,, y = 7\,, z = 4 \implies (4,7,4,9) \end{cases}$$

نلاحظ أنه عندما نبدأ بالتكرار نتوقف.

نتيجة (1): من [2] والمبرهنة (2) إذا كان x عدداً فردياً ووضعنا:

$$y = \frac{x^2-1}{2}$$

فإنه: $\exists\, m \in N \;; m = x^2 + y^2 \quad ; \ \gcd(x, y) = d$

نوجد العدد z من العلاقة $z = \frac{m-\Omega^2}{2\Omega}$; حيث Ω أحد قواسم d $\frac{d}{\Omega} = k$

وتكون عندها $R = z + \Omega$

مثال(19) : من أجل $x = 3$ فإن $y = \frac{9-1}{2} = 4$

$$\gcd(3,4) = 1 = d$$

$$m = x^2 + y^2 = 9 + 16 = 25$$

$$\Omega = 1 \implies z = \frac{25-1}{2} = 12$$

$$R = Z + \Omega = 12 + 1 = 13$$

عندها يكون $(3,4,12,13)$ رباعية فيثاغورية أولية.

مثال(20) : من أجل $x = 13$ فإن $y = \frac{169-1}{2} = 84$

$$\gcd(13,84) = 1 = d$$

$$m = x^2 + y^2 = 169 + 7056 = 7225$$

$$\Omega = 1 \implies z = \frac{7225-1}{2} = 3612$$

$$R = Z + \Omega = 3612 + 1 = 3613$$

عندها يكون $(13,84,3612,3613)$ رباعية فيثاغورية أولية.

الإستنتاجات والتوصيات:

1) نوصي بربط هذه النتائج بعملية التشفير باستخدام مفاتيح داخل الكرات الفيثاغورية المتولدة بالاعتماد علي مصفوفات مربعة من الشكل 3×3 ويكون R هو المقاس.
2) نوصي بتوليد جميع النقاط اللامفتاحية المعتمدة على النقاط المحيطية للكرات الفيثاغورية اعتماداً على مولد خاص يعتمد على نصف قطر الكرة R .

المراجع العلمية

1. G.A. Jones and J. M Jones, Elementary Number Theory. Springer, 2005
2. K.Raja Gandhi, Generalization of Pythagorean triplets, quadruple, the bulletin of society for mathematical services and standards,2012, vol.1.pp 40-45.
3. B. Schneier , Applied cryptography. Second edition, protocols, algorithms and source coding C (John Wiley\& Sons), 1996.
4. Modern Cryptography: Applied Mathematics for Encryption and Information Security, Springer, William Easttom 2020.
5. Swapan Kumar Sarkar, a text book of discret mathematics s. chand & company ltd, New Delhi-110055, 2008.
6. Cryptology Classical and Modern By Richard E. Klima,Neil, P.Sigmon ,Neil Sigmon Copyright Year 2019
7. Al Khatib and Shamma, An algorithm for determining a relatively prime number and its symmetric product with base n. Journal of Natural Sciences and Mathematics (jnm) Vol.3 No.1 (2009).
8. Al Khatib and Shamma, On the modern cryptology method of Hill for encoded letters with ASCII system. Far East Journal of Mathematical Education FJME Volume 3 No. 2 (2009) June, pp. 183 – 193.
9. Al Khatib and Shamma, Generating basic Pythagorean triples from private integers, Journal of AL Baath University, Volume 38 (2016
10. Al Khatib and Shamma, the encryption using the operator integration applied to the system ASCII encoded messages, Journal of AL Baath University, Volume 38 (2015)
11. Al Khatib and Shamma, THE ENCRYPTION USING SPECIAL PYTHAGOREAN FUNCTION, Journal of AL Baath *University, Volume 38 (2016)*
12. Al Khatib and Shamma, Arab encryption developer, Journal of AL Baath University for engineering science, Volume 30 N.17(2008).

Internet Resources:

13. https://fliphtml5.com/hyxr/hyqj
14. https://www.mathworld.wolfram.com
15. https://en.wikipedia.org/wiki/pythagorean-quadruple