# حول طريقة النواة المولدة لتشكيل العلاقات التكعيبية وتطبيقاتها من أجل حساب التكاملات في منطقة السيمبلكس المنتظم بالحالة العامة في الفضاء $R^n$

طالبة الدراسات العليا: ورود محمد ابراهيم

قسم الرياضيات _ كلية العلوم _ جامعة البعث

– اشراف الدكتور حامد عباس

**ملخص البحث**

يهتم البحث بدراسة التكاملات المضاعفة بطريقة النواة المولدة في منطقة السميبلكس المنتظم الذي طول حرفه $a$، في الفضاء $\mathbb{R}^n$ من الشكل:

$$T_n^{(a)} = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \ : \ \sum_{i=1}^{n} x_i \le a \ , x = (x_1, x_2, ....x_n) \ \ , 0 \le x_i \le a \right\}$$

تم إيجاد الدستور الذي استخدم في إيجاد كثيرات الحدود المتعامدة النظامية $F(x)$ في المنطقة $T_n^{(a)}$، وتم إيجاد صيغة النواة المولدة الموافقة بحسب العلاقة :

$$k_k(u,x) = \sum_{i=0}^{n} F_i(u) F_i(x) \qquad , \quad k = 1, 2, .......$$

حصلنا من هذه الصيغة على علاقة تكعيبية صحيحة تماماً من أجل كل كثيرة حدود $f(x)$دقتها الجبرية تساوي $2$،أي لا تتجاوز $2k$ وتقريبية في حال كون درجتها أكبر من ذلك و $k$ درجة النواة المولدة. وتم التحقق من ذلك بعدد من الأمثلة.

**الكلمات المفتاحية:** العلاقات التكعيبية للسيمبلكس، الدوال المتعامدة، التكاملات المضاعفة.

# On the generative kernel method for formulating cubature formulas and its applications in order to calculate the integrals in the regular simplex region in the general case in the space $\mathbb{R}^n$


**Abstract**

This research is concerned with the study of double integrals using the generative kernel method in the regular simplex region of $a$ edge length in the $\mathbb{R}^n$ space of the form:

$$T_n^{(a)} = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \ : \sum_{i=1}^{n} x_i \le a \ , x = (x_1, x_2, ....x_n) \ , 0 \le x_i \le a \right\}$$

We find the formula which is used to find the normal orthogonal polynomials $F(x)$ in the region $T_n^{(a)}$ and the corresponding generative kernel formula was found according to:

$$k_k(u,x) = \sum_{i=0}^{n} F_i(u) F_i(x) \quad , \quad k = 1, 2, .......$$

We obtained from this formula a completely correct cubature formulas valid for every polynomial $f(x)$ with algebraic precision equals to 2, namely, it doesn't exceed $2k$ , and it's approximate when its degree is greater than this case, where $k$ is the degree of the generative kernel.

We give some examples to verify these results


**Key words:** The simplex cubature formulas , the orthogonal functions,

**مقدمة البحث:**

اكتشفت طريقة النواة المولدة لتشكيل العلاقات التكعيبية عام 1968من قبل I.P.Mysovskikh، حيث وضع النظرية العامة لهذه الطريقة. برهن Moler في بداية السبعينيات النظرية العامة، ثم أثبت نظرية أخرى مشابهة، حيث اعتبر أن المنطقة التكاملية تمتلك خاصة التناظر المركزي. تم تشكيل بعض العلاقات التكعيبية البسيطة من أجل منطقة السمبيلكس المنتظم الذي طول حرفه يساوي الواحد $a=1$ [5]، ودرست بعض خواص النواة المولدة في تلك المنطقة.

إنَّ البحوث الجارية في هذا المجال تدور حول دراسة خواص النواة المولدة وتطبيق هذه الطريقة في مناطق تكاملية أوسع، والحصول على علاقات تكعيبية جديدة يمكن استخدامها من أجل حساب القيمة التقريبية للتكاملات المضاعفة.

قبل عرض طريقة النواة المولدة لتشكيل العلاقات التكعيبية، لابد من توضيح بعض المفاهيم الأساسية. العلاقة التكعيبية هي مساواة تقريبية من الشكل:

$$\int_{\Omega}\omega(x)f(x)dx \cong \sum_{j=1}^{N} c_j f(\mathbf{x}_j) \qquad (1)$$

حيث إنَّ $x_j$ هي نقاط مختلفة مثنى مثنى وتدعى نقاط المكاملة أو عقد العلاقة التكعيبية، و $c_j$ الثوابت الموافقة لتلك النقاط، $f(x)$ الدالة المستكملة و $\omega(x)$ دالة الوزن ، أما $\Omega$ فهي المنطقة التكاملية.

**مبرهنة1:[2]** بفرض أن $\Omega$ تحوي نقاط داخلية، وبفرض أن $\omega(x)$ تحقق الشرط: $\omega(x)\geq 0\ ,\ \forall x\in\Omega \Rightarrow \int_{\theta}\omega(x)dx>0$ ، والعلاقة التكعيبية(1) بـ $N$ من النقاط تملك دقة جبرية $d$ ، ومن أجل $d\geq 2$ نقاط العلاقة (1) لا تقع على سطح جبري من المرتبة k ، عند ذلك يكون:

$$N \geq \partial = M(n,k) = \frac{(n+k)!}{n!.k!} \quad : \quad k = \left\lfloor \frac{d}{2} \right\rfloor$$

الرمز $k = \left\lfloor \frac{d}{2} \right\rfloor$ يعني القسم الصحيح من الكسر $\frac{d}{2}$.

**مبرهنة2:[ 2 ]**

بفرض أن $\Omega$ تحوي نقاط داخلية ، $\Omega$ و $\omega(x)$ يحققان خاصة التناظر المركزي (3)بالنسبة لـ $\theta = (0,0,....,0)$ ، والعلاقة التكعيبية(5) بـ $N$ من العقد تملك دقة جبرية $2K+1$ ، إذا لم تكن $\theta$ من بين عقد العلاقة التكعيبية، فإنَّ :

$$N \geq \begin{cases} 2(\partial - \nu) & ; \quad k \text{ زوجيّ} \\ 2\nu & ; \quad k \text{ فرديّ} \end{cases}$$

إذا كانت $\theta$ عقدة للعلاقة التكعيبية، فإنَّ:

$$N \geq \begin{cases} 2(\partial - \nu) - 1 & ; \quad k \text{ زوجيّ} \\ 2\nu + 1 & ; \quad k \text{ فرديّ} \end{cases}$$

هنا $\nu$ عدد وحيدات الحد غير الزوجية، التي درجتها لا تتجاوز $k$ بـ $n$ من المتحولات.

**تعريف:[2]**النواة المولدة هي كثيرة حدود من الدرجة $k$ تحتوي على $2n$ من المتحولات $u = (u_1, u_2, ..., u_n)$ و $x = (x_1, x_2, ...., x_n)$ حيث $k_k(u,x)$ يرمز لها بـ

تدعى مولدة لأنها تحقق الخاصة التالية:

$$F(u)=\int_{\Omega}\omega(x).K_K(u,x).F(x)\,dx$$

حيثُ $dx=dx_1.dx_2\ \ ....dx_n$، و $k$ هي درجة كثيرة الحدود المتعامدة النظامية $F(x)$ .وتكون $F_i(x)$ متعامدة نظامية؛ $i=0,1,2,...,n$ ، إذا كان:

$$(F_i(x).F_j(x))=\int_{\Omega}\omega(x).F_i(x).F_J(x)dx=\delta_{ij}\quad;\quad \delta_{ij}=\begin{cases}0 & i\neq j\\ 1 & i=j\end{cases}\qquad (2)$$

يمكننا إيجاد النواة المولدة بالشكل التالي:

$$k_k(u,x)=\sum_{j=1}^{\mu}F_j(u).F_j(x)$$

$$\tilde{k}_k(u,x)=\sum_{j=1}^{\mu}{}'\,F_j(u).F_j(x)\qquad (3)$$

حيثُ إنَّ $\mu=M(n,k)=\dfrac{(n+k)}{n!k!}$ إشارة الفتحة فوق رمز المجموع الأخير تعني أن المجموع يؤخذ بـ $j$ الموافقة لـــ $k$،فإذا كانت $k$ فردية ، فإن $j$ تأخذ القيم الفردية فقط ، أما إذا كانت $k$ زوجية ، فإن $j$ تأخذ القيم الزوجية فقط .النواة $\tilde{K}_k(x,u)$ تستخدم في حالة كون كل من الوزن $\omega(x)$ والمنطقة $\Omega$تمتلك خاصة التناظر المركزي، أي أن :

$$x\in\Omega\Rightarrow -x\in\Omega\quad,\omega(x)=\omega(-x)\qquad (4)$$

لتشكيل العلاقات التكعيبية نستخدم المبرهنتين التاليتين من[2].

**مبرهنة 3: [2]** بفرض أن النقاط $a^{(i)}$ و $i=1,2,........,n$ تحقق الشرط :

$$K_k(a^{(i)},a^{(j)})=b_i\,\delta_{ij}\qquad ;i,j=1,2,......,n$$

تتكون $\bigcap_{i=1}^{n}H_i$ من النقاط $x^{(j)}$ و $s=k^n,\ j=1,2,......,s$

عندئذ يمكن تشكيل العلاقة التكعيبية :

$$\int_{\Omega} \omega(x).f(x)dx \cong \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{b_i} f(a^{(i)}) + \sum_{j=1}^{s} C_j f(a^{(j)}) \qquad (5)$$

حيث أن: $b_i = K_k(a^{(i)}, a^{(i)}) \neq 0$

**مبرهنة 4:[ 2]** بفرض أن كلا من $\omega(x)$ و $\Omega$ تحقق خاصة التناظر المركزي(4)،والنقاط $a^{(i)}$ تحقق الشرط:

$$\tilde{K}_k(a^{(i)}, a^{(i)}) = b_i.\delta_{ij} \quad ; i 1,2,.....,n, j = 1,2,.....,n$$

تتكون $\bigcap_{i=1}^{n} \tilde{H}_i$ من النقاط المختلفة مثنى مثنى $s = k^n, x^{(1)}, x^{(2)}, .......x^{(s)}$،عندئذ يمكن تشكيل العلاقة التكعيبية :

$$\int_{\Omega} \omega(x).f(x)dx \cong \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{2b_i} \left[ f(a^{(i)}) + f(-a^{(i)}) \right] + \sum_{j=1}^{s} C_j f(x^{(j)}) \qquad (6)$$

فكل من $\tilde{H}_1, H_1$ معادلة سطح من الدرجة $K$ ،التي تحددها النقطة $a^{(i)}$ بالشكل :

$$H_i \equiv K_k(a^{(i)}, x) = 0 \quad , \quad \tilde{H}_i \equiv \tilde{K}_k(a^{(i)}, x) = 0$$

أما $\bigcap_{i=1}^{n} H_i$ وكذلك $\bigcap_{i=1}^{n} \tilde{H}_i$ فهو مجموعة الحلول المشتركة لجملة المعادلات غير خطية بـ $n$متحولاً. العلاقة (5) صحيحة من أجل كثيرات الحدود التي درجتها لا تتجاوز $2k$ ،أما(6) فهي صحيحة من أجل كثيرات الحدود التي درجتها لا تتجاوز $2k+1$ .

تتضمن طريقة النواة المولدة المستخدمة في هذه الدراسة المراحل التالية:

–تشكيل كثيرات الحدود المتعامدة النظامية، وذلك باستخدام العلاقة (2).

-إيجاد صيغة النواة المولدة $K_k(u,x)$ أو $\tilde{K}_k(u,x)$ حسب العلاقة (3).

-اختيار النقاط $u_i = a^{(i)}$، حيث إن: $i = 1,2,.....,n$، وبعد التعويض في إحدى صيغتي النواة السابقة (5) أو (6)نحصل على مجموعة من المعادلات غير الخطية بشكل عام، والتي يجب حلها للحصول على عقد العلاقة التكعيبية $x^{(i)}$ الموافقة للنقاط $a^{(i)}$،يتم اختيار النقاط $u_i = a^{(i)}$ بشكل تكون فيه جملة المعادلات الناتجة قابلة للحل وهذا يتم بأكثر من طريقة، وأخيراً نحسب الثوابت $C_j$من كون العلاقة التكعيبية تحقق الدقة الجبرية المطلوبة وبالتالي نحصل على العلاقة التكعيبية المطلوبة.

## 2- هدف البحث وطريقته:

يهدف هذا البحث إلى تطبيق طريقة النواة المولدة لتشكيل العلاقات التكعيبية في منطقة السيمبلكس المنتظم $\Omega = T_n^{(a)}$ ، الذي طول حرفه يساوي $a$ في الفضاء $\mathbb{R}^n$ ودالة الوزن $\omega(x) = 1$،ومن أجل الحصول على علاقات تكعيبية، يمكن استخدامها في حساب القيمة التقريبية للتكاملات المضاعفة. قبل ذلك يجب إيجاد كثيرات الحدود المتعامدة النظامية في المنطقة المذكورة، فالمسألة المطروحة هي: إمكانية تطبيق هذه الطريقة على منطقة السيمبلكس المنتظم الذي طول حرفه $a$ في الفضاء $\mathbb{R}^n$، ودالة الوزن $\omega(x) = 1$.

**النتائج ومناقشتها:**

## 1- إيجاد الدستور التكاملي في المنطقة $T_n^{(a)}$

نوجد تكاملُ الدّوال ذات القوى الصَّحيحة من الشّكل التالي:

$$\int_{T_n^{(a)}} x^{\alpha} dx = \iint_{T_n^{(a)}} \dots \int x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n} dx_1 dx_2 \dots dx_n$$

حيث إن:

$$\begin{aligned} x &= (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \\ dx &= dx_1 dx_2 \dots dx_n \\ \alpha &= (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \\ |\alpha| &= \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n \end{aligned}$$

حيث $\alpha$ دليل متعدد التغيرات

بالاعتماد على صيغة ديرخليه للتكاملات المتكررة في الفضاء $\mathbb{R}^n$ ،والتي تكتب بالشكل التالي:

$$\int \dots\dots \int_{T_n^{(a)}} x_1^{p_1-1} x_2^{p_2-1} \dots x_n^{p_n-1} dx_1 dx_2 \dots dx_n$$

$$= \frac{a^{p_1+p_2+\dots+p_n} \, .\Gamma(p_1).\Gamma(p_2) \dots \Gamma(p_n)}{\Gamma(p_1+p_2+\dots+p_n+1)}$$

حيث إن :

$$\frac{x_1}{a}+\frac{x_2}{a}+\ldots+\frac{x_n}{a}\le 1$$ أو $$x_1+x_2+\ldots+x_n\le a$$ :

نفرض أن:

$$p_i-1=\alpha_i \quad ; i=1,2,\ldots,n$$

نعوض في صيغة ديرخليه فيكون:

$$\int\limits_{T_n^{(a)}}\ldots\ldots\int x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\ldots x_n^{\alpha_n}dx_1dx_2\ldots dx_n=\int\limits_{T_n^{(a)}}x^{\alpha}dx$$

$$=\frac{a^{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+n}\Gamma(\alpha_1+1)\Gamma(\alpha_2+1)\ldots\Gamma(\alpha_n+1)}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n+n+1)}$$

وباعتبار $\Gamma(\alpha_i+1)=\alpha_i\,!$ حيث $\alpha_i$ عدد صحيح موجب:

$$\int\limits_{T_n^{(a)}}x^{\alpha}dx=\frac{a^{|\alpha|+n}\alpha_1!\alpha_2!\ldots\alpha_n!}{(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n+n)!}$$

حيث إن:

$$\alpha!=\alpha_1!\alpha_2!\ldots\alpha_n!$$

نجد أخيرا:

$$\int\limits_{T_n^{(a)}}x^{\alpha}dx=a^{|\alpha|+n}\cdot\frac{\alpha!}{(|\alpha|+n)!} \qquad (7)$$

وهي علاقة أساسية جديدة بالتكاملات المتكررة، وصحيحة فقط من أجل الدوال كثيرة الحدود ذات القوى الصحيحة الموجبة بالنسبة للمتحولات $x_i \quad ; i = 1, 2..., n$ .

**ملاحظة:** تم إيجاد هذا الدستور التكاملي بطريقة أخرى وهي طريقة التدريج، أي تم إيجاد الدستور في التكاملات الأحادية والتكاملات الثنائية والتكاملات الثلاثية، ثم كتابة الدستور في التكاملات المتكررة في المنطقة $T_n^{(a)}$ .

لإيجاد كثيرات الحدود المتعامدة والنظامية، سوف نعتمد على طريقة غرام شميت:[ 1 ]

## 2- إيجاد كثيرات الحدود المتعامدة والنظامية:

**تعريفٌ:**

السمبلكس المنتظمُ المعمَّمُ هو منطقةٌ من الفضاء $\mathbb{R}^n$، يعرف بالشكل الآتي:

$$T_n^{(a)} = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \ : \ \sum_{i=1}^{n} x_i \le a \ \ , x_i \ge 0 \right\}$$

من الواضح أن كل نقطة من السمبلكس المنتظم السابق تكون مركباتها تحقق المتراجحة التالية:

$$0 \le x_i \le a$$

حيث $a$ طول كل من الأحرف الجانبية للمنطقة $T_n^{(a)}$، علما أن السيمبلكس العادي يكون طول كل من الأحرف الجانبية له يساوي الواحد.

وهو في المستوي عبارة عن مثلث متساوي الساقين وقائم في مبدأ الإحداثيات، وفي الفضاء ثلاثي الأبعاد يمثل هرماً متساوي الحروف رأسه مبدأ الإحداثيات وقاعدته مثلث ناتج عن تقاطع مستوٍ ما مع المحاور الإحداثية بنقاط متساوية البعد عن مبدأ الإحداثيات.

لإيجاد كثيرات الحدود المتعامدة والنظامية،سوف نعتمد على مبدأغرام شميت[1] في التعامد والنظيم التالي:

نحصل على كثيرات الحدود المتعامدة والنظامية على المنطقة $T_n^{(a)}$ انطلاقاً من مجموعة الدوال المستقلة خطياً التالية:

$$1, x^1, x^2, x^3, \ldots, x^n$$

كثيرة الحدود المتعامدة والنظامية من الدرجة $n$ تكتب على الشكل التالي:

$$F_n(x) = C_n\left(x^n - \sum_{k=0}^{n-1} \beta_k F_k\right) \tag{8}$$

نعين الثوابت $\beta_k$ ، $k = 0,1,\ldots,n-1$ ، بحيث تكون كثيرة الحدود هذه متعامدة مع كل كثيرات الحدود $F_0, F_1, F_2, \ldots, F_{k-1}$ أي أن:

$$\left(x^n - \sum_{k=0}^{n-1} \beta_k F_k\right) \perp \left(F_0, F_1, F_2, \ldots, F_{k-1}\right)$$

حيث إن: $k = 0,1,\ldots,n-1 \quad , \quad \beta_k = \langle x^n, F_k \rangle$

بحساب هذه الثوابت وتبديلها في المساواة (7) نحصل على كثيرات الحدود المتعامدة .

نجد الثابت $C_n$ بحيث يكون: $\langle F_n(\mathrm{x}), F_n(\mathrm{x})\rangle = 1$.

لنفرض أولاً أن $f_0(x) = 1$ ونوجد نظيم هذه الدالة بوضع $F_0(x) = c_0$، فيكون يكون الجداء الداخلي $\langle F_0(x), F_0(x)\rangle = 1$. بتبديل $F_0(x)$ بـ $c_0$ يكون: $\langle c_0, c_0\rangle = 1$، وهذا يعني أن :

$$\int_{T_n^{(a)}} 1.c_0{}^2 dx = c_0{}^2\left[\frac{a^n}{n!}\right] = 1 \quad \Rightarrow \quad c_0{}^2 = \frac{n!}{a^n} \quad \Rightarrow \quad c_0 = \sqrt{\frac{n!}{a^n}} \Rightarrow$$

$$F_0(x) = \sqrt{\frac{n!}{a^n}}$$

نجعل $f_1(x) = x$ متعامدة مع $F_0(x)$ ثم نجعلها نظامية كما يلي:

$$F_1(x) = c_1\left[x_1 - \beta_0 F_0(x)\right]$$

حيث إنَّ:

$$\beta_0 = \langle x_1, F_0(x)\rangle = \left\langle x_1, \sqrt{\frac{n!}{a^n}}\right\rangle = \int_{T_n^{(a)}} x_1\sqrt{\frac{n!}{a^n}}dx = \sqrt{\frac{n!}{a^n}}\int_{T_n^{(a)}} x_1 dx$$

$$\Rightarrow \beta_0 = \sqrt{\frac{n!}{a^n}}.\frac{a^{n+1}}{(n+1)!}$$

بالتالي يكون

$$F_1(x) = c_1\left[x_1 - \frac{a}{n+1}\right] \quad \Rightarrow \quad c_1{}^2\int_{T_n^{(a)}}\left[x_1 - \frac{a}{n+1}\right]^2 dx = 1$$

بفك المطابقة

$$c_1^{\ 2}\int_{T_n^{(a)}}\left[x_1^{\ 2}-\frac{2x_1a}{n+1}+\frac{a^2}{(n+1)^2}\right]dx=1$$

بتوزيع التكامل على الحدود نجد إنَّ:

$$\Rightarrow c_1^{\ 2}\left[\frac{2!a^{n+2}}{(n+2)!}-2\frac{a}{n+1}.\frac{a^{n+1}}{(n+1)!}+\frac{a^2}{(n+1)^2}.\frac{a^n}{n!}\right]=1$$

بإخراج العامل المشترك $a^{n+2}$ يكون :

$$\Rightarrow\ c_1^{\ 2}a^{n+2}\left[\frac{2!(n+1)-2(n+2)+(n+2)}{(n+1)(n+2)!}\right]=1$$

$$\Rightarrow c_1^{\ 2}a^{n+2}\left[\frac{2n+2-2n-4+n+2}{(n+1)(n+2)!}\right]=c_1^{\ 2}a^{n+2}\left[\frac{n}{(n+1)(n+2)!}\right]=1$$

$$\Rightarrow\quad c_1^{\ 2}=\frac{(n+1)(n+2)!}{na^{n+2}}\Rightarrow c_1=\sqrt{\frac{(n+1)(n+2)!}{na^{n+2}}}$$

بتبديل $c_1$ نجد كثيرة الحدود المتعامدة النظامية $F_1(x)$ بالشكل التالي:

$$\Rightarrow F_1(x)=\sqrt{\frac{(n+1)(n+2)!}{na^{n+2}}}\left[x_1-\frac{a}{n+1}\right]=\sqrt{\frac{(n+2)!}{n(n+1)a^{n+2}}}\left[(n+1)x_1-a\right]$$

بنفس الطريقة يمكن إيجاد كثيرات الحدود المتعامدة النظامية التالية:

$$F_2(x)=\sqrt{\frac{(n+2)!}{n(n-1)a^{n+2}}}\left[nx_2+x_1-a\right]$$

$$F_3(x)=\sqrt{\frac{(n+2)!}{(n-1)(n-2)a^{n+2}}}\left[(n-1)x_3+x_2+x_1-a\right]$$

$$F_4(x)=\sqrt{\frac{(n+2)!}{(n-2)(n-3)a^{n+2}}}\left[(n-2)x_4+x_3+x_2+x_1-a\right]$$

.....................................................................

$$F_n(x)=\sqrt{\frac{(n+2)!}{1.2..a^{n+2}}}\left[2x_n+\sum_{i=1}^{n-1}x_i-a\right]$$

وهي كثيراتُ الحدود المتعامدة والنظاميَّة من الدرجة الأولى.يمكن كتابة كثيرات الحدود المتعامدة والنظامية السابقة ضمن صيغة عامة على الشكل التالي:

$$F_0(x)=\sqrt{\frac{n!}{a^n}}$$

$$F_k(x)=\sqrt{\frac{(n+2)!}{(n-k+2)(n-k+1)..a^{n+2}}}\left[(n-k+2)x_k+\sum_{i=1}^{k-1}x_i-a\right]$$

$$k=1,2,...,n$$

### 3- إيجاد صيغة النواة المولدة الموافقة:

لنوجد صيغة النواة المولدة الموافقة اعتماداً على الصيغة العامة للنواة (12)،نجد:

$$K_1(u,x)=\frac{n!}{a^n}+\frac{(n+2)!}{n.(n+1).a^{n+2}}.\left[(n+1).x_1-a\right].\left[(n+1)u_1-a\right]+$$
$$+\frac{(n+2)!}{n\left(n-1\right)a^{n+2}}.\left[nx_2+x_1-a\right].\left[nu_2+u_1-a\right]+$$
$$+\frac{(n+2)!}{\left(n-1\right)\left(n-2\right)a^{n+2}}.[(n-1)x_3+x_2+x_1-a].[(n-1)u_3+u_2+u_1-a]+$$

..........................................................................................

$$+\frac{(n+2)!}{2.3.a^{n+2}}.[3x_{n-1}+x_{n-2}+.....+x_1-a].[3u_{n-1}+u_{n-2}+.....+u_1-a]$$
$$+\frac{(n+2)!}{1.2.a^{n+2}}.[2x_n+x_{n-1}+.....+x_1-a].[2u_n+u_{n-1}+.....+u_1-a]$$

بإخراج العامل المشترك $\frac{(n+2)!}{a^{n+2}}$ ، نجد إنَّ:

$$K=\frac{n!}{a^n}+\frac{(n+2)!}{a^{n+2}}.\{\frac{1}{n(n+1)}[(n+1)x_1-a].[(n+1)u_1-a]+$$
$$\frac{1}{n(n-1)}[nx_2+x_1-a].[nu_2+u_1-a]+\frac{1}{(n-1)(n-2)}[(n-1)x_3+x_2+x_1-a].$$
$$[(n-1)u_3+u_2+u_1-a]+.........+\frac{1}{2.3}[3x_{n-1}+x_{n-2}+...+x_1-a].$$
$$[3u_{n-1}+u_{n-2}+...+u_1-a]+\frac{1}{1.2}[2x_n+x_{n-1}+...+x_1-a][2u_n+u_{n-1}+...+u_1-a]\}$$

نكتب المضاريب التي تضم $x_1$ ، ثم المضاريب التي تضم $x_2$ وهكذا...،حتى نصل إلى المضاريب التي تضم $x_n$، ثم نحسب الحد الثابت ، فنجد

**حساب الحد الذي يحوي $x_1$ :**

$$\frac{(n+2)!}{a^{n+2}}x_1[\frac{1}{n}[\left(n+1\right)u_1-a]+\frac{1}{n(n-1)}[nu_2+u_1-a]$$
$$+\frac{1}{(n-1)(n-2)}[(n-1)u_3+u_2+u_1-a]$$
$$+\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$+\frac{1}{2.3}[3u_{n-1}+u_{n-2}+\dots\dots+u_1-a]+\frac{1}{1.2}[2u_n+u_{n-1}+\dots\dots..+u_1-a]]$$

نكتب أمثال $u_1$، أمثال $u_2$ ، ...، أمثال $u_n$، وهكذا، والحد الثابت، نجد أنَّ:

$$=\frac{(n+2)!}{a^{n+2}}x_1[(\frac{n+1}{n}+\frac{1}{n(n-1)}+\frac{1}{(n-1)(n-2)}+\dots\dots\dots..+\frac{1}{6}+\frac{1}{2})u_1$$
$$+(\frac{n}{n(n-1)}+\frac{1}{(n-1)(n-2)}+\dots\dots..+\frac{1}{6}+\frac{1}{2})u_2$$
$$+\dots\dots\dots\dots\dots.$$
$$+(\frac{1}{2}+\frac{1}{2})u_{n-1}+\frac{2}{2}u_n-(\frac{1}{n}+\frac{1}{n(n-1)}+\dots\dots+\frac{1}{2})a]$$

من المعلوم أن:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\dots\dots.+\frac{1}{n(n-1)}=\frac{n}{n+1} \qquad (*)$$

ومنه يكون:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+.........+\frac{1}{n(n-1)}+\frac{n+1}{n}=\frac{n}{n+1}-\frac{1}{n(n+1)}+\frac{n+1}{n}=2$$

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+.........+\frac{1}{(n-1)(n-2)}+\frac{n}{n(n-1)}=\frac{n}{n+1}-\frac{1}{n(n-1)}-\frac{1}{n(n+1)}+\frac{n}{n(n-1)}$$

$$=\frac{n}{n+1}+\frac{1}{n}-\frac{1}{n(n+1)}=1$$

إن أمثال $u_1$ في داخل القوسين السابقين تساوي العدد 2، وأمثال $u_i$ . $i=2,3....,n$ تساوي العدد 1 .

ونفس المناقشة بالنسبة للحدود التي تحوي $x_2,x_3,.......x_n$ .

في حساب الحد الذي يحوي $x_2$ نجد إن أمثال $u_2$ تساوي العدد 2، وباقي الأمثال تساوي العدد 1 .وأخيراً في حساب الحد الذي يحوي $x_n$ نجد إن أمثال $u_n$ تساوي العدد 2، وباقي الأمثال تساوي العدد 1.

**حساب الحد الثابت العام للنواة:**

$$\frac{n!}{a^n}+\frac{(n+2)!}{a^{n+2}}a^2[\frac{1}{n(n+1)}+\frac{1}{n(n-1)}+\frac{1}{(n-1)(n-2)}+......+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{2}]$$

حسب المساواة (*):

$$\frac{n!}{a^n}+\frac{(n+2)!}{a^n}(\frac{n}{n+1})=(n+1)!.\frac{n+1}{a^n}$$

إذاً الحد الثابت يساوي:

$$\frac{n!}{a^n}+\frac{(n+2)!}{a^{n+2}}a^2\left(\frac{n}{n+1}\right)$$

يمكننا كتابة النواة المولدة بالشكل التالي:

$$K_1(u,x)=\frac{n!}{a^n}+\frac{(n+2)!}{a^{n+2}}[x_1(u_1+\sum_{i=1}^{n}u_i-a)+x_2(u_2+\sum_{i=1}^{n}u_i-a)+\ldots\ldots$$
$$+x_n(u_n+\sum_{i=1}^{n}u_i-a)-a(\sum_{i=1}^{n}u_i)+a^2\frac{n}{n+1}]$$

نكتب الحدود التي تحوي $x_i$ ، $i=1.2,....,n$ ضمن رمز المجموع، نجد إن:

$$K_1(u,x)=\frac{n!}{a^n}+\frac{(n+2)!}{a^{n+2}}\left[\sum_{j=1}^{n}x_j(u_j+\sum_{i=1}^{n}u_i-a)-a\sum_{i=1}^{n}u_i+a^2\frac{n}{n+2}\right]$$

ومنه نجد

$$K_1(u,x)=\frac{(n+2)!}{a^n}\left[\frac{1}{a^2}\sum_{j=1}^{n}x_j(u_j+\sum_{i=1}^{n}u_i-a)-\frac{1}{a}\sum_{i=1}^{n}u_i+\frac{n+1}{n+2}\right]$$

(9)

وهي الصيغة العامة للنواة المولدة.

## 4_.تشكيل العلاقة التكعيبية.

تكمن طريقة النواة المولدة في اختيار n من النقاط ولتكن النقاط $u^{(i)};i=1,2,..,n$،وهذا ممكن بعدد من الطرق ، سنحاول اختيار النقاط بحيث نحصل على جملة من المعادلات الخطية سهلة الحل وممكنة ومنه نختار النقاط $u^{(i)}$ بحيث، يكون:

$$\sum_{j=1}^{n} u_j = a \qquad (**)$$

من أجل ذلك نختار النقطة $u^{(1)}$ تحقق الشرط (**) بالشكل التالي:

$$u^{(1)} = (a, 0, 0, ......., 0)$$

بالتبديل في صيغة النواة المولدة (8) نجد معادلة المستوي التالي:

$$H_1: \quad x_1 - \frac{a}{n+2} = 0 \quad \Rightarrow \quad H_1: \quad (n+2)x_1 - a = 0$$

على هذا المستوي نختار النقطة ا $u^{(2)}$ تحقق الشرط (**) بالشكل التالي:

$$u^{(2)} = (\frac{a}{n+2}, a.\frac{n+1}{n+2}, 0, ......., 0)$$

بالتبديل في صيغة النواة المولدة (8) نجد معادلة المستوي التالي:

$$H_2 = x_1 + (n+1)x_2 - a = 0$$

على تقاطع المستويين $H_1$ ، $H_2$ نختار النقطة الثالثة وتحقق الشرط (**):

$$u^3 = (\frac{a}{n+2}, \frac{a}{n+2}, a.\frac{n}{n+2}, 0, ........, 0)$$

بالتبديل في صيغة النواة المولدة (8) نجد معادلة المستوي التالي:

$$H_3 = x_1 + x_2 + nx_3 - a = 0$$

وهكذا نختار النقطة الرابعة على التقاطع $\bigcap_{i=1}^{3} H_i$ وتحقق الشرط (**):

$$u^{(4)}=(\frac{a}{n+2},\frac{a}{n+2},\frac{a}{n+2},\frac{a(n-1)}{n+2},0,.....,0)$$

بالتبديل في صيغة النواة المولدة (8)نجد معادلة المستوي التالي:

$$H_4=\sum_{i=1}^{3}x_i+(n-1)x_4-a=0$$

....................................

وهكذا نختار النقطة الأخيرة على تقاطع المستويات $\bigcap_{i=1}^{n-1}H_i$ وتحقق الشرط (**)بالشكل التالي: $u^{(n)}=(\frac{a}{n+2},......,\frac{a}{n+2},\frac{3a}{n+2})$

بالتبديل في صيغة النواة المولدة (8)نجد معادلة المستوي التالي:

$$H_n=x_1+x_2+.....+x_{n-1}+3x_n-a=0$$

نحصل على جملة المعادلات التالية الناتجة عن تقاطع المستويات $H_i;i=1,2,...,n$ :

النقطة:

$$(\frac{a}{n+2},\frac{a}{n+2},......,\frac{a}{n+2})=u^{(n+1)}$$

هي حل جملة المعادلات الخطية الناتجة، حسب المبرهنة (3) يمكن كتابة العلاقة التكعيبية التالية:

$$\int_{T_n^{(a)}}f(x)dx\cong\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{b_i}f(a^{(i)})+\sum_{j=1}^{s}c_jf(x^{(j)})\quad;s=k^n$$

باعتبار أن $s = 1^n = 1$ ، فإنَّ هذه العلاقة تكتب بالشكل:

$$I = \int_{T_n^{(a)}} \omega(x).f(x)dx \cong \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{b_i} f(a^{(i)}) + cf(a^{(i+1)}) \quad ; b_i \neq 0$$

$$K_K(a^{(i)}, a^{(i)}) = b_i \delta_{ij}$$

حيث $\delta_{ij}$رمز كرونيكر.

الثوابت $A_i = \frac{1}{b_i}$ نحصل عليها بالشكل:

$$A_i = \left[k_1(a^{(i)}, a^{(i)})\right]^{-1}, i = 1.2....n \quad \Rightarrow \quad A_1 = \frac{a^n(n+2)}{(n+1)(n+2)(n+1)!}$$

$$A_2 = \frac{a^n(n+2)}{n(n+1)(n+1)!}$$

$$A_3 = \frac{a^n(n+2)}{n(n-1)(n+1)!}$$

..............................

$$A_n = \frac{a^n(n+2)}{2.3.(n+1)!} \Rightarrow A_{n+1} = \frac{a^n(n+2)}{1.2(n+1)!}$$

بشكل عام، يمكن كتابة الثوابت $A_K ; k = 1, 2, ......, n+1$ بالشكل التالي:

$$A_k = \frac{a^n(n+2)}{(n+1)![(n-k+2)].[n-k+3]} \quad , k = 1, 2, .., n+1$$

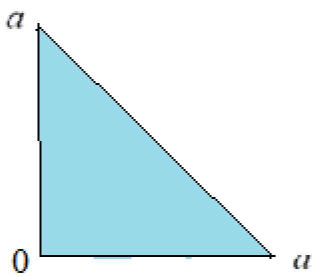
$$\int_{T_n^{(a)}} f(x)dx \cong \sum_{i=1}^{n+1} A_i f(a^{(i)}) \qquad (10)$$

العلاقة التكعيبية $(10)$ مع الثوابت $k=1,2,...,n+1$ ; $A_k$ ، والنقاط $i=1,2,...,n+1$; $u^{(i)}$ صحيحة من أجل كل كثيرات الحدود التي درجتها لا تتجاوز $k=1 \Rightarrow m=2k=2$ ، وتقريبية إذا كانت درجة كثيرات الحدود من درجات عليا، عدد نقاط العلاقة التكعيبية يطابق الحد الأدنى لعدد النقاط حسب المبرهنة $(1)$ الخاصة بعدد النقاط وجميع النقاط داخل المنطقة التكاملية والثوابت موجبة.

**تطبيق1:** من أجل $f(x)=1$ نجد في المستوي $n=2$ أن:

$$\int_{T_n^{(a)}} f(x)dx = \int_{T_2^{(a)}} dx = A_1 + A_2 + A_3 = \frac{4a^2}{3.4.3!} + \frac{4a^2}{3.2.3!} + \frac{4a^2}{1.2.3!} = \frac{a^2}{2}$$

وهي مساحة المثلث القائم الذي طول كل من ضلعيه القائمتين $a$، كما في الشكل التالي:

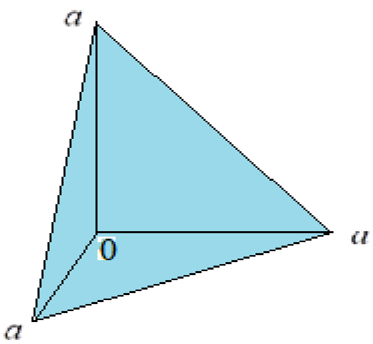



وهذا يشير الى صحة العلاقة $(10)$

**تطبيق2:** في الفضاء ثلاثي الأبعاد $R^3$ نجد أنَّ:

$$\int_{T_n^{(a)}} f(x)dx = \int_{T_3^{(a)}} dx = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 = \frac{a^3}{4.4!} + \frac{5a^3}{4!.3.4} + \frac{5a^3}{4!.2.3} + \frac{5a^3}{4!.1.2}$$

$$= \frac{a^3}{4!}[\frac{1}{4} + \frac{5}{12} + \frac{5}{6} + \frac{5}{2}] = \frac{a^3}{6}$$




هو حجم السيمبلكس في الفضاء $\mathbb{R}^3$ وهذا يشير الى صحة العلاقة (10)

ولنأخذ الدالة $f(x) = x_1$ ولنتحقق من صحة العلاقة (10) أيضا:

في المستوي يكون $n = 2$ يكون :

$$A_1 f(x_1) + A_2 f(x_2) + A_3 f(x_3)$$
$$\frac{4a^2}{3!.3.4}(a) + \frac{4a^2}{3.2.3!}(\frac{a}{4}) + \frac{4a^2}{2.1.3!}\frac{(a)}{4}$$
$$= \frac{4a^3}{3!}[\frac{1}{12} + \frac{1}{6.4} + \frac{1}{2.4}] = \frac{4a^3}{3!}\frac{6}{24} = \frac{a^4}{3!} = \frac{a^3}{6}$$

وهو التكامل:

$$\int_{T_2^{(a)}} x\,dx = \frac{a^3}{6}$$

وهذا يدل على صحة العلاقة التقريبية (10)

يمكن استخدام العلاقة التقريبية (10)لحساب التكاملات التقريبية لأي دالة $f(x)$، وتكون النتائج تقريبية في حالة كون هذه الدالة من درجات أعلى من الدرجة الثانية، أنواع اخرى من الدوال (دوال أسية، المثلثية، جذرية، لوغاريتمية ...) كما يمكن حساب التكاملات للدوال العكسية والمثلثية العكسية والقطعية.....

## الاقتراحات والتوصيات:

1- تشكيل علاقات تقريبية ذات دقة أعلى.
2- العلاقات التقريبية للتكاملات المضاعفة في منطقة السيمبلكس غير المنتظم
3- البحث عن مناطق تكاملية أخرى.

## المراجع المستخدمة:

[1]_جامعة البعث _الدكتور حامد عباس _التحليل العددي2 _2018_2019

[2]. Mysovskikh, I.P.1981-Interpolation of cubature formulas ,Nowak . Mowscou.336.p

[3].cege.g..1962-orthogonal polynomials, Moscow.500.p.

[4].Mysovskih.I.p.Abbas.H.A.1991-about generative Kernel method for cubature Formulas. vesting Leningrad university _N7 P 3-11

[5].Abbas.H.A.1991-about generative Kernel method for cubature Formulas For simplex. vesting Leningrad

[6].Krilov .1967_Numerical approximation for lntegrations.Nawka.Mowscou.500.

[7].Moller.H.M..,1973-polynomials and cubature formulas , univ-

Dortmund.

[8].Raspution.G.G. construction of cubature formulas for triangle and square _1978

[9] R. Coolsa; , I.P. Mysovskikhb, H.J. Schmidt, 2001-Cubature formulas and orthogonal polynomials