دراسة حركة نقطة ضمن حقل الجاذبية لمستقيمين

إعداد الطالبة : أريج تيسير موسى

بإشراف أ. د. خالد العبد الله أستاذ في قسم الرياضيات كلية العلوم

ملخص البحث

درسنا في هذا البحث حركة جسم نقطي حول جسمين متطاولين حيث قدمنا الصياغة الهاملتونية للمسألة، ثم تطرقنا إلى التحليل العددي حيث درسنا سلوك ومسار هذا الجسم.

بينا أيضاً أنه توجد نقطة عدم توازن في مسار هذا الجسم حيث ينتقل من دائرة إلى دائرة أخرى يكون عندها الاضطراب ضعيف.

بينا بطرق مختلفة أن هذه الخطوط تأخذ شكل لانهاية خلال سرعات الزاوية معينة وتصبح لولبيه عند وجود سرعة ابتدائية موازية للجسمين.

كلمات مفتاحيه: نقطة ماديه، قضيب مادي، منحني مادي

A Study point the motion in the field of gravitation the two lines

Abstract

In this research, we studied the motion of a point body around two elongated bodies where we presented the Hamiltonian formulation of the problem then we touched on the infectious analysis.

where we studied the behavior and path of this body we also explained that there is a point of imbalance in the area of this body, as it moves from one circle to another, at which the disturbance is weak.

We also explained, in different ways, that these lines take the form of infinity during certain angular velocities and become spiral when there is an initial velocity parallel to the two bodies.

Keywords material: point material, rod material curve

مقدمة:

منذ القدم كان الانسان ينظر الى السماء ويرصد حركة النجوم وتغير مواقعها خلال السنة ومع تطور العلم وظهور الأجهزة الحديثة تمكن الإنسان من وضع مسارات لحركة الكواكب والنجوم ومن ثم اكتشف قوانين الجاذبية وعلاقتها بحركة الكواكب وكذلك حركة الأقمار وتأثرها بجاذبية هذه الكواكب وأول من قدم صيغة ناضجة لموضوع الجاذبية هو نيوتن حيث أشار إلى أن كل جسمين $\mathbf{Q}$،$\mathbf{P}$ كتلتيهما m_Q،m_P والمسافة بينهما λ لا تساوي الصفر يتجاذبان بقوتين متعاكستين مباشرة شدتيهما .

$$F_{QP} = G\frac{m_Q m_P}{\lambda^2}$$

حيث G ثابت الجاذبية

وبالتالي ظهر علم متكامل يتعلق بالحركة بأشكالها المختلفة المنتظمة وغير المنتظمة والذي مكن الانسان من إرسال المركبات إلى الفضاء والأقمار الصناعية إلى محيط الأرض لتدور حولها بشكل منتظم.

وظهر العديد من العلماء الذين تمكنوا من وضع قواعد لحركة الكواكب، مثل العالم كبلر الذي درس واستنتج أن جميع أجرام النظام الشمسي تدور حول الشمس في مدارات على شكل قطع ناقص وإن الكواكب الأقرب إلى الشمس تدور بسرعة أعلى بسبب تأثرها بجاذبية الشمس.

وقدم الدكتور خالد العبد الله مجموعة من الأبحاث تخص القطعة المستقيمة والمستقيمات ومكافئة جاذبيتها بأقواس من دوائر [5].

هدف البحث:

هدفنا في هذا البحث دراسة حركة نقطة مادية في حقل جاذبية مستقيمين ماديين حيث نقدم الصياغة الهاملتونية لهذه المسألة ونبحث عن المسارات المستوية.

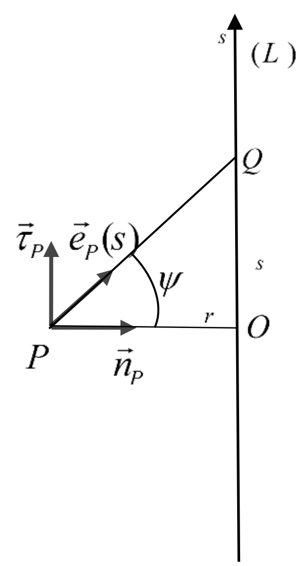
المناقشة والنتائج:

لدراسة حركة نقطة مادية في حقل الجاذبية الناتج عن مستقيمين ماديين متوازيين نحتاج لمعرفة شدة حقل الجاذبية حول مستقيم مادي واحد.

تحريك نقطة مادية في حقل مستقيم مادي سنبحث في هذه الفقرة عن قوة الجاذبية التي تتعرض لها النقطة المادية من قبل المستقيم.

حقل جاذبية مستقيم مادي متجانس:

ليكن L مستقيماً مادياً، ومتجانساً؛ كتلته الخطية ρ . لتكن P نقطة مادية كتلتها واحدية.



نعرف حقل جاذبية المستقيم L في النقطة P، بأنه قوة الجذب $\vec{g}(P)$ التي يطبقها المستقيم L على النقطة P. لنوجه هذا المستقيم، ونجعل النقطة O موقع العمود المرسوم عليه من النقطة P مبدأً للفواصل s. تعطى قوة الجذب $\vec{g}(P)$ بالعلاقة:

$$\vec{g}(P) = G\rho \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\vec{e}_P(s)}{r^2 + s^2} ds .$$

حيث r هو بعد P عن L، والمتجه $\vec{e}_P(s)$ هو متجه واحدة يتجه من P نحو العنصر التفاضلي ds في الموضع Q ذو الفاصلة s.

بتغيير المتحول عبر العلاقة:

$$s = r\tan(\psi)$$

وتحليل المتجه $\vec{e}_P(s)$ إلى مركبتين على متجهي الوحدة $\vec{n}_P$ الناظمي على L، و $\vec{\tau}_P$ الموازي للمستقيم L، نجد [7]:

$$\vec{g}(P) = \frac{G\rho}{r}\left[\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos\psi \, d\psi \, \vec{n}_P + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \sin\psi \, d\psi \, \vec{\tau}_P\right] .$$

المركبة الموازية معدومة، ومنه:

$$\vec{g}(P) = \frac{2G\rho}{r}\vec{n}_P$$

حقل جاذبية مستقيمين ماديين متوازيين متجانسين:

لتكن Oxy جملة عطالية، ولنفرض أن قضيباً متجانساً غير محددو كتلته الخطية p_1

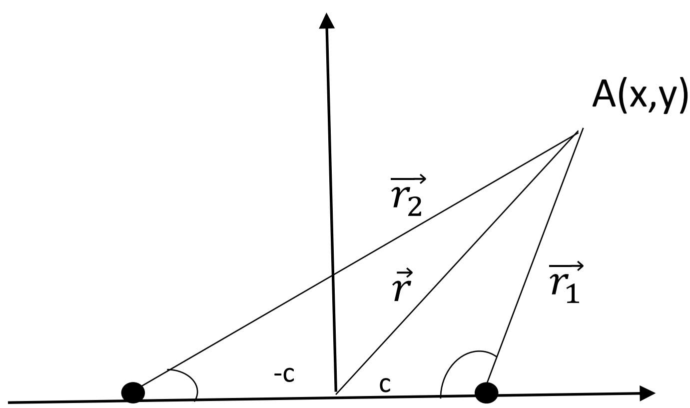
وقضيباً موازي له متجانساً غير محدود كتلته الخطية ρ_2، ولتكن M نقطة مادية ذات كتلة واحدية.

ينشر كل من هذين القضيبين حقل جاذبية يؤثر في النقطة M.

سندرس في هذه الفقرة حركة نقطة مادية في حقل مستقيمين ماديين متوازيين

سنبدأ بدراسة دالة هاملتون للمستقيمين:

$$\vec{r} = \vec{r}_2 - c\vec{i}$$
$$\vec{r} = \vec{r}_2 + c\vec{i}$$



يملك هذا الحقل دالة الكمون التالية:

$$v = 2G\rho_1 \ln r_1 + 2G\rho_2 \ln r_2$$

للوصول لصياغة هملتونيه للمسألة سنشكل دالة لاغرانج ثم ننتقل إلى دالة هملتون عبر تحويل لوجندر

تعطى الطاقة الحركية بالعلاقة:

$$T = \frac{1}{2}mv^2$$
$$T = \frac{1}{2}m\dot{\vec{r}}^2$$
$$T = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)$$

سنقوم بحساب احداثيات النقطة $A(x, y)$ بدلالة $r_1 r_2$

$$r_1^2 = (x - c)^2 + y^2$$
$$r_2^2 = (x + c)^2 + y^2$$
$$r_1^2 - r_2^2 = 4xc$$
$$x = \frac{r_1^2 - r_2^2}{4c}$$
$$x = \frac{1}{4c}(r_1 + r_2)(r_1 - r_2)$$

بتعويض قيمة x

$$r_1^2 = \left(\frac{r_2^2 - r_1^2 - 4c^2}{4c}\right) + y^2$$

ومنه

$$y^2 = r_1^2 - \left(\frac{r_2^2 - r_1^2 - 4c^2}{4c}\right)^2$$

$$y^2 = (\frac{4cr_1 - r_2^2 + r_1^2 + 4c^2}{4c})(\frac{4cr_1 + r_2^2 - r_1^2 - 4c^2}{4c})$$

$$y^2 = \frac{(r_2 + r_1 - 2c)(r_2 - r_1 + 2c)(r_2 + r_1 + 2c)(r_1 - r_2 + 2c)}{16c^2}$$

$$y = \frac{\sqrt{(r_2 + r_1 - 2c)(r_2 - r_1 + 2c)(r_2 + r_1 + 2c)(r_1 - r_2 + 2c)}}{4c}$$

نلاحظ أن y هي عبارة عن مساحة المثلث بدلالة أطوال أضلاعه مقسوما على c

$$\dot{x} = \frac{r_2\dot{r}_2 - r_1\dot{r}_1}{2c}$$

$$\dot{x}^2 = \frac{r_2^2\dot{r}_2^2 - 2r_1\dot{r}_1 r_2\dot{r}_2 + r_1^2\dot{r}_1^2}{4c^2}$$

$$\dot{y} = \frac{1}{4c}[\frac{\begin{array}{c}(\dot{r}_2 + \dot{r}_1)(r_2 - r_1 + 2c)(r_2 + r_1 + 2c)(r_1 - r_2 + 2c) \\ +(\dot{r}_2 - \dot{r}_1)(r_2 + r_1 - 2c)(r_2 + r_1 + 2c)(r_1 - r_2 + 2c) \\ +(\dot{r}_2 + \dot{r}_1)(r_2 + r_1 - 2c)(r_2 - r_1 + 2c)(r_1 - r_2 + 2c) \\ +(\dot{r}_1 - \dot{r}_2)(r_2 + r_1 - 2c)(r_2 - r_1 + 2c)(r_2 + r_1 + 2c)\end{array}}{2\sqrt{(r_2 + r_1 - 2c)(r_2 - r_1 + 2c)(r_2 + r_1 + 2c)(r_1 - r_2 + 2c)}}]$$

بالحساب

$$\dot{y} = \frac{r_1^2 r_2\dot{r}_2 + r_1\dot{r}_1 r_2^2 - r_1^3\dot{r}_1 - r_2^3\dot{r}_2 + 4c^2 r_2\dot{r}_2 + 4c^2 r_1\dot{r}_1}{2c\sqrt{(r_2 + r_1 - 2c)(r_2 - r_1 + 2c)(r_2 + r_1 + 2c)(r_1 - r_2 + 2c)}}$$

ومنه

$$\dot{y}^2 = \frac{(r_1^2 r_2 \dot{r}_2 + r_1 \dot{r}_1 r_2^2 - r_1^3 \dot{r}_1 - r_2^3 \dot{r}_2 + 4c^2 r_2 \dot{r}_2 + 4c^2 r_1 \dot{r}_1)^2}{4c^2 (r_2 + r_1 - 2c)(r_2 - r_1 + 2c)(r_2 + r_1 + 2c)(r_1 - r_2 + 2c)}$$

بالحساب واختزال العلاقة نجد

$$\dot{y}^2 = \frac{\begin{array}{c} r_1^2 \dot{r}_1^2 r_2^4 + 2r_1 \dot{r}_1 r_2^5 \dot{r}_2 + 4r_1^3 \dot{r}_1 r_2^3 \dot{r}_2 + 8c^2 r_1^2 \dot{r}_1^2 r_2^2 + r_1^6 \dot{r}_1^2 - 2r_1^5 \dot{r}_1 r_2 \dot{r}_2 - 8c^2 r_1^4 \dot{r}_1^2 + r_2^6 \dot{r}_2^2 \\ -2r_1^2 r_2^4 \dot{r}_2^2 - 8c^2 r_2^4 \dot{r}_2^2 + r_1^4 r_2^2 \dot{r}_2^2 + 16c^4 r_2^2 \dot{r}_2^2 + 32c^4 r_1 \dot{r}_1 r_2 \dot{r}_2 + 16c^4 r_1^2 \dot{r}_1^2 \end{array}}{4c^2 (r_2 + r_1 - 2c)(r_2 - r_1 + 2c)(r_2 + r_1 + 2c)(r_1 - r_2 + 2c)}$$

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = \frac{r_2^2 \dot{r}_2^2 - 2r_1 \dot{r}_1 r_2 \dot{r}_2 + r_1^2 \dot{r}_1^2}{4c^2} + \frac{\begin{array}{l} r_1^2 \dot{r}_1^2 r_2^4 + 2r_1 \dot{r}_1 r_2^5 \dot{r}_2 + 4r_1^3 \dot{r}_1 r_2^3 \dot{r}_2 \\ +8c^2 r_1^2 \dot{r}_1^2 r_2^2 + r_1^6 \dot{r}_1^2 - 2r_1^5 \dot{r}_1 r_2 \dot{r}_2 \\ -8c^2 r_1^4 \dot{r}_1^2 + r_2^6 \dot{r}_2^2 - 2r_1^2 r_2^4 \dot{r}_2^2 \\ -8c^2 r_2^4 \dot{r}_2^2 + r_1^4 r_2^2 \dot{r}_2^2 + 16c^4 r_2^2 \dot{r}_2^2 \\ +32c^2 r_1 \dot{r}_1 r_2 \dot{r}_2 + 16c^4 r_1^2 \dot{r}_1^2 \end{array}}{4c^2 (r_2 + r_1 - 2c)(r_2 - r_1 + 2c)(r_2 + r_1 + 2c)(r_1 - r_2 + 2c)}$$

باختزال العلاقة

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = \frac{r_1^4 r_2^2 \dot{r}_1^2 + 4c^2 r_1^2 r_2^2 \dot{r}_2^2 - 8c^2 r_1^3 \dot{r}_1 r_2 \dot{r}_2 - 8c^2 r_1 \dot{r}_1 r_2^3 \dot{r}_2 + 8c^2 r_1^2 \dot{r}_1^2 r_2^2 + 32c^4 r_1 \dot{r}_1 r_2 \dot{r}_2}{2c^2 (r_2 + r_1 - 2c)(r_2 - r_1 + 2c)(r_2 + r_1 + 2c)(r_1 - r_2 + 2c)}$$

بالتالي علاقة الطاقة الحركية تأخذ الشكل:

$$T = \frac{r_1^4 r_2^2 \dot{r}_1^2 + 4c^2 r_1^2 r_2^2 \dot{r}_2^2 - 8c^2 r_1^3 \dot{r}_1 r_2 \dot{r}_2 - 8c^2 r_1 \dot{r}_1 r_2^3 \dot{r}_2 + 8c^2 r_1^2 \dot{r}_1^2 r_2^2 + 32c^4 r_1 \dot{r}_1 r_2 \dot{r}_2}{4c^2 (r_2 + r_1 - 2c)(r_2 - r_1 + 2c)(r_2 + r_1 + 2c)(r_1 - r_2 + 2c)}$$

حيث تشير النقطة على متحول إلى مشتقه بالنسبة للزمن . لدينا بالتالي دالة لاغرانج التالي:

$$L = \frac{r_1^4 r_2^2 \dot{r}_1^2 + 4c^2 r_1^2 r_2^2 \dot{r}_2^2 - 8c^2 r_1^3 \dot{r}_1 r_2 \dot{r}_2 - 8c^2 r_1 \dot{r}_1 r_2^3 \dot{r}_2 + 8c^2 r_1^2 \dot{r}_1^2 r_2^2 + 32c^4 r_1 \dot{r}_1 r_2 \dot{r}_2}{4c^2 (r_2 + r_1 - 2c)(r_2 - r_1 + 2c)(r_2 + r_1 + 2c)(r_1 - r_2 + 2c)} - 2G\rho_1 \ln r_1 - 2G\rho \ln r_2$$

نشكل تحويل لوجندر الذي يدخل المتحولات (R_1, R_2) المرافقة للإحداثيات المستخدمة (r_1, r_2) استناداً للعلاقات:

$$R_1 = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}_1} = \frac{2\dot{r}_1 (r_1^4 r_2^2 + 8c^2 r_1^2 r_2^2) + (-8c^2 r_1^3 r_2 \dot{r}_2 - 8c^2 r_1 r_2^3 \dot{r}_2 + 32c^2 r_1 r_2 \dot{r}_2)}{4c^2 (r_2 + r_1 - 2c)(r_2 - r_1 + 2c)(r_2 + r_1 + 2c)(r_1 - r_2 + 2c)}$$

$$R_2 = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}_2} = \frac{2\dot{r}_2 (4c^2 r_1^2 r_2^2) + (-8c^2 r_1^3 \dot{r}_1 r_2 - 8c^2 r_1 \dot{r}_1 r_2^3 + 32c^4 r_1 \dot{r}_1 r_2}{4c^2 (r_2 + r_1 - 2c)(r_2 - r_1 + 2c)(r_2 + r_1 + 2c)(r_1 - r_2 + 2c)}$$

ومنه

$$\dot{r}_1=\frac{2c^2(r_2+r_1-2c)(r_2-r_1+2c)(r_2+r_1+2c)(r_1-r_2+2c)R_1+4C^2r_1^3r_2\dot{r}_2+4c^2r_1r_2^3\dot{r}_2-16c^4r_1r_2\dot{r}_2}{r_1^4r_2^2+8c^2r_1^2r_2^2}$$

$$\dot{r}_2=\frac{(r_2+r_1-2c)(r_2-r_1+2c)(r_2+r_1+2c)(r_1-r_2+2c)R_2+\dot{r}_1(2r_1^3r_2+2r_1r_2^3-8c^2r_1r_2)}{2r_1^2r_2^2}$$

بالحساب نجد أن

$$\dot{r}_1=\frac{(r_2+r_1-2c)(r_2-r_1+2c)(r_2+r_1+2c)(r_1-r_2+2c)[2c^2R_1r_1r_2+2c^2R_2R_1^2+2c^2R_2r_2^2-8c^4R_2]}{r_1^5r_2^3-4c^2r_1^5r_2+32c^4r_1^3r_2-4c^2r_1r_2^5+32c^4r_1r_2^3-64c^6r_1r_2}$$

$$\dot{r}_2=\frac{2c^2(r_2+r_1-2c)(r_2-r_1+2c)(r_2+r_1+2c)(r_1-r_2+2c)[\frac{1}{4c^2}R_2r_1^3r_2+R_1r_1^2+2R_2r_1r_2+R_1r_2^2-4R_1c^2]}{r_1^5r_2^3-4c^2r_1^5r_2+32c^4r_1^3r_2-4c^2r_1r_2^5+32c^4r_1r_2^3-64c^6r_1r_2}$$

في الواقع يعبر هذا التحويل عن مشتقات المتحولات اللاغرانجية $(\dot{r}_1,\dot{r}_2)$ بالنسبة للزمن بدلالة تلك المتحولات ومرافقاتها (r_1,r_2,R_1,R_2).

لنضع الأن:

$$\tilde{H}=\frac{\dot{r}_1^2[r_1^4r_2^2+8c^2r_1^2r_2^2]+\dot{r}_2^2[4c^2r_1^2r_2^2]+\dot{r}_1\dot{r}_2[-8c^2r_1^3r_2-8c^2r_1r_2^3+32c^4r_1r_2]}{4c^2(r_2+r_1-2c)(r_2-r_1+2c)(r_2+r_1+2c)(r_1-r_2+2c)}+2G\rho_1\ln r_1+2G\rho_2\ln r_2$$

بتطبق تحويل لوجندر على هذه الدالة ، نجد دالة هاملتون التاليه:

$$H=\frac{\dfrac{[(r_2+r_1-2c)(r_2-r_1+2c)(r_2+r_1+2c)(r_1-r_2+2c)(2c^2R_1r_1r_2+2c^2R_2R_1^2+2c^2R_2r_2^2-8c^4R_2)]^2}{[r_1^5r_2^3-4c^2r_1^5r_2+32c^4r_1^3r_2-4c^2r_1r_2^5+32c^4r_1r_2^3-64c^6r_1r_2]^2}[r_1^4r_2^2+8c^2r_1^2r_2^2]}{4c^2(r_2+r_1-2c)(r_2-r_1+2c)(r_2+r_1+2c)(r_1-r_2+2c)}$$

$$+\frac{\dfrac{[2c^2(r_2+r_1-2c)(r_2-r_1+2c)(r_2+r_1+2c)(r_1-r_2+2c)(\frac{1}{4c^2}R_2r_1^3r_2+R_1r_1^2+2R_2r_1r_2+R_1r_2^2-4c^2R_1)]^2}{[r_1^5r_2^3-4c^2r_1^5r_2+32c^4r_1^3r_2-4c^2r_1r_2^5+32c^4r_1r_2^3-64c^6r_1r_2]^2}[4c^2r_1^2r_2^2]}{4c^2(r_2+r_1-2c)(r_2-r_1+2c)(r_2+r_1+2c)(r_1-r_2+2c)}$$

$$[\frac{2c^2(r_2+r_1-2c)(r_2-r_1+2c)(r_2+r_1+2c)(r_1-r_2+2c)(R_1r_1r_2+R_2R_1^2+R_2r_2^2-4c^2R_2)}{r_1^5r_2^3-4c^2r_1^5r_2+32c^4r_1^3r_2-4c^2r_1r_2^5+32c^4r_1r_2^3-64c^6r_1r_2}]$$

$$[\frac{2c^2(r_2+r_1-2c)(r_2-r_1+2c)(r_2+r_1+2c)(r_1-r_2+2c)(\frac{1}{4c^2}R_2r_1^3r_2+R_1r_1^2+2R_2r_1r_2+R_1r_2^2-4c^2R_1)}{r_1^5r_2^3-4c^2r_1^5r_2+32c^4r_1^3r_2-4c^2r_1r_2^5+32c^4r_1r_2^3-64c^6r_1r_2}]$$

$$+\frac{[-8c^2r_1^3r_2-8c^2r_1r_2^3+32c^4r_1r_2]}{4c^2(r_2+r_1-2c)(r_2-r_1+2c)(r_2+r_1+2c)(r_1-r_2+2c)}$$

$$+2G\rho_1\ln r_1+2G\rho_2\ln r_2$$

ومنه

$$H=\frac{c^2(r_2+r_1-2c)(r_2-r_1+2c)(r_2+r_1+2c)(r_1-r_2+2c)(R_1r_1r_2+R_2R_1^{\,2}+R_2r_2^{\,2}-4c^2R_2)^2(r_1^4r_2^{\,2}+8c^2r_1^2r_2^{\,2})}{[r_1^5r_2^{\,3}-4c^2r_1^5r_2+32c^4r_1^3r_2-4c^2r_1r_2^{\,5}+32c^4r_1r_2^{\,3}-64c^6r_1r_2]^2}$$

$$+\frac{c^2(r_2+r_1-2c)(r_2-r_1+2c)(r_2+r_1+2c)(r_1-r_2+2c)(\frac{1}{4c^2}R_2r_1^3r_2+R_1r_1^{\,2}+2R_2r_1r_2+R_1r_2^{\,2}-4c^2R_1)^2(4c^2r_1^2r_2^{\,2})}{[r_1^5r_2^{\,3}-4c^2r_1^5r_2+32c^4r_1^3r_2-4c^2r_1r_2^{\,5}+32c^4r_1r_2^{\,3}-64c^6r_1r_2]^2}$$

$$+\frac{c^2(r_2+r_1-2c)(r_2-r_1+2c)(r_2+r_1+2c)(r_1-r_2+2c)(R_1r_1r_2+R_2R_1^{\,2}+R_2r_2^{\,2}-4c^2R_2)(\frac{1}{4c^2}R_2r_1^3r_2+R_1r_1^{\,2}+2R_2r_1r_2+R_1r_2^{\,2}-4c^2R_1)[-8c^2r_1^3r_2-8c^2r_1r_2^{\,3}+32c^4r_1r_2]}{[r_1^5r_2^{\,3}-4c^2r_1^5r_2+32c^4r_1^3r_2-4c^2r_1r_2^{\,5}+32c^4r_1r_2^{\,3}-64c^6r_1r_2]^2}$$

$$+2G\rho_1\ln r_1+2G\rho_2\ln r_2$$

نحصل على تابع هملتون

$$H=\frac{\begin{gathered}c^2(r_2+r_1-2c)(r_2-r_1+2c)(r_2+r_1+2c)(r_1-r_2+2c)\\ [(R_1r_1r_2+R_2R_1^{\,2}+R_2r_2^{\,2}-4c^2R_2)^2(r_1^4r_2^{\,2}+8c^2r_1^2r_2^{\,2})\\ +(\frac{1}{4c^2}R_2r_1^3r_2+R_1r_1^{\,2}+2R_2r_1r_2+R_1r_2^{\,2}-4c^2R_1)^2(4c^2r_1^2r_2^{\,2})\\ +(R_1r_1r_2+R_2R_1^{\,2}+R_2r_2^{\,2}-4c^2R_2)\\ (\frac{1}{4c^2}R_2r_1^3r_2+R_1r_1^{\,2}+2R_2r_1r_2+R_1r_2^{\,2}-4c^2R_1)(-8c^2r_1^3r_2-8c^2r_1r_2^{\,3}+32c^4r_1r_2)]\end{gathered}}{[r_1^5r_2^{\,3}-4c^2r_1^5r_2+32c^4r_1^3r_2-4c^2r_1r_2^{\,5}+32c^4r_1r_2^{\,3}-64c^6r_1r_2]^2}$$

$$+2G\rho_1\ln r_1+2G\rho_2\ln r_2$$

حل المسألة باستخدام التحليل العددي:

سوف نقوم بإيجاد بعض المسارات باستخدام أدوات التحليل العددي

$$\ddot{\vec{r}} = \frac{1}{m}\vec{f}$$

$$\ddot{\vec{r}} = -\frac{1}{m}[\frac{2G\rho_1}{r_1}\vec{e}_{r_1} + \frac{2G\rho_2}{r_2}\vec{e}_{r_2}]$$

$$r_1 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

$$r_2 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$

$$\tilde{x}_1 = \frac{(x-c)}{r_1}$$

$$\tilde{y}_1 = \frac{y}{r_1}$$

$$\tilde{x}_2 = \frac{(x+c)}{r_2}$$

$$\tilde{y}_2 = \frac{y}{r_2}$$

$$\ddot{x} = -\frac{1}{m}[\frac{2G\rho_1}{r_1}\tilde{x}_1 + \frac{2G\rho_2}{r_2}\tilde{x}_2]$$

$$\ddot{y} = -\frac{1}{m}[\frac{2G\rho_1}{r_1}\tilde{y}_1 + \frac{2G\rho_2}{r_2}\tilde{y}_2]$$

بتنظيم الوحدات واختيار مناسب للكتل نضع:

$$c = 1$$

$$G = 1$$

$$\rho_1 = 1$$

$$\rho_2 = 1$$

$$m = 1$$

نختار الشروط الابتدائية كما يلي:

$$n = 450$$
$$h = 0,01$$
$$x = 0$$
$$y = 0$$
$$\dot{x} = 0.40$$
$$\dot{y} = 0.52$$

نختار طول الخطوة وعدد الخطوات كما يلي:

$$n = 450$$
$$h = 0,01$$

تبنى حلقة for وفق طريقة أولر المعدلة كما يلي:

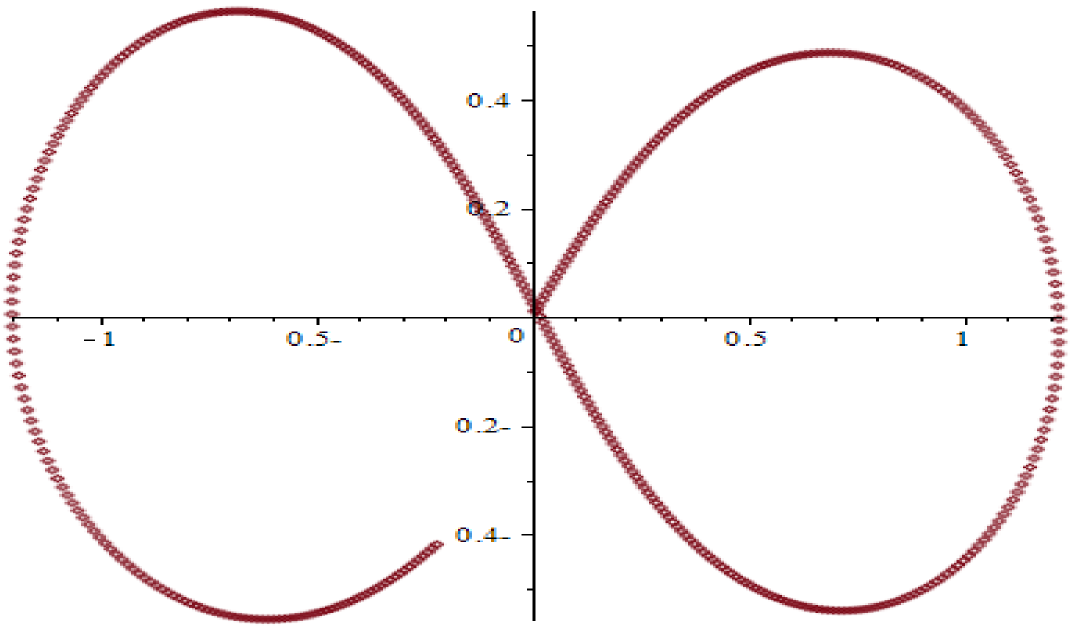
For i from1to n do

$$\ddot{x}_1 = \ddot{x}$$
$$\ddot{y}_1 = \ddot{y}$$
$$x = x + \dot{x}h$$
$$y = y + \dot{y}h$$
$$\dot{x}_1 = \dot{x}$$
$$\dot{y}_1 = \dot{y}$$
$$\ddot{x}_c = \frac{1}{2}(\ddot{x}_1 + \ddot{x})$$
$$\ddot{y}_c = \frac{1}{2}(\ddot{y}_1 + \ddot{y})$$
$$\dot{x} = \dot{x} + \ddot{x}_c h$$
$$\dot{y} = \dot{y} + \ddot{y}_c h$$
$$\dot{x} = \frac{1}{2}(\dot{x}_1 + \dot{x})$$
$$\dot{y} = \frac{1}{2}(\dot{y}_1 + \dot{y})$$
$$x = x + \dot{x}h$$
$$y = y + \dot{y}h$$

$$a_i = x$$
$$b_i = y$$

ثم نرسم المنحني باستخدام الأمر:

$$s = seq(a_i; i = 1..n)$$
$$w = seq(b_i; i = 1..n)$$
$$plot(<ss \mid ww>, style = point)$$



الاستنتاجات والمقترحات:

قدمنا في هذا البحث دراسة لحركة نقطة مادية في حقل جاذبية مستقيمين ماديين متجانسين، حيث قدمنا الصياغة الهملتونية واهتممنا بشكل خاص بالمسار المستوي للحركة.

تفتح هذه الدراسة باباً على العديد من الدراسات، كدراسة حركة نقطتين في حقل جاذبية مستقيمين. تحتاج هذه الدراسات إلى وقت وجهد طويلين.

المراجع العلمية

[1] Isaac Newton, Philosophiae Naturalis Principia Mathematica, Edmond Halley, London, 1687,

[2] K. Abdullah, Propriétés du système séculaire, thèse de doctorat de l'Observatoire de Paris, Paris 2001,

[3] K. Abdullah, A Albouy, "On a strange resonance noticed by M. Herman", *REGUL CHAOTIC DYN*, 2001, **6** (4), 421-432,

[4] V. Arnold, Méthodes mathématiques de la mécanique classique, Editions Mir, Moscou, 1976,

[5] د. خالد العبدالله، حول حقل جاذبية قطعة مستقيمة مادية، مجلة جامعة البعث، حمص، 2014،

[6] د. خالد العبدالله، إيجاد مراكز التوازن في حقول جاذبية بعض المنحنيات المادية، مجلة جامعة البعث، حمص، 2015،

[7] أ. بوغوريلوف، الهندسة التفاضلية (مترجم عن الروسية)، دار مير، موسكو،1984،

[8] د. خالد العبدالله، فضاء حلول مسألة كبلر، مجلة جامعة البعث، حمص، 2010،

[9] د. خالد العبدالله، تعبير مخروطي عن حل مسألة الجسمين، مجلة جامعة البعث، حمص، 2008.