التموضع المتبادل للأغلفة الخطية لمدارات مناحي التناظر الأربعة والمتقاطعة بأربعة مستقيمات مختلفة

د. عصام ديبان: أستاذ مساعد في قسم الرياضيات، كلية العلوم، جامعة البعث.

زينة جبر: طالبة دكتوراه في الرياضيات البحتة، كلية العلوم، جامعة البعث.

ملخص البحث

نقوم في هذا البحث بدراسة تناظر السطوح الجبرية F_n ، اللامتغيرة بالنسبة لزمرة التناظرات التامة غير المنتهية G في الفضاء الإقليدي E^m ، عندما يكون لمناحي تناظر هذه السطوح أربعة مدارات وتتقاطع أغلفتها الخطية بأربعة مستقيمات مختلفة.

بالتحديد، نسعى إلى الحصول على المتراجحة الهندسية، التي تعين الشرط النهائي للتموضع المتبادل لتلك الأغلفة الخطية.

ويتم في هذا السياق إيجاد المعادلة القانونية للسطوح الجبرية الخاصة F_n ، اللامتغيرة بالنسبة للزمر التامة G ، وإيجاد معادلات مستويات التناظر لهذه السطوح.

كلمات مفتاحية: تناظر السطوح الجبرية، مدارات مناحي التناظر، الأغلفة الخطية، زمرة التناظرات التامة، مستويات تناظر السطوح.

Mutual arrangement of linear envelopes of four orbits of directions of symmetry, that intersecting by four different lines

Abstract

In this paper, we study the symmetry of algebraic surfaces, which are immutable with respect to the group of infinite perfect symmetries in Euclidean space, when the symmetry areas of these surfaces have four orbits and their linear envelopes intersect with four different straight lines.

Specifically, we seek to obtain the geometric inequality, which defines the final condition for the mutual positioning of these linear shells.

In this context, the legal equation for special algebraic surfaces, which is not changing for perfect groups, and the equations for the levels of symmetry for these surfaces are found.

Keywords: Symmetry of algebraic surface, orbits of directions of symmetry, linear envelopes, symmetry planes of surfaces, complete groups of symmetry.

مقدمة:

ليكن F_n سطحاً جبرياً من الدرجة n والبعد $(m-1)$ معيناً في الفضاء E^m بالمعادلة:

$$\sum_{j=0}^{n}\varphi_j(\chi_i)=0 \qquad (i=\overline{1,m})$$

حيث φ_j صور من الدرجة j في مركبات المتجه $\vec{\chi}=(\chi_i)$.

ولتكن G زمرة مولدة بالانعكاسات المائلة (القائمة بحالة خاصة) بالنسبة للمستويات ذات البعد $(m-1)$. لنفرض أن المتجه الذي يعين منحى التناظر $\vec{u}$ فتكون مداراته $G_\mu(\vec{u})$ وأغلفتها الخطية هي المستويات Π^{μ_j} .

تعتمد هذه الدراسة على النتيجة الهامة: " لا يمكن أن يتقاطع غلافان خطيان لأية مدارين لمناحي تناظر السطح إلا بنقطة أو مستقيم".

إن مسألة التموضع المتبادل للأغلفة الخطية لمدارات مناحي تناظر السطوح الجبرية من أهم القضايا التي ترتبط بالنظرية الهندسية للامتغيرات الزمر، وهذه مسألة متشعبة حالاتها الخاصة كثيرة.

لقد تم حل هذه المسألة بالكامل عندما يكون لمناحي تناظر السطوح الجبرية ثلاثة مدارات [2],[3]، وتم حلّها من أجل أربعة مدارات في الحالات الآتية: لا يوجد مستقيمات تقاطع، تتقاطع الأغلفة الخطية بمستقيم واحد [1],[4]، تتقاطع الأغلفة الخطية بمستقيمين مختلفين، تتقاطع الأغلفة الخطية بثلاثة مستقيمات اثنان منها منطبقان [5],[6],[7],[8],[9],[10],[11]، وعندما تتقاطع الأغلفة الخطية بثلاثة مستقيمات مختلفة [12],[13],[14]، أما عندما تتقاطع الأغلفة الخطية بأربعة مستقيمات مختلفة فهذه مسألة لم يتم حلها بعد.

وقد درست جميع الحالات الممكنة لإنشاء مستقيمات التقاطع، حيث أن وضع مستقيم التقاطع يؤثر بشكل مباشر على شروط تموضع هذه الأغلفة، وبالتالي، على المعادلة العامة للسطح المدروس وعلى معادلات مستويات تناظره.

لتكن المستويات $\Pi^{\mu_j} = \Pi^{d_j} \oplus \Pi^{\gamma_j}$ حيث أن مستويات تناظر السطح F_n المرافقة لمتجهات المستويات Π^{d_j} توازي المستويات Π^{γ_j} لذا فإن التموضع المتبادل للمستويات Π^{μ_j} يتحدد بالتموضع المتبادل للمستويات Π^{γ_j} والذي يمكن أن يكون عشوائياً ويمكن اعتبار $d_j = 1$ (و هذا لا يؤثر على عمومية الدراسة).

لندخل الرموز:

$$\gamma_0 = \lambda \qquad \gamma_1 = \mu \qquad \gamma_2 = \upsilon \qquad \gamma_3 = \sigma \qquad (\lambda \geq \mu \geq \upsilon \geq \sigma)$$

$$\Pi^{r_1} = \Pi^{\lambda} + \Pi^{\mu} \ , \ \Pi^{r_2} = \Pi^{\lambda} + \Pi^{\upsilon} \ , \Pi^{r_3} = \Pi^{\mu} + \Pi^{\upsilon}$$

$$\Pi^{r} = \Pi^{r_1} + \Pi^{\upsilon} \ , \ \Pi^{v_t} = \Pi^{\sigma} \cap \Pi^{r_t} \quad (t = 1,2,3)$$

$$\Pi^{v} = \Pi^{\sigma} \cap \Pi^{r} \ , \ \Pi^{g} = \Pi^{\upsilon} \cap \Pi^{n_1}$$

Π^{λ} الغلاف الأول، Π^{μ} الغلاف الثاني، Π^{υ} الغلاف الثالث، Π^{σ} الغلاف الرابع

ونقصد بالاصطلاح $\Pi^{v} = F\,\Pi^{v}$ ، أن توضع المستوي Π^{v} يمكن أن يكون عشوائياً.

للسهولة نفرض $v = \sigma$ وهذا لا يؤثر على عمومية الدراسة، حيث $\rho = \upsilon - g$.

هدف البحث:

يتأثر التموضع المتبادل للأغلفة الخطية بتقاطع المستوي Π^{σ} (والذي اعتبرناه Π^{ν}) مع المستويات Π^{r_t} $(t=1,2,3)$، وبالتالي، لإيجاد الشروط العامة لهذا التموضع لابد من دراسة ثلاث حالات أساسية مختلفة:

1) إذا تقاطع Π^{σ} فقط مع Π^{r_1} أي أن: $\nu \geq \nu_1 > 0 \ , \ \nu_2 = \nu_3 = 0$
2) إذا تقاطع Π^{σ} فقط مع Π^{r_2} أي أن: $\nu \geq \nu_2 > 0 \ , \ \nu_1 = \nu_3 = 0$
3) إذا تقاطع Π^{σ} فقط مع Π^{σ} أي أن: $\nu \geq \nu_3 > 0 \ , \ \nu_1 = \nu_2 = 0$

يهدف هذا البحث إلى دراسة الحالة الأولى $\nu \geq \nu_1 > 0 \ , \ \nu_2 = \nu_3 = 0$ للحصول على المتراجحة الهندسية، التي تعين الشرط النهائي للتموضع المتبادل لتلك الأغلفة الخطية. ويتم في هذا السياق إيجاد المعادلة القانونية للسطح الجبري الخاص F_n، اللامتغير بالنسبة للزمرة التامة G.

المناقشة والنتائج:

لتكن

$$\Pi^{\lambda} \cap \Pi^{\mu} = p_1 \ , \ \Pi^{\lambda} \cap \Pi^{g} = p_2 \ , \ \Pi^{\lambda} \cap \Pi^{\nu} = p_3 , \ \Pi^{\mu} \cap \Pi^{\nu} = p_4$$

حيث مستقيمات التقاطع هي:

$$OZ_{\lambda} = P_1 \ , \ OZ_{\lambda-1} = P_2 \ , \ OZ_{\lambda-2} = P_3 , \ OZ_{\lambda+1} = P_4$$

يعطى السطح الجبري F_n ذو زمرة التناظر التامة G في الفضاء الإقليدي E^m بالمعادلة:

[2]

$$R(y_1^{\,2}+\sum_{i=1}^{\lambda}\xi_i Z_i)+S(y_2^{\,2}+\sum_{j=1}^{\mu-1}\zeta_j Z_{\lambda+j})+$$
$$T(y_3^{\,2}+\sum_{r_1=1}^{g}\chi_{r_1}Z_{r_1}+\sum_{k=1}^{\rho}\chi_{r_{1+k}}Z_{r_{1+k}})+P(y_4^{\,2}+\sum_{l=1}^{\nu-1}\vartheta_{r+l}Z_{r+l})=c \qquad (1)$$

إن كثيرات الحدود R,S,T,P و الدوال الخطية ξ_i , ζ_j , $\chi_{r_{1+k}}$ التي تتعلق فقط بالمتحولات $\chi_\tau(\tau=\overline{1,s}>2)$ تحقق العلاقات:

$$\left.\begin{array}{lll} R=R_0\,\zeta_\lambda & , & S=R_0\,\xi_\lambda \\ R=T_0\,\chi_{\lambda-1} & , & T=T_0\,\xi_{\lambda-1} \\ R=P_0\,\vartheta_{\lambda-2} & , & P=P_0\,\xi_{\lambda-2} \\ S=S_0\,\vartheta_{\lambda+1} & , & P=S_0\,\zeta_{\lambda+1} \end{array}\right\} \qquad (2)$$

حيث

$$\zeta_\lambda\neq c\,\xi_\lambda \quad , \quad \chi_{\lambda-1}\neq c\,\xi_{\lambda-1} \quad , \quad \vartheta_{\lambda-2}\neq c\,\xi_{\lambda-2} \quad , \quad \vartheta_{\lambda+1}\neq c\,\zeta_{\lambda+1}$$

لدينا $\Pi^{\mu_j}=\Pi^{d_j}\oplus\Pi^{\gamma_j}$, $(j=0,1,2,3)$ وتأخذ المستويات Π^{μ_j} الشكل:

$$\Pi^{\mu_0}=\Pi^1(y_1)\oplus\Pi^{\lambda}(Z_i) \qquad (i=\overline{1,\lambda})$$
$$\Pi^{\mu_1}=\Pi^1(y_2)\oplus\Pi^1(Z_\lambda)\oplus\Pi^{\mu-1}(Z_{\lambda+j}) \qquad (j=\overline{1,\mu-1})$$
$$\Pi^{\mu_2}=\Pi^1(y_3)\oplus\Pi^{g}\oplus\Pi^{\rho}(Z_{r_{1+k}}) \qquad (k=\overline{1,\rho})$$
$$\Pi^{\mu_3}=\Pi^1(y_4)\oplus\Pi^{\nu}$$

من العلاقات (2) نجد:

$$\frac{R_0}{T_0}=\frac{\chi_{\lambda-1}}{\zeta_{\lambda}}\Rightarrow R_0=\frac{T_0}{\zeta_{\lambda}}\chi_{\lambda-1}=T_1\chi_{\lambda-1}\ ,\ T_0=T_1\zeta_{\lambda}$$

$$\frac{R_0}{P_0}=\frac{\vartheta_{\lambda-2}}{\zeta_{\lambda}}\Rightarrow R_0=\frac{P_0}{\zeta_{\lambda}}\vartheta_{\lambda-2}=P_1\vartheta_{\lambda-2}\ ,\ P_0=P_1\zeta_{\lambda}$$

$$\frac{R_0}{S_0}=\frac{\vartheta_{\lambda+1}}{\xi_{\lambda}}\Rightarrow R_0=\frac{S_0}{\xi_{\lambda}}\vartheta_{\lambda+1}=S_1\vartheta_{\lambda+1}\ ,\ S_0=S_1\xi_{\lambda}$$

$$\frac{P_0}{S_0}=\frac{\zeta_{\lambda+1}}{\xi_{\lambda-2}}\Rightarrow P_0=\frac{S_0}{\xi_{\lambda-2}}\zeta_{\lambda+1}=S_1\zeta_{\lambda+1}\ ,\ S_0=S_1\xi_{\lambda-2}$$

أيضاً لدينا: $R_0=P_1\vartheta_{\lambda-2}$, $R_0=T_1\chi_{\lambda-1}$ بالتالي $T_1=P_1\frac{\vartheta_{\lambda-2}}{\chi_{\lambda-1}}$ ومنه

$$T_0=P_1\frac{\vartheta_{\lambda-2}}{\chi_{\lambda-1}}\zeta_{\lambda}$$

ولكن $R=R_0\zeta_{\lambda}$ بالتالي $R=T_1\chi_{\lambda-1}\zeta_{\lambda}$ وباعتبار $T_1\equiv 1$ يكون $R=\chi_{\lambda-1}\zeta_{\lambda}$.

أيضاً نجد أن: $R=P_1\vartheta_{\lambda-2}\zeta_{\lambda}$ وباعتبار $P_1\equiv 1$ يكون $R=\vartheta_{\lambda-2}\zeta_{\lambda}$.

نعود للعلاقات (2) فنجد:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{R}{S}=\dfrac{\zeta_\lambda}{\xi_\lambda}=\dfrac{T_0\,\chi_{\lambda-1}}{R_0\,\xi_\lambda}\Rightarrow\ T_0=c_0\,R_0\Rightarrow\zeta_\lambda=c_0\,\chi_{\lambda-1} \\ \qquad\quad =\dfrac{P_0\,\vartheta_{\lambda-2}}{R_0\,\xi_\lambda}\Rightarrow\ P_0=c_1\,R_0\Rightarrow\zeta_\lambda=c_1\,\vartheta_{\lambda-2} \\ \dfrac{R}{T}=\dfrac{\chi_{\lambda-1}}{\xi_{\lambda-1}}=\dfrac{P_0\,\vartheta_{\lambda-2}}{T_0\,\xi_{\lambda-1}}\Rightarrow\ P_0=c_2\,T_0\Rightarrow\chi_{\lambda-1}=c_2\,\vartheta_{\lambda-2} \\ \dfrac{R}{P}=\dfrac{\vartheta_{\lambda-2}}{\xi_{\lambda-2}}=\dfrac{R_0\,\zeta_\lambda}{S_0\,\xi_{\lambda+1}}\Rightarrow\ R_0=c_3\,S_0\Rightarrow\vartheta_{\lambda-2}=c_3\,\zeta_\lambda \\ \dfrac{S}{P}=\dfrac{\vartheta_{\lambda+1}}{\zeta_{\lambda+1}}=\dfrac{R_0\,\zeta_\lambda}{S_0\,\zeta_{\lambda+1}}\Rightarrow\ R_0=k\,S_0\Rightarrow\vartheta_{\lambda+1}=k\,\zeta_\lambda \end{array}\right\} \qquad (3)$$

ومنه نتوصل إلى المبرهنة المساعدة:

مبرهنة مساعدة (1): إذا كانت مستقيمات التقاطع $OZ_{\lambda+1}, OZ_{\lambda-2}, OZ_{\lambda-1}, OZ_\lambda$ فإن الدوال $\vartheta_{\lambda+1}, \vartheta_{\lambda-2}, \chi_{\lambda-1}, \zeta_\lambda$ تحقق العلاقات (3)، و تعطى كثيرات الحدود R, S, T, P بالعلاقات:

$$R=\vartheta_{\lambda-2}\,\zeta_\lambda=\chi_{\lambda-1}\,\zeta_\lambda\ ,\ S=\vartheta_{\lambda-2}\,\xi_\lambda=\chi_{\lambda-1}\,\xi_\lambda\ ,\ T=\frac{\vartheta_{\lambda-2}}{\chi_{\lambda-1}}\,\xi_{\lambda-1}\,\zeta_\lambda\ ,\ P=\zeta_{\lambda+1}\,\xi_{\lambda-2}$$

اذا اعتبرنا أن: $\Pi^g=\Pi^h\oplus\Pi^1(OZ_{\lambda-1})$

يمكن أن يعطى المستوي Π^h في المستوي Π^{r_1} بالمعادلات:

$$Z_{h+\varepsilon}=\sum_{p=1}^{h} a_{\varepsilon p}\, Z_p \qquad \varepsilon=\overline{1,\lambda-h}$$

$$Z_{\lambda+j}=\sum_{p=1}^{h} b_{jp}\, Z_p \qquad j=\overline{1,\mu-1}$$

لنأخذ في المستوي Π^h محاور جديدة OZ'_p بحيث تتحقق دساتير التحويل:

$$Z_p = Z_p' \qquad p=\overline{1,h}$$

$$Z_{h+\varepsilon}= Z'_{h+\varepsilon}+\sum_{p=1}^{h} a_{\varepsilon p}\, Z'_p \qquad \varepsilon=\overline{1,\lambda-h}$$

$$Z_{\lambda+j}= Z'_{h+\varepsilon}+\sum_{p=1}^{h} b_{jp}\, Z'_p \qquad j=\overline{1,\mu-1}$$

تأخذ معادلة السطح (1) تحت تأثير هذه التحويلات الشكل الآتي:

$$R\,(y_1{}^2+\sum_{i=1}^{\lambda-h}\xi_{h+\varepsilon}\,Z'_{h+\varepsilon})+$$

$$S\,(y_2{}^2+\sum_{j=1}^{\mu-1}\zeta_j\,Z'_{\lambda+j})+$$

$$T\,(y_3{}^2+\sum_{p=1}^{h}\chi_p Z_p+\sum_{k=1}^{\rho}\chi_{r_{1+k}}Z_{r_{1+k}})+$$

$$P\,(y_4{}^2+\sum_{l=1}^{\nu-1}\vartheta_{r+l}Z_{r+l})=c \qquad (4)$$

حيث أن الدوال χ_p , $\chi_{r_{1+k}}$ مستقلة خطياً كون السطح غير أسطواني.

تعطى الدوال χ_p بالعلاقة:

$$\chi_p = \lambda_0^{-1}(\xi_p + \sum_{\varepsilon=1}^{\lambda-h} a_{\varepsilon p}\,\xi_{h+\varepsilon}) = \lambda_1^{-1}(\sum_{j=1}^{\mu-1} b_{jp}\,\zeta_j) \quad (p=\overline{1,h}) \qquad (5)$$

بالتالي كثيرة الحدود T تعطى بالعلاقة :

$$T = \lambda_0 R + \lambda_1 S \qquad (6)$$

من العلاقات (2) و (6) نجد:

$$T_0\,\xi_{\lambda-1} = \lambda_0(R_0\,\zeta_\lambda) + \lambda_1(R_0\,\xi_\lambda) = R_0(\lambda_0\,\zeta_\lambda + \lambda_1\,\xi_\lambda)$$
$$T_0(\xi_{\lambda-1} - \lambda_0\,\chi_{\lambda-1}) = R_0\,\lambda_1\,\xi_\lambda$$
$$\frac{R_0}{T_0} = \frac{\xi_{\lambda-1} - \lambda_0\,\chi_{\lambda-1}}{\lambda_1\,\xi_\lambda} = \frac{\xi_{\lambda-1}}{\lambda_0\,\zeta_\lambda + \lambda_1\,\xi_\lambda} = \frac{\chi_{\lambda-1}}{\zeta_\lambda} \qquad (7)$$

و منه $\chi_{\lambda-1} = c_1\,\zeta_\lambda$ أي أن الدالتين $\chi_{\lambda-1}$, $\xi_{\lambda-1}$ ترتبطان خطياً مع الدالتين ζ_λ , ξ_λ.

بغية الحصول على المتراجحات الهندسية ودراسة تأثيرها على معادلة السطح، في حالة تقاطع الغلاف الرابع Π^σ فقط مع Π^{r_1}، أي في حالة $\nu_2 = \nu_3 = 0$, $\nu \geq \nu_1 > 0$

لابد من دراسة هذه الحالة بشيء من التفصيل:

الحالة الأولى: $\nu_2 = \nu_3 = 0$, $\nu = \nu_1$، وهنا نميز عدة احتمالات:

1) $h + \nu \leq \lambda - 2$:

نكتب المستوي Π^ν بالشكل:

$$\Pi^\nu = \Pi^{\nu-1} \oplus \Pi^1(OZ_{\lambda+1})$$

يمكن تعيين المستوي $\Pi^{\nu-1}$ في Π^{r_1} بالمعادلات:

$$Z_p = 0 \qquad p = \overline{1,h}$$

$$Z_{h+\nu-1+\delta} = \sum_{q=1}^{\nu-1} a_{\delta q} Z_{h+q} \qquad \delta = \overline{1,\lambda-(h+\nu-1)}$$

$$Z_{\lambda+j} = \sum_{q=1}^{\nu-1} b_{jq} Z_{h+q} \qquad j = \overline{1,\mu-1}$$

نختار محاور إحداثية جديدة OZ'_{h+q} في $\Pi^{\nu-1}$ فتكون دساتير التحويل هي:

$$Z'_p = 0 \qquad p = \overline{1,h}$$

$$Z_{h+q} = Z'_{h+q}$$

$$Z_{h+\nu-1+\delta} = Z'_{h+\nu-1+\delta} + \sum_{q=1}^{\nu-1} a_{\delta q} Z'_{h+q} \qquad \delta = \overline{1,\lambda-(h+\nu-1)}$$

$$Z_{\lambda+j} = Z'_{\lambda+j} + \sum_{q=1}^{\nu-1} b_{jq} Z'_{h+q} \qquad j = \overline{1,\mu-1}$$

ومنه تأخذ معادلة السطح (4) تحت تأثير هذه التحويلات الشكل الآتي:

$$R\left(y_1^2 + \sum_{i=1}^{\lambda-(h+\nu-1)} \xi_{h+\nu-1+\delta} Z'_{h+\nu-1+\delta}\right)$$

$$S\left(y_2^2 + \sum_{j=1}^{\mu-1} \zeta_j Z'_{\lambda+j}\right) +$$

$$T\left(y_3^2 + \sum_{p=1}^{h} \chi_p Z'_p + \sum_{k=1}^{\rho} \chi_{r_{1+k}} Z'_{r_{1+k}}\right) +$$

$$P\left(y_4^2 + \sum_{q=1}^{\nu-1} \vartheta_q Z'_{h+q}\right) = c \qquad (8)$$

لنضع:

$$\vartheta_q = h_0^{-1}(\xi_{h+q} + \sum_{\delta=1}^{\lambda-(h+v-1)} a_{\delta q}\,\xi_{h+v-1+\delta}) = h_1^{-1}(\sum_{j=1}^{\mu-1} b_{jq}\,\zeta_j) \quad (q=\overline{1,v-1}) \quad (9)$$

حيث h_1 , h_0 وسيطان، و منه

$$P = h_0 R + h_1 S \qquad (10)$$

مما سبق نخلص إلى النتيجة الآتية:

مبرهنة (1): إذا كان $v_2 = v_3 = 0,\ v = v_1,\ h+v \le \lambda - 2$ و حققت الدوال $\vartheta_q\ (q=\overline{1,v-1})$, $\chi_p\ (p=\overline{1,h})$ العلاقات (5)، (9) فإن $\Pi^{v-1} = F\,\Pi^{v-1}$ إذا تحققت المتراجحة: $h+v \le \mu-1$

$h+v=\lambda-1$ -2.

من أجل ذلك نعرّف المستوي Π^{v-1} في المستوي Π^{r_1} بالمعادلات:

$$Z_p = 0 \qquad p = \overline{1,h}$$

$$Z_{\lambda-1} = \sum_{q_1=1}^{v-1} a_{q_1} Z_{h+q_1}$$

$$Z_{\lambda} = \sum_{q_1=1}^{v-1} b_{q_1} Z_{h+q_1}$$

$$Z_{\lambda+j} = \sum_{q_1=1}^{v-1} c_{jq_1} Z_{h+q_1} \qquad j=\overline{1,\mu-1}$$

نختار في المستوي Π^{v-1} محاور إحداثية جديدة OZ'_{h+q_1} ونكتب دساتير التحويل:

$$Z_{h+q_1} = Z'_{h+q_1} \qquad q_1 = \overline{1, \nu-1}$$

$$Z_{\lambda-1} = Z'_{\lambda-1} + \sum_{q_1=1}^{\nu-1} a_{q_1} Z'_{h+q_1}$$

$$Z_{\lambda} = Z'_{\lambda} + \sum_{q_1=1}^{\nu-1} b_{q_1} Z'_{h+q_1}$$

$$Z_{\lambda+j} = Z'_{\lambda+j} + \sum_{q_1=1}^{\nu-1} c_{jq_1} Z'_{h+q_1} \qquad j = \overline{1, \mu-1}$$

ومنه تأخذ معادلة السطح (4) تحت تأثير هذه التحويلات الشكل الآتي:

$$R\,(y_1^{\,2} + \xi_{\lambda-1} Z'_{\lambda-1} + \xi_{\lambda} Z'_{\lambda}) + S\,(y_2^{\,2} + \sum_{j=1}^{\mu-1} \zeta_j Z'_{\lambda+j}) + T\,(y_3^{\,2} + \sum_{p=1}^{h} \chi_p Z'_p + \sum_{k=1}^{\rho} \chi_{r_{1+k}} Z'_{r_{1+k}}) +$$

$$P\,(y_4^{\,2} + \sum_{q_1=1}^{\nu-1} \vartheta_{q_1} Z'_{h+q_1}) = c \qquad (11)$$

نضع:

$$\vartheta_{q_1} = t_0^{-1}(\xi_{h+q_1} + a_{q_1}\xi_{\lambda-1} + b_{q_1}\xi_{\lambda}) = t_1^{-1}\,(\sum_{j=1}^{\mu-1} c_{jq_1}\zeta_j) \qquad (12)$$

ومنه $$P = t_0 R + t_1 S \qquad (13)$$

مما سبق نحصل على النتيجة الآتية:

مبرهنة مساعدة (2): إذا كان السطح F_n معطىً بالمعادلة (11)، وأمكننا من أجل $h+\nu=\lambda-1$ حيث $\lambda=\mu$ إيجاد الدوال الخطية $\chi_p\,(p=\overline{1,h})$, $\vartheta_{q_1}\,(q_1=\overline{1,\nu-1})$ بالعلاقات (5) ، (12) عندها يكون $\Pi^{\nu-1} = F\,\Pi^{\nu-1}$.

3- عندما $h+v=\lambda$:

من أجل ذلك نعرّف المستوي Π^{v-1} في المستوي Π^{r_1} بالمعادلات:

$$Z_p=0 \qquad p=\overline{1,h}$$

$$Z_\lambda=\sum_{q_2=1}^{v-1} a_{q_2} Z_{h+q_2}$$

$$Z_{\lambda+j}=\sum_{q_2=1}^{v-1} b_{jq_2} Z_{h+q_2} \qquad j=\overline{1,\mu-1}$$

نختار في المستوي Π^{v-1} محاور إحداثية جديدة OZ'_{h+q_2} ونكتب دساتير التحويل:

$$Z_{h+q_2}=Z'_{h+q_2} \qquad q_2=\overline{(1,v-1)}$$

$$Z_\lambda=Z'_\lambda+\sum_{q_2=1}^{v-1} a_{q_2} Z'_{h+q_2}$$

$$Z_{\lambda+j}=Z'_{\lambda+j}+\sum_{q_2=1}^{v-1} b_{jq_2} Z'_{h+q_2} \qquad j=\overline{1,\mu-1}$$

ومنه تأخذ معادلة السطح (4) تحت تأثير هذه التحويلات الشكل الآتي:

$$R\,(y_1^{\,2}+\xi_\lambda Z'_\lambda)+S\,(y_2^{\,2}+\sum_{j=1}^{\mu-1}\zeta_j Z'_{\lambda+j})+T\,(y_3^{\,2}+\sum_{p=1}^{h}\chi_p Z'_p+\sum_{k=1}^{\rho}\chi_{r_{1+k}} Z'_{r_{1+k}})+$$

$$P\,(y_4^{\,2}+\sum_{q_2=1}^{v-1}\vartheta_{q_2} Z'_{h+q_2})=c \qquad (14)$$

نضع الدالة ϑ_{q_2} بالشكل:

$$\vartheta_{q_2}=t_0^{\,-1}(\xi_{h+q_2}+a_{q_2}\xi_\lambda)=t_1^{\,-1}\,(\sum_{j=1}^{\mu-1} b_{jq_2}\zeta_j) \qquad (15)$$

ومنه: $$P=t_0 R+t_1 S \qquad (16)$$

مما سبق نحصل على النتيجة الآتية:

مبرهنة مساعدة (3): إذا كان السطح F_n معطىً بالمعادلة (13)، وأمكننا من أجل $h+v=\lambda$ حيث $\lambda=\mu$ إيجاد الدوال الخطية $\vartheta_{q_2}\ (q_2=\overline{1,v-1})$ بالعلاقة (15)، عندها يكون $\Pi^{v-1}=F\,\Pi^{v-1}$.

4- عندما $h+v>\lambda$ وليكن $\mu<\lambda$

نفرض أن $d=h+v-\mu$، عندها تأخذ معادلة المستوي Π^{v-1} الشكل:

$$\Pi^{v-1}=\Pi^{d}\oplus\Pi^{\mu-1-h}$$

حيث $(\Pi^{g}\cap\Pi^{\mu-1-h})=\vec{0}$, $(h=g-1)$

يعطى المستوي $\Pi^{\mu-1-h}$ بالمعادلات :

$$Z_p=0 \qquad p=\overline{1,h}$$

$$Z_{\mu-1+\beta}=\sum_{q=1}^{\mu-1-h}a_{\beta q}\,Z_{h+q} \qquad \beta=\overline{1,\lambda-(\mu-1)}$$

$$Z_{\lambda+j}=\sum_{q=1}^{\mu-1-h}b_{jq}\,Z_{h+q} \qquad j=\overline{1,\mu-1}$$

نختار في المستوي $\Pi^{\mu-1-h}$ محاور إحداثية جديدة OZ'_{h+q} ونكتب دساتير التحويل:

$$Z_{h+q}=Z'_{h+q} \qquad q=\overline{1,(\mu-1)-h}$$

$$Z_{\mu-1+\beta}=Z'_{\mu-1+\beta}+\sum_{q=1}^{\mu-1-h}a_{\beta q}\,Z'_{h+q} \qquad \beta=\overline{1,\lambda-(\mu-1)}$$

$$Z_{\lambda+j}=Z'_{\lambda+j}+\sum_{q=1}^{\mu-1-h}b_{jq}\,Z'_{h+q} \qquad j=\overline{1,\mu-1}$$

ومنه تأخذ معادلة السطح (4) تحت تأثير هذه التحويلات الشكل الآتي:

$$R\,(y_1^{\,2}+\sum_{\beta=1}^{\mu-1-h}\xi_{\mu-1+\beta}\,Z'_{\mu-1+\beta})+$$
$$S\,(y_2^{\,2}+\sum_{j=1}^{\mu-1}\zeta_j\,Z'_{\lambda+j})+$$
$$T\,(y_3^{\,2}+\sum_{p=1}^{h}\chi_p\,Z'_p+\sum_{k=1}^{\rho}\chi_{r_{1+k}}Z'_{r_{1+k}})+$$
$$P\,(y_4^{\,2}+\sum_{q_2=1}^{\mu-1-h}\vartheta_q\,Z'_{h+q})=c \qquad (17)$$

تعطى الدالة ϑ_{q_2} بالعلاقة:

$$\vartheta_q=\rho_0^{-1}(\xi_{h+q}+\sum_{\beta=1}^{\lambda-(\mu-1)}a_{\beta q}\,\xi_{\mu-1+\beta})=\rho_1^{-1}(\sum_{j=1}^{\mu-1}b_{jq}\,\zeta_j)\quad(q=\overline{1,(\mu-1)-h}) \qquad (18)$$

بالتالي:

$$P=\rho_0\,R+\rho_1\,S \qquad (19)$$

سنعرّف المستوي Π^d بالمعادلات:

$$Z_p=0 \qquad p=\overline{1,h}$$
$$Z_{h+d+\gamma}=\sum_{\alpha=1}^{d}a'_{\gamma\alpha}\,Z_{h+\alpha} \qquad \gamma=\overline{1,\lambda-(h+d)}$$
$$Z_{\lambda+j}=\sum_{\alpha=1}^{d}b'_{jq}\,Z_{h+\alpha} \qquad j=\overline{1,\mu-1}$$

وباختيار مناسب لجملة محاور إحداثية جديدة نكتب دساتير التحويل الآتية:

$$Z_{h+\alpha} = Z'_{h+\alpha} \qquad \alpha = \overline{1,d}$$

$$Z_{h+d+\gamma} = Z'_{h+d+\gamma} + \sum_{\alpha=1}^{d} a'_{\gamma\alpha} Z'_{h+\alpha} \qquad \gamma = \overline{1,\lambda-(h+d)}$$

$$Z_{\lambda+j} = Z'_{\lambda+j} + \sum_{\alpha=1}^{d} b'_{jq} Z'_{h+\alpha} \qquad j = \overline{1,\mu-1}$$

ومنه تأخذ معادلة السطح (4) تحت تأثير هذه التحويلات الشكل الآتي:

$$R\,(y_1^{\,2} + \sum_{\gamma=1}^{\lambda-(h+d)} \xi_{h+d+\gamma}\, Z'_{h+d+\gamma}) + S\,(y_2^{\,2} + \sum_{j=1}^{\mu-1} \zeta_j\, Z'_{\lambda+j}) + T\,(y_3^{\,2} + \sum_{p=1}^{h} \chi_p\, Z'_p + \sum_{k=1}^{\rho} \chi_{r_{1+k}} Z'_{r_{1+k}}) + P\,(y_4^{\,2} + \sum_{\alpha=1}^{d} C_\alpha\, Z'_{h+\alpha}) = c \qquad (20)$$

حيث C_α دوال خطية بالمتحولات χ_ω وتحقق:

عندما $d=1$ نجد $PC_\alpha = R\,(\xi_{h+\alpha} + \sum_{\gamma=1}^{\lambda-(h+d)} a'_{\gamma\alpha}\,\xi_{h+d+\gamma}) + S\,(\sum_{j=1}^{\mu-1} b_{j\alpha}\,\zeta_j)$

$\alpha=1$ ومنه نجد:

$$PC_1 = A_1 R + B_1 S$$

بالاستفادة من العلاقة (18) نجد:

$$P=\rho_0 R+\rho_1 S$$
$$A_1 R+B_1 S=(\rho_0 R+\rho_1 S)C_1 \Rightarrow A_1 R+B_1 S=\rho_0 C_1 R+\rho_1 C_1 S$$
$$\Rightarrow R(A_1-\rho_0 C_1)=(\rho_1 C_1-B_1)S$$
$$\frac{R}{S}=\frac{\rho_1 C_1-B_1}{A_1-\rho_0 C_1}=\frac{\zeta_\lambda}{\xi_\lambda}$$
$$\Rightarrow \zeta_\lambda=\alpha(\rho_1 C_1-B_1) \quad , \quad \xi_\lambda=\alpha(A_1-\rho_0 C_1)$$

وبالاعتماد على العلاقة (17) $\xi_{\lambda-1}=a_1(\lambda_0\zeta_\lambda+\lambda_1\xi_\lambda)$

نجد أن: $a_1\lambda_0\zeta_\lambda=\xi_{\lambda-1}-\lambda_1\xi_\lambda \Rightarrow \zeta_\lambda=\lambda_0^{-1}(\frac{1}{a}\xi_{\lambda-1}-\lambda_1\xi_\lambda)$

ومنه ينتج:

$$a_1\lambda_0\zeta_\lambda=\xi_{\lambda-1}-\lambda_1\xi_\lambda \Rightarrow \zeta_\lambda=\lambda_0^{-1}(\frac{1}{a}\xi_{\lambda-1}-\lambda_1\xi_\lambda)$$
$$\lambda_0^{-1}(\frac{1}{a}\xi_{\lambda-1}-\lambda_1\xi_\lambda)=\alpha(\rho_1 C_1-B_1)=\alpha\rho_1 C_1-\alpha B_1$$
$$\alpha\rho_1 C_1=\lambda_0^{-1}(\frac{1}{a}\xi_{\lambda-1}-\lambda_1\xi_\lambda)+\alpha B_1$$
$$\alpha C_1=\rho_1^{-1}\left(\lambda_0^{-1}(\frac{1}{a}\xi_{\lambda-1}-\lambda_1\xi_\lambda)+\alpha B_1\right)$$

ومن جهة أخرى لدينا:

$$\xi_\lambda=\alpha(A_1-\rho_0 C) \Rightarrow \alpha C=\rho_0^{-1}(\alpha A_1-\xi_\lambda)$$

وبالتالي نحصل على العلاقات الآتية:

$$\rho_0^{-1}(\alpha A_1-\xi_\lambda)=\rho_0^{-1}\left(\lambda_0^{-1}(\frac{1}{a}\xi_{\lambda-1}-\lambda_1\xi_\lambda)+\alpha B_1\right)$$

$$\alpha B_1=\rho_1\rho_0^{-1}(\alpha A_1-\xi_\lambda)-\lambda_0^{-1}(\frac{1}{a}\xi_{\lambda-1}-\lambda_1\xi_\lambda)$$

أي يوجد علاقة ارتباط خطي بين ξ_i,ζ_i وهذا غير ممكن بالتالي الحالة $h+v>\lambda$ غير ممكنة.

الحالة الثانية:

$$v>v_1>0\ ,\ \ v_2=v_3=0$$

ليكن $\Pi^v=\Pi^\omega\oplus\Pi^{v_1}$

عندما $h+v\le\mu-1<\lambda-1$ أو $(h+v<\mu-1=\lambda-1)$

يعطى Π^w في Π^r بالمعادلات:

$$Z_p=0 \qquad p=\overline{1,h+v_1}$$

$$Z_{h+v_1+\omega+\delta}=\sum_{q_2=1}^{w}A_{\delta q_2}Z_{h+v_1+q_2} \qquad \delta=\overline{1,\lambda-(h+v_1+\omega)}$$

$$Z_{\lambda+j}=\sum_{q_2=1}^{w}B_{jq_2}Z_{h+v_1+q_2} \qquad j=\overline{1,\mu-1}$$

$$Z_{r_1+k}=\sum_{q_2=1}^{w}C_{kq_2}Z_{h+v_1+q_2} \qquad k=\overline{1,\rho} \quad (\rho=\upsilon-g)$$

بأخذ محاور جديدة $OZ'_{h+v_1+q_2}$ في المستوي Π^w بحيث تتحقق دساتير التحويل الآتية:

$$Z_{h+v_1+q_2} = Z'_{h+v_1+q_2} \qquad q_2 = \overline{1, w}$$

$$Z_{h+v_1+\omega+\delta} = Z'_{h+v_1+\omega+\delta} + \sum_{q_2=1}^{w} A_{\delta q_2} Z'_{h+v_1+q_2} \qquad \delta = \overline{1, \lambda-(h+v_1+\omega)}$$

$$Z_{\lambda+j} = Z'_{\lambda+j} + \sum_{q_2=1}^{w} B_{j q_2} Z'_{h+v_1+q_2} \qquad j = \overline{1, \mu-1}$$

$$Z_{r_1+k} = Z'_{r_1+k} + \sum_{q_2=1}^{w} C_{k q_2} Z'_{h+v_1+q_2} \qquad k = \overline{1, \rho}$$

تأخذ معادلة السطح (4) تحت تأثير هذه التحويلات الشكل الآتي:

$$R\,(y_1^{\,2} + \sum_{\delta=1}^{\lambda-(h+v_1+\omega)} \xi_{h+v_1+\omega+\delta}\, Z'_{h+v_1+\omega+\delta}) +$$
$$S\,(y_2^{\,2} + \sum_{j=1}^{\mu-1} \zeta_j\, Z'_{\lambda+j}) +$$
$$T\,(y_3^{\,2} + \sum_{p=1}^{h} \chi_p\, Z'_p + \sum_{k=1}^{\rho} \chi_{r_{1+k}} Z'_{r_{1+k}}) +$$
$$P\,(y_4^{\,2} + \sum_{\alpha=1}^{v_1} \vartheta_q\, Z'_{h+q} + \sum_{\alpha=1}^{w} \vartheta_{v_{1+}q_2}\, Z'_{h+v_{1+}q_2}) = c \qquad (21)$$

حيث $\vartheta_{v_1+q_2}$ دالة خطية تعطى بالعلاقة:

$$\left.\begin{aligned} \vartheta_{v_1+q_2} &= l_0^{-1}\,(\xi_{h+v_1+q_2} + \sum_{\delta=1}^{\lambda-(h+v_1+\omega)} A_{\delta q_2}\, \xi_{h+v_1+\omega+\delta}) \\ &= l_1^{-1}\,(\sum_{j=1}^{\mu-1} B_{j q_2}\, \zeta_j) \\ &= l_2^{-1}\,(\sum_{k=1}^{\rho} C_{k q_2}\, \chi_{r_{1+k}}) \end{aligned}\right\} \quad (q_2 = \overline{1, w}) \qquad (22)$$

وبذلك يتعين كثير الحدود P بالعلاقة الآتية:

$$P=l_0 R+l_1 S+l_2 T \qquad (23)$$

مما سبق نحصل على النتيجة الآتية:

مبرهنة مساعدة (4): ليكن $v>v_1>0\ ,\ v_2=v_3=0$

وليكن $h+v\leq\mu-1<\lambda-1$ أو $(h+v<\mu-1=\lambda-1)$ عندها يتحقق $\Pi^{v-1}=F\,\Pi^{v-1}$

وبتحقق العلاقتين (22) ، (23) يوجد السطح F_n ذو زمرة التناظر التامة G ويتعين بالمعادلة (21).

مما سبق نخلص إلى النتيجة الآتية:

مبرهنة (2): لتكن

$$\Pi^{\lambda}\cap\Pi^{\mu}=p_1\ ,\ \Pi^{\lambda}\cap\Pi^{g}=p_2\ ,\ \Pi^{\lambda}\cap\Pi^{v}=p_3,\ \Pi^{\mu}\cap\Pi^{v}=p_4$$

حيث مستقيمات التقاطع هي:

$$oz_{\lambda}=p_1\ ,\ oz_{\lambda-1}=p_2\ ,\ oz_{\lambda-2}=p_3\ ,\ oz_{\lambda+1}=p_4$$

و $v\geq v_1>0\ ,\ v_2=v_3=0$

عندئذ من أجل أي تموضع للأغلفة الخطية $(j=1,2,3)$ Π^{γ_j}، يمكن تعيين السطح F_n ذي زمرة التناظر التامة G، بالمعادلة (21) إذا تحقق الشرط:

$g+v\le\mu+1$ وتحقق كثيرات الحدود R,S,T,P العلاقات :

$$R=\vartheta_{\lambda-2}\zeta_\lambda=\chi_{\lambda-1}\zeta_\lambda \ , \ S=\vartheta_{\lambda-2}\xi_\lambda=\chi_{\lambda-1}\xi_\lambda$$

$$T=\frac{\vartheta_{\lambda-2}}{\chi_{\lambda-1}}\xi_{\lambda-1}\zeta_\lambda \ , \ P=\zeta_{\lambda+1}\xi_{\lambda-2}$$

المراجع

1. Игнатенко В.Ф.,1989- Бесконечные группы, порождённых косыми отражениями. Взаимное расположение линейных оболочек четырех орбит направлений симметрии. I // Симфероп.ун-т; Симферополь,32с.-Библ.4 назв.- Рус.- Деп. в УкрНИИНТИ 31.10.89.№ 2373 -Ук.89.
2. ИгнатенкоВ.Ф.,1980-геометрия алгебраических поверхностей с симметриями. // Проблемы геометрии / Итоги науки и техники.-М.: Наука,Т.11,с.203-240
3. ИгнатенкоВ.Ф.,1984-Некоторые вопросы геометрический теории инваринтовгрупп, порожденныхотражениями (ортогональными и косыми)// Проблемы геометрии / Итоги науки и техники.,-М.: Наука,Т.16.- с.915-229.
4. Игнатенко В.Ф.,1989- Бесконечные группы, порождённых косыми отражениями. Взаимное расположение линейных оболочек четырех орбит направлений симметрии.II// Симфероп. ун-т; Симферополь,34с.-Библ.5 назв.- Рус.- Деп. вУкрНИИНТИ 19.02.90.№ 224 -Ук.90.
5. Дибан Иссам, 1991- Бесконечные группы, порождённых косыми отражениями. Взаимное расположение линейных оболочек четырех орбит направлений симметрии.IV// Симфероп. ун-т; Симферополь,22с.-Библ.3 назв.- Рус.- Деп. в УкрНИИНТИ 17.02.92.№ 192 -Ук.92.
6. Дибан Иссам, 1992-Бесконечные группы, порождённых косыми отражениями. Взаимное расположение линейных оболочек четырех орбит направлений симметрии.V// Симфероп. ун-т; Симферополь, 66с.-Библ.4 назв.- Рус.- Деп. в УкрИНТЭИ 17.09.92.№224-Ук.92.
7. Дибан Иссам. Бесконечные группы, порождённых косыми отражениями. Взаимное расположение линейных оболочек четырех орбит направлений

симметрии. // Международная научная конференция "Лобачевский и современная геометрия"; Казань, август, 1992. -С.35.

8. Дибан Иссам. Бесконечные группы, порождённых косыми отражениями. Взаимное расположение линейных оболочек четырех орбит направлений симметрии. // Динам. Системы.-1993. Вып. 12.

9. د. عصام ديبان – التوضع المتبادل للأغلفة الخطية لمدارات مناحي التناظر الأربعة، 1999، مجلة جامعة البعث، المجلد (21) العدد (3).
10. د. عصام ديبان – تناظر السطوح الجبرية ذات مدارات مناحي التناظر الأربعة في الفضاء الإقليدي $E^m\ (I)$ ، 2007، مجلة جامعة البعث، المجلد (29) العدد (9).
11. د. عصام ديبان – تناظر السطوح الجبرية ذات مدارات مناحي التناظر الأربعة في الفضاء الإقليدي $E^m\ (II)$ ، 2011، مجلة جامعة البعث ، المجلد (33).
12. محمد البردوني – الأغلفة الخطية الأربعة لمدارات مناحي تناظر السطوح الجبرية في الفضاء E^m، 2013 ، مجلة جامعة البعث، المجلد (35) .
13. محمد البردوني – الأغلفة الخطية الأربعة لمدارات مناحي تناظر السطوح الجبرية في الفضاء $E^m\ (I)$ مجلة جامعة البعث، المجلد (35) .
14. محمد البردوني – الأغلفة الخطية الأربعة لمدارات مناحي تناظر السطوح الجبرية في الفضاء $E^m\ (II)$ ، 2013، منشورات مركز الدراسات والبحوث اليمني.