طريقة التراكيب لحل مسألة الوصف التقليدي (العام) لحالة التناظر المحوري الأولى للانفعالات المرنة للجسم الصلب المرن دقيق الاستقطاب

الباحث: خضر منهل الصّالح[1]

ملخص البحث:

يتعلق البحث بالجسم الصلب المرن دقيق الاستقطاب، مركزي التناظر والمتجانس والمتماثل المناحي والمعيّن بخمسة ثوابت مادية، ضمن ما يسمى حالة التناظر المحوري الأولى للانفعالات المرنة والمناقش رياضياً من خلال الباحثين: البولندي نوفاتسكي [6]، والتركي: إرينغن [5]، والذي نرمز له اختصاراً بالرمز (E–N:5). بدايةً تم مايلي:

أولاً: عرض النموذج الرياضي التقليدي للجسم المذكور، ثانياً: عرض النموذج الرياضي الإزاحي– الدوراني للجسم المدروس، ثالثاً: طريقة متجه تشيفر لأجل مسألة القيم الحدية والإبتدائية، الإزاحية – الدورانية للجسم المدروس.

في البحث، عممنا طريقة متجه تشيفر إلى الشكل التقليدي (العام) للجسم الصلب المرن دقيق الإستقطاب (E–N:5) ضمن حالة التناظر المحوري الأولى لانفعالاته المرنة. بعدها أنهينا البحث باقتراح مسألتين للمناقشة.

الكلمات المفتاحية: طريقة التراكيب – الجسم الصلب المرن دقيق الإستقطاب – حالة التناظر المحوري الأولى للانفعالات المرنة.

[1] ماجستير في الرياضيات التطبيقية – كلية العلوم – جامعة البعث .

The superposition method in solving the general traditional mathematical model for the first axially symmetric state of elastic strain of micropolar elastic solid

Mgr Kheder Manhal Al-saleh[†]

Abstract

This paper is about the mathematical model of the centro-symmetric, homogeneous, and isotropic micropolar elastic solid with 5 material constants in the first axially symmetric state of elastic strains, discussed by Nowacki [6] together with Erigen [5], and shortly called (E-N:5). First, we introduce the following:

1) The traditional model of such a body in frame of the second axially symmetric state of elastic strains.

2) The displacement- rotation model of the above mentioned body.

3) The Schafer vector method for the displacement – rotation initial-boundary value problem of the above mentioned micropolar elastic solid.

In this paper, firstly we generalized the Schafer vector method to the traditional (general) description of the considerable body in frame of the first axially symmetric state of elastic strains. Finally ,we end the paper by two problems for discussing .

Key words: The Superposition method –The micropolar elastic solid – The first axially symmetric of elastic strains.

[†] Applied Math.

1- مقدمة :

في [1,2] تمت مناقشة طريقة متجه تشيفر لحل مسائل القيم الحدية (التوازن) للجسم المرن دقيق الاستقطاب ضمن الحالتين المستويتين الأولى والثانية للانفعالات المرنة ، وضمن حالتي التناظر المحوري الأولى والثانية للانفعالات المرنة.

في [3] قام الباحث ديشليفيتش بمناقشة طريقة متجه تشيفر في حل مسائل القيم الحدية والابتدائية (التحريك) من نوع لامي للجسم الصلب المرن دقيق الإستقطاب، ضمن الحالتين المستويتين الأولى والثانية وكذلك ضمن حالتي التناظر المحوري الأولى والثانية للانفعالات المرنة لهذا الجسم (انظر أيضاً:[4]).

2- هدف وأهمية البحث:

أ- يهدف البحث إلى تطوير طريقة متجه تشيفر لتشمل مسألة النموذج الرياضي التقليدي (العام) للجسم (E-N:5) ضمن حالة التناظر المحوري الأولى للانفعالات المرنة لهذا الجسم، بحيث تؤول المسألة الأساسية إلى مجموع مسألتين؛ الأولى معادلاتها أسهل من الأصلية، والثانية شروطها الحدية والابتدائية التي منشأها القوة، متجانسة (أي أنها أسهل من حيث الشروط الحدية والابتدائية للمسألة الأساسية).

ب- يمكن أن تملك نتائج البحث أهمية كبيرة كونها تعطي طريقة تسهل إيجاد الحل الحاكم للسلوك الديناميكي للجسم الصلب المرن دقيق الاستقطاب ضمن حالة التناظر المحوري الأولى للانفعالات المرنة لهذا الجسم (أسطوانة حديدية، أو نحاسية أو فولاذية أو من الألمنيوم ... الخ)، الأمر الذي يمكن أن يملك تطبيقات هامّة في ميكانيك المواد (مخبر المواد).

3- طرق وأدوات البحث :

سنستخدم نتائج البحث [3] في تعميم طريقة متجه تشيفر من الوصف الإزاحي الدوراني إلى الوصف التقليدي (العام) للجسم الصلب المرن دقيق الاستقطاب (E-N:5) وذلك ضمن حالة التناظر المحوري الأولى للانفعالات المرنة لهذا الجسم.

لهذا الغرض نعرض فيما يلي ما يلزمنا من نتائج البحث [3; page 111] ،المتمثلة بالأتي:

3- 1: الوصف التقليدي (العام) للجسم الصلب المرن دقيق الاستقطاب، المتجانس والمتماثل المناحي، ضمن حالة التناظر المحوري الأولى للانفعالات المرنة له، حيث الجسم يشغل في لحظة البدء المنطقة Ω بسيطة الترابط والمحدودة في R^3 [3]:

مقدمة بسيطة:

لتكن $O x_1 x_2 x_3$ جملة مقارنة ديكارتيّة عطالية، قاعدتها $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$، ولنأخذ القاعدة الاسطوانية الموافقة $(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_z)$، حيث الاحداثيات الاسطوانية هي (r, θ, z) لنقطة مادية لاغرانجية من الجسم المدروس. كما نرمز بـ Ω للمنطقة بسيطة الترابط المحدودة في R^3، والتي يحتلّها الجسم المدروس في لحظة البدء، وبـ $\partial\Omega$ للسطح الأملس لهذا الجسم، وبـ $]0,\infty[$ $\mathrm{T}_+ =$ وبـ $\mathrm{T} = [0,\infty[$. يتعيّن السلوك الديناميكي المرن دقيق الاستقطاب، للجسم المدروس بواسطة مجموعة المقاطع التنسورية: $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\kappa})$، علماً أنّ: $\mathbf{u}$ و $\boldsymbol{\varphi}$ مقطعان متجهيان مستقلان، وهما على الترتيب، مقطع الإزاحة و مقطع التوجّه ، إضافة إلى أن: $\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\kappa}$، هي مقاطع تنسورية من المرتبة الثانية غير متناظرة، وهي على الترتيب: مقطع إجهادات القوة ومقطع إجهادات العزم، ومقطع انفعالات القوّة، ومقطع انفعالات العزم.

في حالة التناظر المحوري الأولى للانفعالات المرنة للجسم المدروس(E−N:5) تكون جميع المقاطع التنسورية التي تنظّم السلوك الديناميكي المرن للجسم مستقلة عن الإحداثي الأسطواني الثاني θ، ويمكن أن تمثل المقاطع السابقة في النظام الإحداثي الأسطواني $(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_z)$ وفي $\Omega \times \mathrm{T}_+$ كما يلي:

$$\mathbf{u} \equiv (u_r, 0, u_z)\ ,\ \ \boldsymbol{\varphi} \equiv (0, \varphi_\theta, 0)\ , \tag{3.1}$$

$$\boldsymbol{\sigma} \equiv \begin{bmatrix} \sigma_{rr} & 0 & \sigma_{rz} \\ 0 & \sigma_{\theta\theta} & 0 \\ \sigma_{zr} & 0 & \sigma_{zz} \end{bmatrix}, \boldsymbol{\mu} \equiv \begin{bmatrix} 0 & \mu_{r\theta} & 0 \\ \mu_{\theta r} & 0 & \mu_{\theta z} \\ 0 & \mu_{z\theta} & 0 \end{bmatrix}, \tag{3.2}$$

$$\boldsymbol{\gamma} \equiv \begin{bmatrix} \gamma_{rr} & 0 & \gamma_{rz} \\ 0 & \gamma_{\theta\theta} & 0 \\ \gamma_{zr} & 0 & \gamma_{zz} \end{bmatrix}, \boldsymbol{\kappa} \equiv \begin{bmatrix} 0 & \kappa_{r\theta} & 0 \\ \kappa_{\theta r} & 0 & \kappa_{\theta z} \\ 0 & \kappa_{z\theta} & 0 \end{bmatrix}, \tag{3.3}$$

هنا نذكّر بأن كل المركبات الموجودة في العلاقات السابقة تتبع فقط للموضع $(r\,,z)$ وللزمن t.

أولاً : الوصف التقليدي (العام) للجسم المدروس ضمن حالة التناظر المحوري الأولى لانفعالاته المرنة:

يتكوّن الوصف التقليدي (العام) لحالة التناظر المحوري الأولى للانفعالات المرنة للجسم الصلب المرن المعتبر (E−N:5)، المتجانس والمتماثل المناحي، من المعادلات والعلاقات الأساسية والشروط الحدية والابتدائية التالية [3]:

معادلات الحركة في $\Omega \times T_+$:

$$\partial_r \sigma_{rr} + \partial_z \sigma_{zr} + r^{-1}\left(\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}\right) + X_r = \rho \ddot{u}_r \,, \qquad (3.4)$$

$$\left(r^{-1} + \partial_r\right)\sigma_{rz} + \partial_z \sigma_{zz} + X_z = \rho \ddot{u}_z \,, \qquad (3.5)$$

$$2\sigma_{[zr]} + \partial_r \mu_{r\theta} + \partial_z \mu_{z\theta} + 2r^{-1}\mu_{(r\theta)} + Y_\theta = J\, \ddot{\varphi}_\theta \,, \qquad (3.6)$$

حيث :

$$\sigma_{[zr]} = \frac{1}{2}\left(\sigma_{zr} - \sigma_{rz}\right) \,,\; \mu_{(r\theta)} = \frac{1}{2}\left(\mu_{r\theta} + \mu_{\theta r}\right)$$

$$\partial_r = \frac{\partial}{\partial r} \,,\; \partial_z = \frac{\partial}{\partial z} \,,$$

علماً أنّ كلاً من ρ و J، على الترتيب، هما الكتلة الحجمية للجسم ، والعطالة الدورانية له، وهما مقداران ثابتان؛ لأن الجسم متجانس. إضافةً إلى ما تقدم فإن: $X = \left(X_r, 0, X_z\right)$ و $Y = \left(0\,, Y_\theta\,, 0\right)$، هما على الترتيب مقطع القوة الحجمية ومقطع العزم الحجمي للجسم المدروس، كما أن رمز النقطة يعني الاشتقاق الجزئي بالنسبة للزمن ،

معادلات توافق الانفعالات في $\Omega \times T$:

$$
\begin{aligned}
&\kappa_{z\theta} + r\partial_z \kappa_{\theta r} = 0 \ , \\
&\kappa_{r\theta} + \partial_r \left(r\kappa_{\theta r} \right) = 0 \ , \\
&\partial_r \left(r\gamma_{\theta\theta} \right) - \gamma_{rr} = 0 \ , \\
&\kappa_{z\theta} + \partial_r \gamma_{zz} - \partial_z \gamma_{rz} = 0 \ , \\
&\partial_z \gamma_{\theta\theta} - r^{-1}\gamma_{zr} + \kappa_{\theta r} = 0 \ ,
\end{aligned}
\tag{3.7}
$$

العلاقات التأسيسية، المحققة في $\Omega \times T$:

$$
\begin{aligned}
&\sigma_{rr} = 2\mu\gamma_{rr} + \lambda e \ , \\
&\sigma_{\theta\theta} = 2\mu\gamma_{\theta\theta} + \lambda e \ , \\
&\sigma_{zz} = 2\mu\gamma_{zz} + \lambda e \ , \\
&\left(\sigma_{rz}, \sigma_{zr}\right) = \left(\mu+\alpha\right)\left(\gamma_{rz}, \gamma_{zr}\right) + \left(\mu-\alpha\right)\left(\gamma_{zr}, \gamma_{rz}\right), \\
&\left(\mu_{r\theta}, \mu_{\theta r}\right) = \left(\gamma+\varepsilon\right)\left(\kappa_{r\theta}, \kappa_{\theta r}\right) + \left(\gamma-\varepsilon\right)\left(\kappa_{\theta r}, \kappa_{r\theta}\right), \\
&\mu_{z\theta} = \left(\gamma+\varepsilon\right)\kappa_{z\theta} , \quad \mu_{\theta z} = \frac{\gamma-\varepsilon}{\gamma+\varepsilon}\mu_{z\theta} \ ,
\end{aligned}
\tag{3.8}
$$

حيث: $e = \gamma_{rr} + \gamma_{\theta\theta} + \gamma_{zz}$ ، كما أن: $\mu, \alpha, \beta, \gamma, \varepsilon \in R_+$ ثوابت المرونة للجسم.

العلاقات الهندسية المحققة في $\Omega \times T_+$:

$$
\begin{aligned}
&\gamma_{rr} = \partial_r u_r \ , \gamma_{\theta\theta} = r^{-1}u_r \ , \ \gamma_{zz} = \partial_z u_z \ , \\
&\gamma_{rz} = \partial_r u_z + \varphi_\theta \ , \gamma_{zr} = \partial_z u_r - \varphi_\theta \ , \\
&\kappa_{r\theta} = \partial_r \varphi_\theta \ , \ \kappa_{\theta r} = -r^{-1}\varphi_\theta \ , \\
&\kappa_{z\theta} = \partial_z \varphi_\theta \ ,
\end{aligned}
\tag{3.9}
$$

الشروط الحدية والابتدائية:

الشروط الحدية على $\partial\Omega \times T$:

$$
\begin{aligned}
&n_r \sigma_{rr} + n_z \sigma_{zr} = p_r \ , n_r \sigma_{rz} + n_z \sigma_{zz} = p_z \ , \\
&n_r \mu_{r\theta} + n_z \mu_{z\theta} = m_\theta \ ,
\end{aligned}
\tag{3.10}
$$

حيث الدوال: $p_r\,,p_z\,,m_\theta : \partial\Omega \times \mathrm{T} \to R$ معلومة، و $\mathbf{n} \equiv (n_r, 0, n_z)$ هي المركبات الاسطوانية لمتجه واحدة الناظم الخارجي على السطح $\partial\Omega$.

الشروط الابتدائية في $\Omega \times \{0\}$:

$$(u_r, \varphi_\theta, u_z) = (f_r, f_\theta, f_z)\,,\;\; (\dot{u}_r, \dot{\varphi}_\theta, \dot{u}_z) = (g_r, g_\theta, g_z)\,, \qquad (3.11)$$

حيث الدوال: $f_r\,, f_\theta, f_z\,,\; g_r, g_\theta, g_z : \Omega \to R$ معلومة.

هدف مسألة الوصف التقليدي (العام) للجسم الصلب المرن دقيق الاستقطاب، المعتبر، ضمن حالة التناظر المحوري الأولى لانفعالاته المرنة، هو إيجاد مجموعة الحقول الفيزيائية $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\kappa})$، المحققة للمسألة (3.11)-(3.1).

<u>ثانياً : الوصف الإزاحي- الدوراني:</u>

نحصل على هذه المسألة من خلال حذف الحقول الفيزيائية $\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\mu}$ من الوصف التقليدي (العام) (3.11)-(3.1)، فنحصل بعد الاختصار والتبسيط على مسألة الوصف الإزاحي- الدوراني التالية، المؤلّفة من مجموعة المعادلات والعلاقات الأساسيّة والشروط الحدية والابتدائية التالية:

معادلات الإزاحات والدورانات، المحققة في $\Omega \times \mathrm{T}_+$:

$$\begin{aligned}
&\square_2^0 u_r + (\lambda+\mu-\alpha)\partial_r e - 2\alpha\,\partial_z\,\varphi_\theta + X_r = 0\,,\\
&\square_2 u_z + (\lambda+\mu-\alpha)\partial_z e - 2\alpha r^{-1}\partial_r(r\,\varphi_\theta) + X_z = 0\,, \qquad (3.12)\\
&\square_4^0\,\varphi_\theta + 2\alpha(\partial_z u_r - \partial_r u_z) + Y_\theta = 0\,,
\end{aligned}$$

حيث:

$$\begin{aligned}
&e = r^{-1}\partial_r(ru_r) + \partial_z u_z\,,\;\; \square_2^0 = (\mu+\alpha)\Delta_0 - \rho\,\partial_t^2\,,\\
&\square_2 = (\mu+\alpha)\Delta - \rho\,\partial_t^2\,,\;\; \square_4^0 = (\gamma+\varepsilon)\Delta_0 - 4\alpha - J\,\partial_t^2\,, \quad (3.13)\\
&\Delta = \partial_r^2 + r^{-1}\partial_r + \partial_z^2\,,\;\; \Delta_0 = \Delta - r^{-2}
\end{aligned}$$

الشروط الحدية على $\partial\Omega \times \mathrm{T}$:

$$n_r\{2\mu\,\partial_r u_r+\lambda[r^{-1}\partial_r(r\,u_r)+\partial_z u_z]\}+ \\ +n_z[(\mu+\alpha)\,(\partial_z u_r-\varphi_\theta)+(\mu-\alpha)\,(\partial_r u_z+\varphi_\theta)]=p_r\ , \qquad (3.14)$$

$$n_r[(\mu+\alpha)\,(\partial_r u_z+\varphi_\theta)+(\mu-\alpha)\,(\partial_z u_r-\varphi_\theta)]+ \\ +n_z\{2\mu\,\partial_z u_z+\lambda[r^{-1}\partial_r(r\,u_r)+\partial_z u_z]\}=p_z\ , \qquad (3.15)$$

$$n_r[(\gamma+\varepsilon)\,\partial_r\varphi_\theta-(\gamma-\varepsilon)\,r^{-1}\varphi_\theta]+ \\ +(\gamma+\varepsilon)\,n_z\,\partial_z\varphi_\theta=m_\theta\ , \qquad (3.16)$$

نضيف إلى ما تقدم ، العلاقات الهندسية (3.9) والعلاقات التأسيسية (3.8) والشروط الابتدائية الحدية والابتدائية (3.11)، ونسمي المسألة الناتجة بمسألة القيم الحدية والابتدائية، الإزاحية الدورانية للجسم المدروس (E−N:5)، المتجانس والمتماثل المناحي، ضمن حالة التناظر المحوري الأولى لانفعالاته المرنة.

هدف مسألة الوصف الإزاحي-الدوراني للجسم الصلب المرن دقيق الاستقطاب، المعتبر، ضمن حالة التناظر المحوري الثانية لانفعالاته المرنة، هو إيجاد مجموعة الحقول الفيزيائية $(\mathbf{u},\boldsymbol{\varphi},\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\kappa})$*، المحققة للمسألة (3.16)−(3.11) و (3.8) و(3.9).*

ثالثاً: <u>طريقة متجه تشيفر في حل مسألة القيم الحدية والابتدائية الإزاحية - الدورانية للجسم المعتبر ضمن حالة التناظر المحوري الأولى لانفعالات المرنة:</u>

لمناقشة هذه الطريقة، نعرِّف متجه تشفير: $\boldsymbol{\zeta}=(0,\zeta_\theta,0)$ بالشكل التالي:

$$\zeta_\theta=\frac{1}{2}(\partial_z u_r-\partial_r u_z)-\varphi_\theta \qquad (3.17)$$

بتعويض (3.17) في (3.12) نحصل على المعادلات التالية المحققة في $\Omega\times T_+$:

$$\overset{*}{\Box}{}_2^0 u_r+(\lambda+\mu)\partial_r e+2\alpha\,\partial_z\,\zeta_\theta+X_r=0\ , \\ \overset{*}{\Box}{}_2 u_z+(\lambda+\mu)\partial_z e-2\alpha r^{-1}\partial_r(r\,\zeta_\theta)+X_z=0\ , \qquad (3.18) \\ \overset{*}{\Box}{}_4^0(\partial_z u_r-\partial_r u_z)+2Y_\theta=2\,\Box_4^0\,\zeta_\theta\ ,$$

ونفرض أن:

$$u_r = u_r^0 + u_r' \,,\ \varphi_\theta = \varphi_\theta^0 + \varphi_\theta' \,,\ u_z = u_z^0 + u_z' \,, \\ \zeta_\theta = \zeta_\theta^0 + \zeta_\theta' \,,\ Y_\theta = Y_\theta^0 + Y_\theta' \,, \tag{3.19}$$

حيث: $\left(u_r^0, \varphi_\theta^0, u_z^0\right)$ تتعلق بالجسم الصلب المرن في إطار المرونة الخطية التقليدية ضمن حالة التناظر المحوري الأولى للانفعالات المرنة التقليدية، أما: $\left(u_r', \varphi_\theta', u_z'\right)$ فتسمى بالإزاحات والدورانات، المتممة (الزائدة) (أي: الزائدة عن التقليدية). فيما يلي سنناقش مسألتي القيم الحدية والابتدائية ؛الكلاسيكية، للحقول الكلاسيكية $\left(u_r^0, \varphi_\theta^0, u_z^0\right)$، ومسألة القيم الحدية والابتدائية المتممة (الزائدة) للحقول المتممة (الزائدة) $\left(u_r', \varphi_\theta', u_z'\right)$.

ثالثاً - 1 : مسألة القيم الحدية والابتدائية، الكلاسيكية، المتعلقة بالحقول الكلاسيكية $\left(u_r^0, \varphi_\theta^0, u_z^0\right)$: نحصل على هذه المسألة باتباع ما يلي:

نوضع: $\zeta_\theta^0 = 0$ في المعادلتين الأولى والثانية من المعادلات (3.12)، نحصل على المعادلتين الكلاسيكيتين التاليتين، المحققتين في $\Omega \times T_+$:

$$\overset{*}{\square}{}_2^0\, u_r^0 + (\lambda + \mu)\partial_r e^0 + X_r = 0 \,, \\ \overset{*}{\square}{}_2\, u_z^0 + (\lambda + \mu)\partial_z e^0 + X_z = 0 \tag{3.20}$$

حيث المؤثر: $e^0 = r^{-1}\partial_r (r u_r^0) + \partial_z u_z^0$ و $\overset{*}{\square}{}_2^0$ هو المؤثر الناتج عن وضع: $\alpha = 0$ في المؤثر $\square_2^0$ ؛

$$n_r \sigma_{rr}^0 + n_z \sigma_{zr}^0 = p_r \,,\ n_r \sigma_{rz}^0 + n_z \sigma_{zz}^0 = p_z \,, \tag{3.21}$$

حيث : σ_{rr}^0 و σ_{zr}^0 و σ_{rz}^0 و σ_{zz}^0 على الترتيب، هي الجزء الكلاسيكي لكل من σ_{rr} و σ_{zr} و σ_{rz} و σ_{zz}؛ ومع العلم أنّ $\sigma_{rz}^0 = \sigma_{zr}^0$ حيث:

$$\begin{aligned} &\sigma_{rr}^{0}=2\mu\,\varepsilon_{rr}^{0}+\lambda\, e^{0}\;, \quad \sigma_{\theta\theta}^{0}=2\mu\,\varepsilon_{\theta\theta}^{0}+\lambda\, e^{0}\;, \\ &\sigma_{zz}^{0}=2\mu\,\varepsilon_{zz}^{0}+\lambda\, e^{0}\;, \quad \sigma_{rz}^{0}=2\mu\,\varepsilon_{rz}^{0}\;, \\ &e^{0}=\varepsilon_{rr}^{0}+\varepsilon_{\theta\theta}^{0}+\varepsilon_{zz}^{0}\;, \end{aligned} \tag{3.22}$$

وعلماً أن :

$$\varepsilon_{rr}^{0}=\partial_r u_r^{0}\,,\ \varepsilon_{\theta\theta}^{0}=\frac{1}{r}u_r^{0}\,,\varepsilon_{zz}^{0}=\partial_z u_z^{0}\,,\ \varepsilon_{rz}^{0}=\varepsilon_{zr}^{0}=\frac{1}{2}(\partial_z\, u_r^{0}+\partial_r\, u_z^{0}) \tag{3.23}$$

أخيراُ، من الشروط الإبتدائية (3.11)، نحصل على الشروط الإبتدائية، الكلاسيكية، التالية المحققة في $\Omega\times\{0\}$:

$$\begin{aligned} &u_r^{0}=f_r\;,\ \ \dot{u}_r^{0}=g_r\;, \\ &u_z^{0}=f_z\;,\ \ \dot{u}_z^{0}=g_z \end{aligned} \tag{3.24}$$

ثالثاً- 2 : مسألة القيم الحدية والابتدائية، المتممة (الزائدة)، المتعلقة بالحقول المتممة (الزائدة) $(u'_r,\varphi'_\theta,u'_z)$:

بهدف الوصول إلى المعادلات والعلاقات الناظمة للحقول المتممة $(u'_r,\varphi'_\theta,u'_z)$ يلزمنا إثبات صحة المعادلة التالية المحققة في $\Omega\times T_+$:

$$2\overset{*}{\Box}{}_2^0\varphi_\theta^0=\partial_r X_z-\partial_z X_r \tag{3.25}$$

حيث المؤثر : $\overset{*}{\Box}_2$ ينتج عن وضع: $\alpha=0$ في المؤثر : $\Box_2:=(\mu+\alpha)\,\Delta-\rho\,\partial_t^2$.

الإثبات:

من العلاقة (3.17) ، لأجل $\zeta_\theta^0=0$، بحصل على:

$$2\varphi_\theta^0=\partial_z u_r^0-\partial_r u_z^0 \tag{3.26}$$

فباشتقاق طرفي المعادلة الأولى في (3.20)، جزئياً بالنسبة لـ z، والمعادلة الثانية في (3.20) بالنسبة لـ r نجد:

$$\partial_z \overset{*}{\square}{}_2^0 u_r^0 + (\lambda+\mu)\partial_{rz}^2 e^0 + \partial_z X_r = 0 , \qquad (3.27)$$
$$\partial_r \overset{*}{\square}_2 u_z^0 + (\lambda+\mu)\, \partial_{rz}^2 e^0 + \partial_r X_z = 0$$

وبما أنّ:

$$\partial_z \overset{*}{\square}{}_2^0 = \overset{*}{\square}{}_2^0 \partial_z \;,\; \partial_r \overset{*}{\square}_2 = \overset{*}{\square}{}_2^0 \partial_r \qquad (3.28)$$

فتصبح المعادلتان السابقتان بالشكل التالي في $\Omega \times T_+$:

$$\overset{*}{\square}{}_2^0 \partial_z u_r^0 + (\lambda+\mu)\partial_{rz}^2 e^0 + \partial_z X_r = 0 , \qquad (3.29)$$
$$\overset{*}{\square}{}_2^0 \partial_r u_z^0 + (\lambda+\mu)\, \partial_{rz}^2 e^0 + \partial_r X_z = 0$$

تنتج الآن (3.25) مباشرةً عن طرح المعادلة الثانية في (3.29) من المعادلة الأولى في (3.29) ومن ثمّ الاستفادة من العلاقة (3.26).

الآن لاستنتاج جملة المعادلات التفاضلية المتعلقة بالحقول المتممة (الزائدة) $(u_r', \varphi_\theta', u_z')$، نطبق المؤثر $\overset{*}{\square}{}_2^0$ على طرفي المعادلة $(3.18)_3$، فنحصل على المعادلة التالية المحققة في $\Omega \times T_+$:

$$\overset{*}{\square}{}_2^0 [\, \overset{*}{\square}{}_4^0 (\partial_z u_r - \partial_r u_z) + 2Y_\theta - 2\, \square_4^0\, \zeta_\theta] = 0 \qquad (3.30)$$

الآن ينتج عن المعادلات $(3.18)_{1,2}$ و (3.20) ، وعن المعادلات (3.30) و(3.25) و (3.26)، أنّ الثلاثيّة $(u_r', \zeta_\theta, u_z')$ تحقق جملة المعادلات التفاضلية المتممة، التالية في $\Omega \times T_+$:

$$\begin{aligned}
&\overset{*}{\square}{}_2^0\, u_r' + (\lambda+\mu)\partial_r e' + 2\alpha\,\partial_z\, \zeta_\theta + \hat{X}_r = 0\,,\\
&\overset{*}{\square}{}_2\, u_z' + (\lambda+\mu)\partial_z e' - 2\alpha r^{-1}\partial_r\,(r\,\zeta_\theta) + \hat{X}_z = 0\,, \qquad (3.31)\\
&\overset{*}{\square}{}_2^0[\,\overset{*}{\square}{}_4^0(\partial_z\, u_r' - \partial_r\, u_z') - 2\,\square_4^0\, \zeta_\theta\,] = -2\hat{Y}_\theta
\end{aligned}$$

حيث : $e' = r^{-1}\partial_r\,(r u_r') + \partial_z u_z'$ ، كما أن:

$$\hat{Y}_\theta = \frac{1}{2}[2\,\overset{*}{\square}{}_2^0\, Y_\theta - \overset{*}{\square}{}_4^0\,(\partial_z\, X_r - \partial_r\, X_z)]\ ,\hat{X}_r = \hat{X}_z = 0$$

وللحصول، الآن، على المعادلات، التي تحكم الثلاثيّة $(\, u_r' \,, \varphi_\theta' \,, u_z' \,)$ ، نعوض: $\zeta_\theta = \frac{1}{2}(\partial_z\, u_r' - \partial_r\, u_z') - \varphi_\theta'$ ، في المعادلات (3.29)، فنحصل، بعد التبسيط، على المعادلات التالية، المحققة في $\Omega \times T_+$:

$$\begin{aligned}
&\square_2^0\, u_r' + (\lambda+\mu-\alpha)\partial_r e' - 2\alpha\,\partial_z\, \varphi_\theta' + \hat{X}_r = 0\,,\\
&\square_2 u_z' + (\lambda+\mu-\alpha)\partial_z e' + 2\alpha r^{-1}\partial_r\,(r\,\varphi_\theta') + \hat{X}_z = 0\,, \qquad (3.32)\\
&\overset{*}{\square}{}_2^0[\,\square_4^0\, \varphi_\theta' + 2\alpha(\partial_z\, u_r' - \partial_r\, u_z')] + \hat{Y}_\theta = 0
\end{aligned}$$

نضيف إلى المعادلات السابقة الشروط الحدية والابتدائية التالية الناتجة عن الشروط الحدية والابتدائية الأصلية، وذلك باتباع مايلي:

من الشروط الحدية الأصلية (3.16)–(3.14)، نحصل على الشروط الحدية المتممة (أو الزائدة)، التالية المحققة في $\partial\Omega \times T$:

$$\begin{aligned}
&n_r\{\,2\mu\,\partial_r u_r' + \lambda\,[r^{-1}\partial_r\left(r u_r'\right) + \partial_z\, u_z'\,]\} +\\
&+n_z[(\mu+\alpha)\ (\partial_z u_r' - \varphi_\theta') + (\mu-\alpha)\ (\partial_r u_z' + \varphi_\theta')] = 0\,,
\end{aligned} \qquad (3.33)$$

$$\begin{aligned}
&n_r[(\mu+\alpha)\ (\partial_r u_z' + \varphi_\theta') + (\mu-\alpha)\,(\partial_z u_r' - \varphi_\theta')] +\\
&+n_z\ \{\,2\mu\,\partial_z u_z' + \lambda\,[r^{-1}\partial_r\left(r u_r'\right) + \partial_z\, u_z'\,]\} = 0\,,
\end{aligned} \qquad (3.34)$$

$$\begin{aligned}
&n_r\,[(\gamma+\varepsilon)\,\partial_r\,\varphi_\theta' - (\gamma-\varepsilon)\,r^{-1}\varphi_\theta'] +\\
&+(\gamma+\varepsilon)\,n_z\,\partial_z\,\varphi_\theta' = m_\theta - m_\theta^0\,,
\end{aligned} \qquad (3.35)$$

ومن الشروط الإبتدائية الأصلية (3.11) ، نحصل على الشروط الإبتدائية المتممة التالية المحققة في $\Omega\times\{0\}$:

$$u'_r = 0\ ,\ \varphi'_\theta = f_\theta - \varphi^0_\theta\ ,\ u'_z = 0\ , \tag{3.36}$$

$$\dot{u}'_r = 0\ ,\ \dot{\varphi}'_\theta = g_\theta - \dot{\varphi}^0_\theta\ ,\ \dot{u}'_z = 0\ , \tag{3.37}$$

حيث هنا نشير إلى أنه في الشروط الحدية والابتدائية السابقة المقدار :

$$m^0_\theta = n_r\,\mu^0_{r\theta} + n_z\,\mu^0_{z\theta} \tag{3.38}$$

والمقادير $\dot{\varphi}^0_\theta$, φ^0_θ تنتج عن مسألة القيم الحدية والابتدائية الكلاسيكية (3.19)–(3.22) وعن العلاقة :

$$\varphi^0_\theta = \frac{1}{2}(\partial_z\,u^0_r - \partial_r\,u^0_z) \tag{3.39}$$

كما أن:

$$\begin{aligned} \mu^0_{r\theta} &= (\gamma+\varepsilon)\,\kappa^0_{r\theta} + (\gamma-\varepsilon)\,\kappa^0_{\theta r} \\ \mu^0_{z\theta} &= (\gamma+\varepsilon)\kappa^0_{z\theta} \end{aligned} \tag{3.40}$$

و:

$$\begin{aligned} &\kappa^0_{r\theta} = \partial_r\,\varphi^0_\theta\ ,\ \kappa^0_{\theta r} = -r^{-1}\,\varphi^0_\theta\ , \\ &\kappa^0_{z\theta} = \partial_z\,\varphi^0_\theta\ , \end{aligned} \tag{3.41}$$

ومع العلم أن:

$$\varphi^0_\theta(r,z) = \lim_{t\to 0}\varphi^0_\theta(r,z,t)\ ,\ \dot{\varphi}^0_\theta(r,z) = \lim_{t\to 0}\frac{\partial\varphi^0_\theta}{\partial t}(r,z,t)\ ,$$

آلية حل المسألة: بحل مسألة القيم الحدية والابتدائية التقليدية (3.24)–(3.20)، نحصل على الحل التقليدي $(u^0_r, \varphi^0_\theta, u^0_z)$، وبحل مسألة القيم الحدية والابتدائية (الزائدة)

(3.41)−(3.32)، نحصل على الحقول المتممة الزائدة $\left(u_r', \varphi_\theta', u_z'\right)$. نعوض ماتقدم في العلاقات $(3.19)_{1\text{-}3}$، فنحصل على الثلاثية $\left(u_r, \varphi_\theta, u_z\right)$. نعوض $\left(u_r, \varphi_\theta, u_z\right)$ في العلاقات الهندسية الأصلية فنحصل على الانفعالات، وإذا عوضنا هذه الانفعالات الناتجة في العلاقات التأسيسية الأصلية، نحصل على الإجهادات.

4) النتائج والمناقشة:

طريقة متجه شيفر في حل مسألة الوصف التقليدي العام (3.11)− (3.1) للجسم الصلب المرن دقيق الإستقطاب (E-N:5) لأجل حالة التناظر المحوري الأولى للانفعالات المرنة لهذا الجسم:

لأجل هذا الهدف نفرض في مسألة الوصف التقليدي العام (3.11)−(3.1) أن:

$$\begin{aligned} &\mathbf{u} = \mathbf{u}^0 + \mathbf{u}' \ , \ \boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{\varphi}^0 + \boldsymbol{\varphi}' \ , \\ &\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^0 + \boldsymbol{\sigma}' \ , \ \boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu}^0 + \boldsymbol{\mu}' \ , \ \boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\varepsilon}^0 + \boldsymbol{\gamma}' \ , \\ &\boldsymbol{\kappa} = \boldsymbol{\kappa}^0 + \boldsymbol{\kappa}' \ , \ \mathbf{Y} = \mathbf{Y}^0 + \mathbf{Y}' \ , \end{aligned} \tag{4.1}$$

علماً أنّ المقاطع التنسوريّة $(\mathbf{u}^0, \boldsymbol{\varphi}^0, \boldsymbol{\sigma}^0, \boldsymbol{\mu}^0, \boldsymbol{\varepsilon}^0, \boldsymbol{\kappa}^0)$ و $\mathbf{Y}^0$، تنسب للمرونة الخطية الكلاسيكية الديناميكية (نموذج Hooke) ضمن حالة التناظر المحوري الأولى للانفعالات المرنة لهذا الجسم،أما المقاطع التنسوريّة $(\mathbf{u}', \boldsymbol{\varphi}', \boldsymbol{\sigma}', \boldsymbol{\mu}', \boldsymbol{\gamma}', \boldsymbol{\kappa}')$ و $\mathbf{Y}'$ فهي المقاطع المتممة، أو الزائدة عن مقاطع جسم Hooke. فيما يلي سنقوم باستنتاج كلاً من مسألة القيم الحدية الإبتدائية الكلاسيكية الموافقة لـ $(\mathbf{u}^0, \boldsymbol{\varphi}^0, \boldsymbol{\sigma}^0, \boldsymbol{\mu}^0, \boldsymbol{\varepsilon}^0, \boldsymbol{\kappa}^0)$ ومسألة القيم الحدية الإبتدائية المتممة (أو الزائدة) الموافقة للمقاطع المتممة (أو الزائدة) $(\mathbf{u}', \boldsymbol{\varphi}', \boldsymbol{\sigma}', \boldsymbol{\mu}', \boldsymbol{\gamma}', \boldsymbol{\kappa}')$.

4 −1 : مسألة القيم الحدية الإبتدائية الكلاسيكية الموافقة للحقول الكلاسيكية $(\mathbf{u}^0, \boldsymbol{\varphi}^0, \boldsymbol{\sigma}^0, \boldsymbol{\mu}^0, \boldsymbol{\varepsilon}^0, \boldsymbol{\kappa}^0)$*:* نحصل على هذه المسألة باتبّاع الآتي:

من المعادلتين (3.4) و (3.5) نحصل على:

معادلات الحركة التالية المحققة في $\Omega \times T_+$:

$$\partial_r \sigma_{rr}^0 + \partial_z \sigma_{zr}^0 + r^{-1}\left(\sigma_{rr}^0 - \sigma_{\theta\theta}^0\right) + X_r = \rho \ddot{u}_r^0 \ , \qquad (4.2)$$

$$\left(r^{-1} + \partial_r\right)\sigma_{rz}^0 + \partial_z \sigma_{zz}^0 + X_z = \rho \ddot{u}_z^0 \ , \qquad (4.3)$$

من معادلات توافق الإنفعالات (3.7)، نحصل على معادلات توافق الانفعالات الكلاسيكية التالية المحققة في $\Omega \times T$:

$$\begin{aligned}
&\kappa_{z\theta}^0 + r\partial_z \kappa_{\theta r}^0 = 0 \ , \\
&\kappa_{r\theta}^0 + \partial_r\left(r\kappa_{\theta r}^0\right) = 0 \ , \\
&\partial_r\left(r\,\varepsilon_{\theta\theta}^0\right) - \varepsilon_{rr}^0 = 0 \ , \\
&\kappa_{z\theta}^0 + \partial_r \varepsilon_{zz}^0 - \partial_z \varepsilon_{rz}^0 = 0 \ , \\
&\partial_z \varepsilon_{\theta\theta}^0 - r^{-1}\varepsilon_{zr}^0 + \kappa_{\theta r}^0 = 0 \ ,
\end{aligned}$$

والتي إذا حذفنا منها انفعالات العزم، التقليدية نحصل على معادلتين فقط ، هما :

معادلة توافق الانفعالات التقليدية المحققة في $\Omega \times T$:

$$\begin{aligned}
&2\partial_{rz}^2 \varepsilon_{zr}^0 - \partial_z^2 \varepsilon_{rr}^0 - \partial_r^2 \varepsilon_{zz}^o = 0 \ , \\
&r\,\partial_z^2 \varepsilon_{\theta\theta}^0 - 2\partial_z \varepsilon_{zr}^0 + \partial_r \varepsilon_{zz}^0 = 0
\end{aligned} \qquad (4.4)$$

ومن العلاقات الهندسية (3.9) نحصل على العلاقات الهندسية الكلاسيكية التالية المحققة في $\Omega \times T_+$:

$$\begin{aligned}
&\varepsilon_{rr}^0 = \partial_r u_r^0 \ , \ \varepsilon_{\theta\theta}^0 = r^{-1}u_r^0 \ , \ \varepsilon_{zz}^0 = \partial_z u_z^0 \ , \\
&\varepsilon_{rz}^0 = \partial_r u_z^0 + \varphi_\theta^0 \ , \ \varepsilon_{zr}^0 = \partial_z u_r^0 - \varphi_\theta^0 \ , \\
&\kappa_{r\theta}^0 = \partial_r \varphi_\theta^0 \ , \ \kappa_{\theta r}^0 = -r^{-1}\varphi_\theta^0 \ , \\
&\kappa_{z\theta}^0 = \partial_z \varphi_\theta^0
\end{aligned} \qquad (4.4)$$

والتي بالاعتماد على تعريف الدوران الكلاسيكي: φ_θ^0 :

$$\varphi_\theta^0 = \frac{1}{2}(\partial_z u_r^0 - \partial_r u_z^0) \tag{4.5}$$

فإن العلاقات الخمسة الأولى في (4.4)، تعطينا:

العلاقات الهندسية الكلاسيكية التالية المحققة في $\Omega \times T_+$:

$$\begin{aligned} &\varepsilon_{rr}^0 = \partial_r u_r^0 , \quad \varepsilon_{\theta\theta}^0 = \frac{1}{r} u_r^0 , \varepsilon_{zz}^0 = \partial_z u_z^0 , \\ &\varepsilon_{rz}^0 = \varepsilon_{zr}^0 = \frac{1}{2}(\partial_z u_r^0 + \partial_r u_z^0) \end{aligned} \tag{4.6}$$

و هنا يتضح تناظر حقل الانفعالات التنسوري، الكلاسيكي.

ومن العلاقات التأسيسية (3.8) نحصل على العلاقات التأسيسية الكلاسيكية، التالية، المحققة في $\Omega \times T$:

$$\begin{aligned} &\sigma_{rr}^0 = 2\mu\varepsilon_{rr}^0 + \lambda e^0 , \\ &\sigma_{\theta\theta}^0 = 2\mu\varepsilon_{\theta\theta}^0 + \lambda e^0 , \\ &\sigma_{zz}^0 = 2\mu\varepsilon_{zz}^0 + \lambda e^0 , \\ &\left(\sigma_{rz}^0, \sigma_{zr}^0\right) = (\mu+\alpha)\left(\varepsilon_{rz}^0, \varepsilon_{zr}^0\right) + (\mu-\alpha)\left(\varepsilon_{zr}^0, \varepsilon_{rz}^0\right), \\ &\left(\mu_{r\theta}^0, \mu_{\theta r}^0\right) = (\gamma+\varepsilon)\left(\kappa_{r\theta}^0, \kappa_{\theta r}^0\right) + (\gamma-\varepsilon)\left(\kappa_{\theta r}^0, \kappa_{r\theta}^0\right), \\ &\mu_{z\theta}^0 = (\gamma+\varepsilon)\kappa_{z\theta}^0 , \quad \mu_{\theta z}^0 = \frac{\gamma-\varepsilon}{\gamma+\varepsilon}\mu_{z\theta}^0 \end{aligned} \tag{4.7}$$

وبما أنّ تنسور الانفعالات الكلاسيكية متناظر، فإن العلاقات الأربعة الأولى في (4.7) تعطينا:

العلاقات التأسيسية الكلاسيكية، التالية، المحققة في $\Omega \times T$:

$$\begin{aligned} &\sigma_{rr}^0 = 2\mu\varepsilon_{rr}^0 + \lambda e^0 , \quad \sigma_{\theta\theta}^0 = 2\mu\varepsilon_{\theta\theta}^0 + \lambda e^0 , \\ &\sigma_{zz}^0 = 2\mu\varepsilon_{zz}^0 + \lambda e^0 , \quad \sigma_{rz}^0 = \sigma_{zr}^0 = 2\mu\varepsilon_{rz}^0 \end{aligned} \tag{4.8}$$

حيث : $e^0 = \varepsilon_{rr}^0 + \varepsilon_{\theta\theta}^0 + \varepsilon_{zz}^0$

ومن الشروط الحدية (3.10) ، نحصل على:

الشروط الحدية التقليدية، التالية المحققة على $\partial\Omega \times \mathrm{T}$:

$$n_r \sigma^0_{rr} + n_z \sigma^0_{zr} = p_r \;, n_r \sigma^0_{rz} + n_z \sigma^0_{zz} = p_z \qquad (4.9)$$

أخيراً من الشروط الابتدائية (3.11)، نحصل على:

الشروط الابتدائية، الكلاسيكية، التالية، المحققة في $\Omega\times\{0\}$:

$$\begin{aligned} u^0_r &= f_r \;,\; \dot{u}^0_r = g_r \;, \\ u^0_z &= f_z \;,\; \dot{u}^0_z = g_z \end{aligned} \qquad (4.10)$$

نسمّي المسألة (4.10)-(4.2) بالمسألة الكلاسيكية للوصف التقليدي العام للجسم (E-N:5) ضمن حالة التناظر المحوري الأولى للانفعالات المرنة له.

4-2: مسألة القيم الحدية والابتدائية المتممة(أو الزائدة) الموافقة للمقاطع التنسوريّة الزائدة $(\mathbf{u}', \boldsymbol{\varphi}', \boldsymbol{\sigma}', \boldsymbol{\mu}', \boldsymbol{\gamma}', \boldsymbol{\kappa}')$ *:* بهدف الحصول على هذه المسألة يلزمنا صياغة وإثبات التوطئة المساعدة الآتية .

توطئة مساعدة: إن المقاطع المتجهيّة الكلاسيكية $(\boldsymbol{\varphi}^0, \boldsymbol{\mu}^0)$ تحقق في $\Omega \times \mathrm{T}_+$ المعادلة التالية:

$$\overset{*}{\Box}{}^0_2 \left[\partial_r \mu^0_{r\theta} + \partial_z \mu^0_{z\theta} + 2r^{-1}\mu^0_{(r\theta)} - J\,\ddot{\varphi}^0_\theta + Y_\theta \right] = \hat{Y}_\theta \,, \qquad (4.11)$$

الإثبات: باستخدام العلاقات التأسيسية الكلاسيكية (4.7) والعلاقات الهندسية الكلاسيكية (4.4)، بسهولة نحصل على:

$$\partial_r \mu^0_{r\theta} + \partial_z \mu^0_{z\theta} + 2r^{-1}\mu^0_{(r\theta)} - J\,\ddot{\varphi}^0_\theta = \overset{*}{\Box}{}^0_4 \varphi^0_\theta \,, \qquad (4.12)$$

الآن، بتطبيق المؤثر $\overset{*}{\Box}{}^0_2$ على طرفي العلاقة (4.12) ،ومن ثم بالاستفادة من المعادلة (3.25)، نحصل مباشرةً على المعادلة (4.11).

وللحصول على المعادلات الحاكمة للمقاطع التنسوريّة المتممة $(\mathbf{u}',\boldsymbol{\varphi}', \boldsymbol{\sigma}', \boldsymbol{\mu}', \boldsymbol{\gamma}', \boldsymbol{\kappa}')$ (المقاطع التنسوريّة الزائدة)، نتبع مايلي:

نطبق المؤثر $\overset{*}{\square}{}_2^0$ على طرفي المعادلة (3.6)، فنحصل على المعادلة التالية المحققة في $\Omega \times T_+$:

$$\overset{*}{\square}{}_2^0\left[2\sigma_{[z\,r]}+\partial_r\,\mu_{r\theta}+\partial_z\,\mu_{z\,\theta}+2r^{-1}\mu_{(r\theta)}+Y_{\,\theta}-J\,\ddot{\varphi}_\theta\right]=0 \qquad (4.13)$$

ينتج الآن، عن المعادلتين (3.4) و (4.2) وعن المعادلتين (3.5) و (4.3)، وعن المعادلتين (4.13) و(4.11) ، أن المقاطع المتممة (الزائدة) $(\mathbf{u}',\boldsymbol{\varphi}', \boldsymbol{\sigma}', \boldsymbol{\mu}', \boldsymbol{\gamma}', \boldsymbol{\kappa}')$، تحقق نظام المعادلات المتمم التالي في $\Omega \times T_+$:

$$\partial_r\sigma'_{rr}+\partial_z\,\sigma'_{z\,r}+r^{-1}\left(\sigma'_{rr}-\sigma'_{\theta\theta}\right)+\hat{X}_{\,r}=\rho\ddot{u}'_r\ , \qquad (4.14)$$

$$\left(r^{-1}+\partial_r\right)\sigma'_{rz}+\partial_z\,\sigma'_{z\,z}+\hat{X}_{\,z}=\rho\ddot{u}'_z\ , \qquad (4.15)$$

$$\overset{*}{\square}{}_2^0\left[2\sigma'_{[z\,r]}+\partial_r\,\mu'_{r\theta}+\partial_z\,\mu'_{z\,\theta}+2r^{-1}\mu'_{(r\theta)}\right]+\hat{Y}_{\theta}=J\,\overset{*}{\square}{}_2^0\,\ddot{\varphi}'_\theta \qquad (4.16)$$

ومن علاقات توافق الانفعالات (3.7) نحصل على:

علاقات توافق الانفعالات، الزائدة، التالية المحققة في $\Omega \times T$:

$$\begin{aligned}
&\kappa'_{z\theta}+r\partial_z\kappa'_{\theta r}=0\ ,\ \ \kappa'_{r\theta}+\partial_r\left(r\kappa'_{\theta r}\right)=0\ ,\\
&\partial_r\left(r\gamma'_{\theta\theta}\right)-\gamma'_{rr}=0\ ,\ \kappa'_{z\,\theta}+\partial_r\,\gamma'_{z\,z}-\partial_z\,\gamma'_{rz}=0\ , \qquad (4.17)\\
&\partial_z\,\gamma'_{\theta\theta}-r^{-1}\gamma'_{z\,r}+\kappa'_{\theta r}=0\ ,
\end{aligned}$$

ومن العلاقات الهندسية (3.9)، نحصل على:

العلاقات الهندسية، الزائدة، التالية ، المحققة في $\Omega \times T_+$:

$$\begin{aligned}
&\gamma'_{rr} = \partial_r u'_r \ , \gamma'_{\theta\theta} = r^{-1} u'_r \ , \ \gamma'_{zz} = \partial_z u'_z \ , \\
&\gamma'_{rz} = \partial_r u'_z + \varphi'_\theta \ , \gamma'_{zr} = \partial_z u'_r - \varphi'_\theta \ , \\
&\kappa'_{r\theta} = \partial_r \varphi'_\theta \ , \ \kappa'_{\theta r} = -r^{-1} \varphi'_\theta \ , \\
&\kappa'_{z\theta} = \partial_z \varphi'_\theta \ ,
\end{aligned} \tag{4.18}$$

ومن العلاقات التأسيسية الزائدة (3.8)، نحصل على:

العلاقات التأسيسية، الزائدة، التالية ، المحققة في $\Omega \times T$:

$$\begin{aligned}
&\sigma'_{rr} = 2\mu \gamma'_{rr} + \lambda e' \ , \\
&\sigma'_{\theta\theta} = 2\mu \gamma'_{\theta\theta} + \lambda e' \ , \\
&\sigma'_{zz} = 2\mu \gamma'_{zz} + \lambda e' \ , \\
&\left(\sigma'_{rz}, \sigma'_{zr}\right) = \left(\mu + \alpha\right)\left(\gamma'_{rz}, \gamma'_{zr}\right) + \left(\mu - \alpha\right)\left(\gamma'_{zr}, \gamma'_{rz}\right), \\
&\left(\mu'_{r\theta}, \mu'_{\theta r}\right) = \left(\gamma + \varepsilon\right)\left(\kappa'_{r\theta}, \kappa'_{\theta r}\right) + \left(\gamma - \varepsilon\right)\left(\kappa'_{\theta r}, \kappa'_{r\theta}\right), \\
&\mu'_{z\theta} = \left(\gamma + \varepsilon\right)\kappa'_{z\theta} \ , \quad \mu'_{\theta z} = \frac{\gamma - \varepsilon}{\gamma + \varepsilon}\mu'_{z\theta} \ ,
\end{aligned} \tag{4.19}$$

حيث: $e' = \gamma'_{rr} + \gamma'_{\theta\theta} + \gamma'_{zz}$ ،

إلى المعادلات والعلاقات المتممة السابقة نضيف الشروط الحدية والابتدائية، الزائدة، التالية، الناتجة عن الشروط الحدية والابتدائية، الأصلية (3.10) و (3.11):

الشروط الحدية، الزائدة، المحققة على $\partial\Omega \times T$:

$$\begin{aligned}
&n_r \sigma'_{rr} + n_z \sigma'_{zr} = 0 \ , n_r \sigma'_{rz} + n_z \sigma'_{zz} = 0 \ , \\
&n_r \mu'_{r\theta} + n_z \mu'_{z\theta} = m_\theta - m^0_\theta \ ,
\end{aligned} \tag{4.20}$$

الشروط الابتدائية المتممة (أو الزائدة)، التالية ، المحققة في $\Omega \times \{0\}$:

$$u'_r = 0 \ , \ \varphi'_\theta = f_\theta - \varphi^0_\theta \ , \ u'_z = 0 \ , \tag{4.21}$$

$$\dot{u}'_r = 0 \ , \ \dot{\varphi}'_\theta = g_\theta - \dot{\varphi}^0_\theta \ , \ \dot{u}'_z = 0 \ , \tag{4.22}$$

تسمى المسألة (4.22)-(4.14) بمسألة القيم الحدية والابتدائية المتممة (أو الزائدة) لأجل الوصف التقليدي (العام) للجسم الصلب المرن (E-N:5)، في إطار حالة التناظر المحوري الأولى للانفعالات المرنة لهذا الجسم.

<u>ألية حل المسألة:</u>

1- بحل مسألة القيم الحدية والابتدائية الكلاسيكية (4.10)-(4.2)، نحصل على المقاطع التسورية، الكلاسيكية: $(\mathbf{u}^0, \boldsymbol{\varphi}^0, \boldsymbol{\sigma}^0, \boldsymbol{\mu}^0, \boldsymbol{\varepsilon}^0, \boldsymbol{\kappa}^0)$.

2- نحل مسألة القيم الحدية والإبتدائية المتممة (الزائدة) (4.22)-(4.14) ، فنحصل على المقاطع التنسورية المتممة (الزائدة) $(\mathbf{u}', \boldsymbol{\varphi}', \boldsymbol{\sigma}', \boldsymbol{\mu}', \boldsymbol{\gamma}', \boldsymbol{\kappa}')$.

3- أخيراً إذا عوضنا ما حصلنا عليه في العلاقات (4.1)، نحصل على الحل النهائي: $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\kappa})$ لمسألة الوصف التقليدي (العام) (3.11)-(3.1).

5. النتائج والمقترحات :

أولاً: النتائج:

في هذا البحث عممنا طريقة التراكيب المعتمدة على متجه تشيفر إلى مسألة الوصف التقليدي (العام) للجسم الصلب المرن (E-N:5) في حالة التناظر المحوري الثانية للانفعالات المرنة لهذا الجسم ، من خلال كتابة مسألة الوصف التقليدي (العام) ، الأساسية على شكل مجموع مسألتين؛ الأولى أسهل من حيث المعادلات الاشتقاقية وتتعلق بجسم هوك، والثانية أسهل من حيث الشروط الحدية والابتدائية، ذات منشأ القوة، والتي تكون متجانسة، وتتعلق بالجسم معتبر البنية الجزيئية.

ثانياً: المقترحات:

في نهاية هذا البحث نوصي بمناقشة المسائل الأتية:

مسألة1: تعميم طريقة التراكيب القائمة على متجه تشيفر إلى الطريقة القائمة على تنسور تشيفر بحيث تشمل وصف إغناتشاك الإجهادي للجسم (E-N:5) ضمن حالة التناظر المحوري الأولى لانفعالاته المرنة.

مسألة2: مناقشة طريقة التراكيب المعتمدة على تنسور تشيفر بحيث تشمل وصف إغناتشاك بالإجهادات للجسم (E-N:5) ضمن حالة التناظر المحوري الثانية لانفعالاته المرنة.

المراجع

[1]-Dyszlewicz , J , **1980-** *Selected boundary problems of equations for the plane problems in micropolar theory of elasticity*, Stud. Geotech. et. mech., I-1980, 2 **,** 3 , 5-20 ; II-1980 ,2 , 4 , 21-36.

[2]–Dyszlewicz , J ,**1996** - *Selected problems of linear asymmetrical thermoelasticity*, Journal of Thermal Stresesses,19, 185-206.

[3]- Dyszlewicz , J, **2004** - Micropolar Theory of Elasticity , in : Series Lectures. Notes in Applied and Computational Mechanics, Vol.15, 356 p, Springer .

[4]–*Dyszlewicz , J ,**1997** -* *Stress equations of motion of Ignaczak type for the second axisymmetric problem of micropolar elastodynamics, Applicationes Mathematicae, 24,3 (1997), pp. 251–265.*

[5] – Eringen , A . C , **1966** - *Linear theory of micropolar elasticity*, J.Math. Mech., 15 , 909 – 930.

[6] –Nowacki, W , **1986** - Theory of Asymmetric Elasticity , Warsaw , PWN.

[7]– W. Nowocki , (**1970**), Theory of Elasticity , PWN Warsaw.