دراسة قابلية مفاضلة ونظامية الدوال الأساسية فوق العقدية

وداد غزوان المعصراني[1]
جامعة البعث – كلية العلوم – قسم الرياضيات
د. محمد شراباتي[2]
د. باسل العرنوس[3]

ملخَّص البحث:

تمَّت في هذا البحث دراسة تعريفين مختلفين لقابلية المفاضلة فوق العقدية مع الأمثلة على كلّ منهما، واستنتاج أنَّ كثيرات الحدود فوق العقدية هي دوال قابلة للمفاضلة وفق أحد هذين التعريفين في حين أنَّها ليست كذلك بالنسبة للتعريف الآخر. كما درسنا شرط نظامية الدوال حسب مفهومي فيوتر وكولين. وأثبتنا أنَّ الدوال المتسامية فوق العقدية غير نظامية حسب فيوتر، وذلك من خلال تطبيق مؤثر كوشي–ريمان–فيوتر عليها.

الكلمات المفتاحية:

قابلية المفاضلة فوق العقدية – كثيرات الحدود فوق العقدية – الدالة الأسية الطبيعية فوق العقدية – الدالة اللوغاريتمية الطبيعية فوق العقدية – دالة الجيب المثلثي فوق العقدية – دالة جيب التمام المثلثي فوق العقدية – مؤثر كوشي–ريمان–فيوتر – الدوال النظامية فوق العقدية.

[1] طالبة ماجستير – جامعة البعث – كلية العلوم – قسم الرياضيات
[2] عضو هيئة تدريسية – جامعة البعث – كلية العلوم – قسم الرياضيات
[3] عضو هيئة تدريسية – جامعة البعث – كلية العلوم – قسم الرياضيات

A study of differentiability and regularity of the basic quaternion functions

Wedad Ghazwan Almaasarani[4]
Dr. Mohamad Charabati[5]
Dr. Basel Alarnous[6]
Albaath University - Faculty of Science - Mathematics Department

Abstract:
In this research, two different definitions of quaternionic differentiability have been studied with examples of each, and it is concluded that quaternion polynomials are differentiable functions according to one of these two definitions, while they are not for the other definition. We also studied the condition of the regularity of functions according to the concepts of Feuter and Cullen. We proved that the exponential, logarithmic, trigonometric sine and cosine functions are irregular according to Feuter, by applying the Cauchy-Riemann- Feuter operator to them.

Key words:
Quaternionic differentiability, Quaternion polynomials، Quaternion natural exponential function, Quaternion natural logarithm function, Quaternion trigonometric sign function, Quaternion trigonometric cosine function, Cauchy-Riemann-Feuter operator, Quaternion regular function.

[4] Master student, Albaath University, Faculty of science, Department of mathematics
[5] Professor, Albaath University, Faculty of science, Department of mathematics
[6] Professor, Albaath University, Faculty of science, department of mathematics

1. مقدّمة

تمَّ اكتشاف الأعداد فوق العقدية في السادس عشر من تشرين الأول في عام 1843 على يد العالم الأيرلندي ويليام رُوان هاملتون William Rowan Hamilton (1805–1865). كان هدفه الأساسي إنشاء نوع من الأعداد فوق العقدية مرتبطة بالفضاء ثلاثي الأبعاد بالطريقة نفسها التي ترتبط بها الأعداد العقدية بالمستوي. لقد كان تخمينه الأوَّلي عن الأعداد العقدية أنّها تحتاج جزءاً تخيّلياً إضافياً، أي تصبح بجزء حقيقي واحد وجزئين تخيّليين مختلفين.

بعد ما يقارب عشرة أعوام من البحث غير الناجح عن تمديد ثلاثي الأبعاد للأعداد العقدية، خطر في بال هاملتون أنه بدلاً من الجزأين التخيّليين، سيفترض وجود ثلاثة أجزاء تخيّلية.

اندهش هاملتون من اكتشافه، فقام بنحت الصيغ الشهيرة الخاصَّة بالأعداد فوق العقدية على حجر من جسر بروم Broome Bridge باستخدام الرموز i, j, k:

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$$

وهكذا وُلِدت الأعداد فوق العقدية. ماتخيّله هاملتون كان عدداً له مركّبة حقيقية واحدة وثلاث مركبات تخيّلية مختلفة، بحيث يكون مربّع كل مركّبة تخيّلية يساوي -1. يُرمز لمجموعة كل الأعداد فوق العقدية بـ □، تكريماً لمكتشفها. [1]

في هذا البحث سنهتم بدراسة الدوال التي متغيراتها أعداد فوق عقدية.

إن قوة نظرية الدوال فوق الحقل العقدي تجعل من الطبيعي أن نبحث عن نظرية مشابهة لجبر القسمة التجميعي الحقيقي غير التافه الوحيد، والذي هو مجموعة الأعداد فوق العقدية. مثل هذه النظرية موجود، ولكن يبدو أنها غير معروفة كثيراً. حيث إنه لم يتم تطويرها إلا بعد قرابة القرن من اكتشاف هاملتون للأعداد فوق العقدية. حاول هاملتون وأتباعه، تايت Tait [6] وجولي Joly [7] تطوير نظرية الدوال بمتغير فوق عقدي باتباع الأساليب العامة المستخدمة في نظرية الدوال بعدة متغيرات حقيقية. كما أنهم لم يحددوا

صفّاً خاصّاً للدوال النظامية من بين الدوال ذات القيمة فوق العقدية بمتغير فوق عقدي، كما هو الحال مع الدوال النظامية بمتغير عقدي.
قد يكون هذا بسبب أن أياً من التعريفين الأساسيين للدوال النظامية بمتغير عقدي لا يمتلك نتائج مثيرة للاهتمام عندما نطبقه على الأعداد فوق العقدية.
حيث توصلوا إلى أن دوال المتغير فوق العقدي والتي تمتلك مشتقات فوق عقدية هي عبارة عن دوال ثابتة وخطية (وليس جميعها)، حيث إن الدوال التي يمكن تمثيلها بمتسلسلة قوى فوق عقدية هي فقط الدوال التي يمكن تمثيلها بمتسلسلة قوى بأربع متغيرات حقيقية.
في عام 1935، اقترح فيوتر [8] تعريفاً للدوال فوق العقدية النظامية عن طريق ما يشبه معادلات كوشي–ريمان. وقد أوضح أن هذا التعريف يقود إلى تعريف قريب جداً من نظرية كوشي، وصيغة كوشي التكاملية ونشر لورنت [9]. في الاثني عشر عاماً التالية، طور فيوتر ومعاونوه نظرية التحليل فوق العقدي. كما يمكننا العودة إلى المرجع الكامل لهذا العمل في [10]، ويوجد وصف بسيط للأجزاء الأولية من النظرية في [11]. [5]

2. هدف البحث

دراسة تعريفين مختلفين لقابلية المفاضلة فوق العقدية مع الأمثلة عليهما. وإثبات أن كثيرات الحدود فوق العقدية هي دوال قابلة للمفاضلة وفق أحد هذين التعريفين. بالإضافة لدراسة نظامية بعض الدوال مثل الدوال الأسية واللوغاريتمية والجيب المثلثي وجيب التمام المثلثي وإثبات أنها دوال غير نظامية حسب مفهوم فيوتر وذلك باستخدام مؤثر كوشي–ريمان–فيوتر عليها.

3. مواد البحث

1.3. بعض التعاريف الهامة [1]

تعريف1 قاعدة هاملتون

إنَّ قاعدة هاملتون هي:

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$$

ويمكن كتابتها بالشكل:

$$ij = k = -ji, \qquad jk = i = -kj, \qquad ki = j = -ik \qquad (1)$$

حيث إنَّ العناصر i, j, k تتبادل تخالفياً مثنى مثنى.

كما يمكننا استخدام تمثيل آخر للأعداد فوق العقدية من الناحية الهندسية، حيث يرتبط العدد فوق العقدي:

$$p = a + bi + cj + dk$$

برباعية مرتَّبة من الأعداد الحقيقية (a, b, c, d). بدايةً يجب مطابقة عناصر قاعدة الفضاء $\mathbb{R}^4$، والتي هي $(1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1)$ مع عناصر قاعدة الفضاء □، والتي هي $1, i, j, k$ على الترتيب. سنستخدم هنا الرمز نفسه لتمثيل نقطة في $\mathbb{R}^4$ أو لتمثيل العدد فوق العقدي المقابل لها.

تعريف2 الجزأين السلمي والمتجهي للعدد فوق العقدي

يمكن تبديل الصيغة $p = a + ib + jc + kd$ بالصيغة $p = a + bi + cj + dk$. يسمّى الجزء الحقيقي $p_0 := a$ من p بالجزء السلّمي لـ p ويُرمز له بـ $\mathrm{Sc}(p)$، ويسمّى $\mathbf{p} := bi + cj + dk$ بالجزء المتّجهي لـ p ويُرمز له بـ $\mathrm{Vec}(p)$.

إن الأعداد الحقيقية هي في الواقع أعداد فوق عقدية ذات جزء متّجهي معدوم. وأيضاً إذا كان $p = \mathbf{p}$ فإننا نسمّي p عدداً فوق عقدي صرف، مثل العدد $p = j + k$. إذا كان p_1 و p_2 عددين فوق عقديين، فإنَّه بشكلٍ عام لا يمكن تعريف المتراجحة $p_1 \leq p_2$ إلّا إذا كان p_1 و p_2 عددين حقيقين. كما أنّه لايمكننا أن نقول عن الأعداد فوق العقدية إنّها موجبة أو سالبة، إلّا إذا كنّا نتعامل مع أعداد حقيقية.

تعريف3 العددان فوق العقديين المتساويان

يكون العددان فوق العقديين $p = a_1 + b_1i + c_1j + d_1k$ و $q = a_2 + b_2i + c_2j + d_2k$ متساويين، إذا تساوت المركّبات المتقابلة، أي $a_1 = a_2$ و $b_1 = b_2$ و $c_1 = c_2$ و $d_1 = d_2$. وهذا يعني أنّ $p = q$ إذا كان $p_0 = q_0$ و $\mathbf{p} = \mathbf{q}$.

تعريف4 العمليات الحسابية على الأعداد فوق العقدية

إنّ الأعداد فوق العقدية تقبل الجمع والطرح والضرب. فإذا كان لدينا العددان $p = a_1 + b_1i + c_1j + d_1k$ و $q = a_2 + b_2i + c_2j + d_2k$ و λ عدد حقيقي، فإنّنا نُعرّف هذه العمليات الحسابية بالشكل الآتي:

(i) الجمع

$$p + q := (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i + (c_1 + c_2)j + (d_1 + d_2)k$$

(ii) الطرح

$$p - q := (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i + (c_1 - c_2)j + (d_1 - d_2)k$$

(iii) الضرب بعدد حقيقي

$$\lambda p := (\lambda a_1) + (\lambda b_1)i + (\lambda c_1)j + (\lambda d_1)k$$

(iv) الضرب فوق العقدي

$$\begin{aligned} pq := (a_1a_2 - b_1b_2 - c_1c_2 - d_1d_2) \\ + (a_1b_2 + b_1a_2 + c_1d_2 - d_1c_2)i \\ +(a_1c_2 - b_1d_2 + c_1a_2 + d_1b_2)j \\ + (a_1d_2 + b_1c_2 - c_1b_2 + d_1a_2)k \end{aligned}$$

يوجد عدّة طرق لكتابة القاعدة الأخيرة، فمثلاً يمكننا استخدام توزيع الضرب على الجمع من اليسار، وعندئذ سيصبح الضرب فوق العقدي بالشكل:

$$\begin{aligned} pq := (a_1 + b_1i + c_1j + d_1k)(a_2 + b_2i + c_2j \\ + d_2k) \\ = a_1a_2 + a_1b_2i + a_1c_2j + a_1d_2k + b_1a_2i + b_1b_2i^2 + b_1c_2ij \\ + b_1d_2ik \end{aligned}$$

$$+c_1a_2j + c_1b_2ji + c_1c_2j^2 + c_1d_2jk + d_1a_2k + d_1b_2ki + d_1c_2kj$$
$$+d_1d_2k^2.$$

عند تبسيط العلاقة السابقة يجب مراعاة أنَّ الضرب تبديلي من أجل الأعداد الحقيقية، إلّا أنه ليس كذلك بالنسبة للأعداد فوق العقدية. والآن باستخدام الخصائص الأساسية والمطابقات (1)، نستطيع كتابة عملية الضرب بالشكل الآتي:

$$pq = a_1a_2 + a_1b_2i + a_1c_2j + a_1d_2k + b_1a_2i - b_1b_2 + b_1c_2k - b_1d_2j$$
$$+c_1a_2j - c_1b_2k - c_1c_2 + c_1d_2i + d_1a_2k + d_1b_2j - d_1c_2i - d_1d_2$$

بتجميع الحدود بالنسبة للوحدات التخيلية، نحصل على قاعدة الضرب فوق العقدي.

إذا أخذنا القواعد السابقة كتعاريف للجمع والضرب، سيكون من السهل التحقّق من أن خاصَّتي التجميع وتوزيع الضرب على الجمع محقّقتان بالنسبة للأعداد فوق العقدية:

(v) الخاصَّة التبديلية للجمع

$$p + q = q + p \;\; ; \;\; \forall\, p, q \in \mathbb{H}$$

(vi) الخاصَّة التجميعية للجمع

$$p + (q + r) = (p + q) + r \;\; ; \;\; \forall\, p, q, r \in \mathbb{H}$$

(vii) توزيع الضرب على الجمع

$$p(q + r) = pq + pr \;,\;\; (q + r)p = qp + rp \;\; ; \;\; \forall\, p, q, r \in \mathbb{H}$$

(viii) الخاصَّة التجميعية للضرب

$$(pq)r = p(qr) \;\; ; \;\; \forall\, p, q, r \in \mathbb{H}$$

على الرغم من أن الجمع تبديلي، إلّا أنَّ الضرب غير كذلك، فمثلاً، $ij = k$ بينما $ji = -k$. ولذلك في الحالة العامّة، pq لايساوي qp.

تعريف5 حيادي الجمع وحيادي الضرب

من الواضح أنَّ العدد فوق العقدي $0_{\mathbb{H}} := 0 + 0i + 0j + 0k$ هو العنصر الحيادي بالنسبة للجمع، ويسمّى حيادي الجمع. والعدد فوق العقدي $1_{\mathbb{H}} := 1 + oi + oj + ok$ هو حيادي الضرب. هذا يعني أنّ أيّ عدد فوق عقدي يُجمَع لـ $0_{\mathbb{H}}$ أو يُضرَب بـ $1_{\mathbb{H}}$ سيبقى كما هو. يمكننا من خلال ذلك تعريف النظير الجمعي للعدد p على أنّه $-p$. أمّا النظير الضربي فيحتاج مزيداً من التفصيل. حيث أنَّ الأعداد فوق العقدية تشكّل جبر قسمةٍ غير تبديلي، وهو الحقل التخالفي[7] □.

تعريف6 مرافق العدد فوق العقدي

يرتبط العدد فوق العقدي $p := a + bi + cj + dk$ بالعدد $\overline{p} := p_0 - \mathbf{p} = a - bi - cj - dk$، من خلال عكس إشارات الجزء المتّجهي لـ p، نسمّي العدد $\overline{p}$ مرافق العدد فوق العقدي p.

خواص دالة المرافق:

من أجل كلّ $p, q \in \mathbb{H}$ و $\lambda \in \mathbb{R}$، تمتلك الدالة $p \mapsto \overline{p}$ الخصائص الآتية:

(i) $\overline{p \pm q} = \overline{p} \pm \overline{q}$

(ii) $\overline{\overline{p}} = p$

(iii) $\overline{\lambda p} = \lambda \overline{p}$

(iv) $\overline{pq} = \overline{q}\,\overline{p}$

(v) $p \in \mathbb{R} \Leftrightarrow p = \overline{p}$

(vi) p عدد فوق عقدي صرف إذا وفقط إذا كان $p = -\overline{p}$.

نلاحظ من تعريف جمع وضرب الأعداد فوق العقدية أنَّ جمع أو ضرب عدد فوق عقدي بمرافقه هو عدد حقيقي، فإذا كان $p = a + bi + cj + dk$ فإن:

$$p + \overline{p} = (a + bi + cj + dk) + (a - bi - cj - dk) = 2a$$

[7] الحقل التخالفي هو بنية جبرية تحقّق جميع خواص الحقل ماعدا الخاصّية التبديلية.

$$p\,\overline{p} = (a + bi + cj + dk)\,(a - bi - cj - dk) = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$$

كما أنَّ الفرق بين العدد فوق العقدي ومرافقه هو عدد فوق عقدي صرف:

$$\begin{aligned} p - \overline{p} &= (a + bi + cj + dk) - (a - bi - cj - dk) \\ &= 2bi + 2cj + 2dk \end{aligned}$$

يمكن تعميم الخاصّتين الأولى والرابعة إلى ثلاثة أعداد فوق عقدية أو أكثر، أي أنّ:

$$\overline{p_1 \pm p_2 \pm \cdots \pm p_n} = \overline{p_1} \pm \overline{p_2} \pm \cdots \pm \overline{p_n}$$

وأيضاً $\overline{p_1 p_2 p_3} = \overline{p_3}\,\overline{p_2}\,\overline{p_1}$، وبشكلٍ عام:

$$\overline{p_1 p_2 \dots p_{n-1} p_n} = \overline{p_n}\,\overline{p_{n-1}} \dots \overline{p_2}\,\overline{p_1}$$

الخلاصة: إن مرافق مجموع (فرق) أعداد فوق عقدية هو مجموع (فرق) مرافقات هذه الأعداد. وأيضاً مرافق جداء أعداد فوق عقدية هو جداء مرافقات هذه الأعداد ولكن بترتيبٍ معاكسٍ.

تعريف7 طويلة العدد فوق العقدي

يرتبط بكلّ عددٍ فوق عقدي عددٌ حقيقي غير سالب، والذي سنعرّفه بأنّه القيمة المطلقة أو طويلة العدد فوق العقدي $p = a + bi + cj + dk$ ونرمُز له بـ $|p|$ وهذا الرمز مطابق لرمز الطول الإقليدي في $\mathbb{R}^4$، وبالتالي طويلة العدد p تمثّل المسافة بين نقطة الأصل و النقطة (a, b, c, d). تعطى طويلة العدد p بالشكل:

$$p \coloneqq \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}$$

إذا كان $|p| = 1$ فإننا نسمّي العدد p عدداً فوق عقدي واحديّ.

تعريف8 المعكوس الضربي للعدد فوق العقدي

هو العدد فوق العقدي الذي ناتج ضربه بـ p من اليمين أو من اليسار هو $1_{\mathbb{H}}$. أي أنه من أجل $p \neq 0_{\mathbb{H}}$ يوجد عدد فوق عقدي وحيد p^{-1} يحقّق:

$$pp^{-1} = p^{-1}p = 1_{\mathbb{H}}$$

إن المعكوس الضربي للعدد فوق العقدي الواحديّ هو مرافقه.

خواصّ الطويلة والمعكوس الضربي:

(i) $p\overline{p} = \overline{p}p = |p|^2$

(ii) $p^{-1} = \frac{\overline{p}}{|p|^2} \quad , \quad p \neq 0_{\mathbb{H}}$

(iii) $|pq| = |p||q|$

(iv) $|\overline{p}| = |-p| = |p|$

(v) $(pq)^{-1} = q^{-1}p^{-1} \quad , \quad pq \neq 0_{\mathbb{H}}$

تعريف9 قسمة الأعداد فوق العقدية

تتعلّق القسمة بمفهوم المعكوس الضربي للأعداد فوق العقدية، ونظراً لأنّ الضرب غير تبديلي، فإنَّه يمكننا أن نعرّف قسمة عددين فوق عقديين p و q بطريقتين. إمَّا pq^{-1} أو $q^{-1}p$. ولذلك لن نستطيع استخدام الرمز $\frac{p}{q}$ لأنَّه لن يحدّد فيما إذا كنّا نقسّم على q من اليمين أو من اليسار. لذلك نكتب $pq^{-1} = \frac{p\overline{q}}{|q|^2}$ وتسمّى قسمة من اليمين، و $q^{-1}p = \frac{\overline{q}p}{|q|^2}$ وتسمّى قسمة من اليسار. من المهم أن نلاحظ أنه إذا كان p و q عددين فوق عقديين صرفين، عندئذ pq^{-1} هو مرافق $q^{-1}p$.

تعريف10 إشارة العدد فوق العقدي

إنَّ إشارة العدد فوق العقدي تعطينا عدداً فوق عقدي واحدي، ونرمز لها بـ $\mathrm{sgn}(p)$ وتعطى بالشكل:

$$\mathrm{sgn}(p) = \frac{p}{|p|}$$

تعريف11 الدالة الأسية الطبيعية فوق العقدية

تعرف الدالة الأسية الطبيعية فوق العقدية بالشكل:

$$e^{p} := e^{p_0}(\cos|\mathbf{p}| + \mathrm{sgn}(\mathbf{p})\sin|\mathbf{p}|)$$

حيث العدد e ثابت رياضي وهو أساس اللوغاريتم الطبيعي ويعرف باسم عدد أويلر $.e=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$

تعريف12 الدالة اللوغاريتمية الطبيعية فوق العقدية

تعرف الدالة اللوغاريتمية الطبيعية فوق العقدية بالشكل:

$$\ln(p) := \ln|p| + \mathrm{sgn}(\mathbf{p})\arg(p)$$

تعريف13 دالة الجيب المثلثي فوق العقدية

تُعرَّف دالة الجيب المثلثي بالشكل الآتي:

$$\sin(p) := \begin{cases} -\frac{1}{2}\mathrm{sgn}(\mathbf{p})\left(e^{p\mathrm{sgn}(\mathbf{p})} - e^{-p\mathrm{sgn}(\mathbf{p})}\right) & ,|\mathbf{p}| \neq 0 \\ \sin(p_0) & ,|\mathbf{p}| = 0 \end{cases}$$

تعريف14 دالة جيب التمام المثلثي فوق العقدية

تُعرَّف دالة جيب التمام المثلثي بالشكل الآتي:

$$\cos(p) := \begin{cases} \frac{1}{2}\left(e^{p\mathrm{sgn}(\mathbf{p})} + e^{-p\mathrm{sgn}(\mathbf{p})}\right) & ,|\mathbf{p}| \neq 0 \\ \cos(p_0) & ,|\mathbf{p}| = 0 \end{cases}$$

2.3. دراسة قابلية المفاضلة فوق العقدية

منذ بداية القرن الماضي، كانت هناك محاولاتٌ عديدةٌ لتعريف فئة من الدوال ذات القيمة فوق العقدية بمتغير فوق عقدي واحد تلعب الدور نفسه الذي تلعبه الدوال الهولومورفية بمتغير عقدي واحد.

إن التعريف القياسي للمشتق يتطلب دراسة سلوك المقدار $h^{-1}[g(x+h)-g(x)]$، حيث $g:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$،

عندما $h\to 0$. وكما نعلم أن الضرب تبديلي في $\mathbb{C}$، أي أن:

$$h^{-1}[g(x+h)-g(x)] = [g(x+h)-g(x)]h^{-1}$$

وبالتالي يمكننا إيجاد $\grave{g}$ بسهولة ودون أي التباس. أما بالنسبة للدالة $g:\mathbb{H}\to\mathbb{H}$، فإن العلاقة

السابقة ليس بالضرورة أن تكون محققة من أجل أي $h \in \mathbb{H}$، لأنه كما نعلم الضرب غير تبديلي في $\mathbb{H}$.

ولمعالجة ذلك فإننا سندرس نهايتين، الأولى من اليسار والأخرى من اليمين، ومن ثم نعرف قابلية المفاضلة من جانبٍ واحدٍ. [2]

تعريف15 قابلية المفاضلة فوق العقدية من جانب واحدٍ [2]

لتكن $f: \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ دالة ذات قيمة فوق عقدية بمتغيرٍ فوق عقدي، عندئذٍ:

1. يقال عن f إنها قابلة للمفاضلة فوق العقدية من اليسار إذا وجدت النهاية:
$$\lim_{h\to 0}\{h^{-1}[f(q+h)-f(q)]\}$$
وعندئذٍ نرمز لهذه النهاية بـ $df_l \,/\, dq$ أو $\grave{f}_l$.
2. يقال عن f إنها قابلة للمفاضلة فوق العقدية من اليمين إذا وجدت النهاية:
$$\lim_{h\to 0}\{[f(q+h)-f(q)]h^{-1}\}$$
وعندئذٍ نرمز لهذه النهاية بـ $df_r \,/\, dq$ أو $\grave{f}_r$.

مثال1 [2]

التطبيق المطابق $\mathrm{I}_{\mathbb{H}}: q \to q$ هو دالة قابلة للمفاضلة فوق العقدية من اليسار:

حيث لدينا $\mathrm{I}_{\mathbb{H}}(q) = q$ و $\mathrm{I}_{\mathbb{H}}(q+h) = q+h$ وبالتالي:
$$\lim_{h\to 0} h^{-1}[\mathrm{I}_{\mathbb{H}}(q+h)-\mathrm{I}_{\mathbb{H}}(q)] = \lim_{h\to 0} h^{-1}(q+h-q) = \lim_{h\to 0} h^{-1}h = 1$$

أي أنَّ $d(\mathrm{I}_{\mathbb{H}})_l/dq = 1$ أو $(\mathrm{I}_{\mathbb{H}})\grave{}_l = 1$.

وبالمثل نجد أن التطبيق المطابق قابل للمفاضلة فوق العقدية من اليمين ويكون $d(\mathrm{I}_{\mathbb{H}})_r/dq = 1$ أو $(\mathrm{I}_{\mathbb{H}})\grave{}_r = 1$.

مثال2 [2]

لتكن الدالة $f(q) = q^2$. ولنرى فيما إذا كانت قابلة للمفاضلة أم لا.

لنحسب أولاً:
$$f(q+h) = (q+h)^2 = (q+h)(q+h) = q^2 + qh + hq + h^2$$

حيث هنا ترتيب المضاريب هام.

وبالتالي:

$$h^{-1}[f(q+h)-f(q)] = h^{-1}(q^2+qh+hq+h^2-q^2)$$
$$= h^{-1}(qh+hq+h^2) = h^{-1}qh+q+h$$

ولأن $\mathbb{H}$ غير تبديلي، فإنه لا يمكننا اختصار المقدار السابق أكثر من ذلك.

نلاحظ أن $\lim_{h\to 0}\{h^{-1}[f(q+h)-f(q)]\}$ غير موجودة.

وسنحصل على النتيجة نفسها إذا درسنا قابلية المفاضلة من اليمين.

مبرهنة1 [2]

لتكن الدالة f معرفة وقابلة للمفاضلة فوق العقدية من اليسار على المجموعة المفتوحة والمتصلة $U \subset \mathbb{H}$. عندئذٍ فإن f تمتلك الشكل الآتي على U:

$$f(q) = a + qb \quad ; \quad a, b \in \mathbb{H}, \;\; q = x_0 + ix_1 + jx_2 + kx_3$$

إذاً أشكال الدوال التي تكون قابلة للمفاضلة حسب التعريف السابق هي:

$$f(q) = a + qb \, ; a, b \in \mathbb{H}$$

حيث $q = x_0 + ix_1 + jx_2 + kx_3$.

فمثلاً، إذا درسنا الدالة $f(q) = (x_0 + ix_1)^2$:

$$f(q) = (x_0+ix_1)^2 = (x_0+ix_1)(x_0+ix_1)$$
$$= {x_0}^2 + ix_0x_1 + ix_0x_2 - {x_1}^2$$
$$= {x_0}^2 + 2ix_0x_1 - {x_1}^2 = \underbrace{{x_0}^2 - {x_1}^2}_{a} + 2\underbrace{i}_{q}\,\underbrace{x_0x_2}_{b}$$

نجد أنَّ هذه الدالة تنتمي لأسرة الدوال القابلة للمفاضلة.

نتيجة1: الدوال الأسية واللوغاريتمية والمثلثية غير قابلة للمفاضلة حسب التعريف السابق.

تعريف16 تعريف آخر لقابلية المفاضلة فوق العقدية

تكون الدالة $f: \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ قابلة للمفاضلة فوق العقدية إذا تحقق:

$$\left[\partial_{x_0} + \frac{ix_1 + jx_2 + kx_3}{{x_1}^2 + {x_2}^2 + {x_3}^2}\left(x_1\partial_{x_1} + x_2\partial_{x_2} + x_3\partial_{x_3}\right)\right] f(q) = 0$$

حيث $q = x_0 + ix_1 + jx_2 + kx_3$.

مثال3

لندرس الدالة $f(q) = q$:

$$\left[\partial_{x_0} + \frac{ix_1 + jx_2 + kx_3}{{x_1}^2 + {x_2}^2 + {x_3}^2}\left(x_1\partial_{x_1} + x_2\partial_{x_2} + x_3\partial_{x_3}\right)\right] q$$

$$= \left[\partial_{x_0} + \frac{ix_1 + jx_2 + kx_3}{{x_1}^2 + {x_2}^2 + {x_3}^2}\left(x_1\partial_{x_1} + x_2\partial_{x_2} + x_3\partial_{x_3}\right)\right] (x_0 + ix_1 + jx_2 + kx_3)$$

$$= 1 + \frac{ix_1 + jx_2 + kx_3}{{x_1}^2 + {x_2}^2 + {x_3}^2} ix_1 + \frac{ix_1 + jx_2 + kx_3}{{x_1}^2 + {x_2}^2 + {x_3}^2} jx_2 + \frac{ix_1 + jx_2 + kx_3}{{x_1}^2 + {x_2}^2 + {x_3}^2} kx_3$$

$$= 1 + \frac{ix_1 + jx_2 + kx_3}{{x_1}^2 + {x_2}^2 + {x_3}^2}(ix_1 + jx_2 + kx_3)$$

$$= 1 + \frac{(ix_1 + jx_2 + kx_3)^2}{{x_1}^2 + {x_2}^2 + {x_3}^2} = 1 + \frac{\mathbf{q}^2}{|\mathbf{q}|^2}$$

$$= 1 + (-1) = 0$$

وبالتالي الدالة $f(q) = q$ قابلة للمفاضلة.

نتيجة2: إن ضرب ثابت فوق عقدي من اليسار بدالة قابلة للمفاضلة فوق العقدية لا يعطينا بالضرورة دالة قابلة للمفاضلة فوق عقدية، والمثال الآتي يثبت ذلك:

$$iq = i(x_0 + ix_1 + jx_2 + kx_3) = -x_1 + ix_0 - jx_3 + kx_2$$

وبتطبيق المؤثر السابق عليه نجد أن:

$$\mathcal{L}(iq) = \left[\partial_{x_0} + \frac{ix_1 + jx_2 + kx_3}{{x_1}^2 + {x_2}^2 + {x_3}^2}\left(x_1\partial_{x_1} + x_2\partial_{x_2} + x_3\partial_{x_3}\right)\right] (-x_1 + ix_0 - jx_3 + kx_2)$$

$$= i + \frac{ix_1 + jx_2 + kx_3}{{x_1}^2 + {x_2}^2 + {x_3}^2}\left((-x_1 - x_3 j + x_2 k)\right)$$

$$= i + \frac{-i({x_1}^2 - {x_2}^2 - {x_3}^2) - 2jx_1x_2 - 2kx_1x_3}{{x_1}^2 + {x_2}^2 + {x_3}^2}$$

$$= \frac{i({x_1}^2 + {x_2}^2 + {x_3}^2) - i({x_1}^2 - {x_2}^2 - {x_3}^2) - 2jx_1x_2 - 2kx_1x_3}{{x_1}^2 + {x_2}^2 + {x_3}^2}$$

$$= \frac{2i({x_2}^2 + {x_3}^2) - 2jx_1x_2 - 2kx_1x_3}{{x_1}^2 + {x_2}^2 + {x_3}^2} \neq 0$$

وبالتالي الدالة $f(q) = iq$ غير قابلة للمفاضلة.

مثال4

لنرى الدالة $f(q) = q^2$ فيما إذا كانت قابلة للمفاضلة وفق التعريف السابق:

$$\left[\partial_{x_0} + \frac{ix_1 + jx_2 + kx_3}{{x_1}^2 + {x_2}^2 + {x_3}^2}\left(x_1\partial_{x_1} + x_2\partial_{x_2} + x_3\partial_{x_3}\right)\right] q^2$$

$$= \left[\partial_{x_0} + \frac{ix_1 + jx_2 + kx_3}{{x_1}^2 + {x_2}^2 + {x_3}^2}\left(x_1\partial_{x_1} + x_2\partial_{x_2} + x_3\partial_{x_3}\right)\right]({x_0}^2 - {x_1}^2 - {x_2}^2 - {x_3}^2 + 2ix_0x_1 + 2jx_0x_2 + 2kx_0x_3)$$

$$= 2x_0 - 2\frac{ix_1 + jx_2 + kx_3}{{x_1}^2 + {x_2}^2 + {x_3}^2}{x_1}^2 - 2\frac{ix_1 + jx_2 + kx_3}{{x_1}^2 + {x_2}^2 + {x_3}^2}{x_2}^2 - 2\frac{ix_1 + jx_2 + kx_3}{{x_1}^2 + {x_2}^2 + {x_3}^2}{x_3}^2$$

$$+2ix_1 + 2i\frac{ix_1 + jx_2 + kx_3}{{x_1}^2 + {x_2}^2 + {x_3}^2}x_0x_1 + 2jx_2 + 2j\frac{ix_1 + jx_2 + kx_3}{{x_1}^2 + {x_2}^2 + {x_3}^2}x_0x_2 + 2kx_3$$

$$+2k\frac{ix_1 + jx_2 + kx_3}{{x_1}^2 + {x_2}^2 + {x_3}^2}x_0x_3$$

$$= 2(x_0 + ix_1 + jx_2 + kx_3) - 2\frac{ix_1 + jx_2 + kx_3}{{x_1}^2 + {x_2}^2 + {x_3}^2}({x_1}^2 + {x_2}^2 + {x_3}^2)$$

$$+2\frac{ix_1+jx_2+kx_3}{{x_1}^2+{x_2}^2+{x_3}^2}x_0(ix_1+jx_2+kx_3)$$
$$=2(x_0+ix_1+jx_2+kx_3)-2(ix_1+jx_2+kx_3)+2\frac{(ix_1+jx_2+kx_3)^2}{{x_1}^2+{x_2}^2+{x_3}^2}x_0$$
$$=2(x_0+ix_1+jx_2+kx_3)-2(ix_1+jx_2+kx_3)-2x_0=0$$

وبالتالي الدالة $f(q)=q^2$ قابلة للمفاضلة حسب التعريف السابق.

نتيجة3: قاعدة اشتقاق جداء دالتين

لتكن $f(q)$ و $g(q)$ دالتين فوق عقديتين تمتلكان مشتقات جزئية حقيقية، عندئذٍ:

$$\mathcal{L}(fg)=\left[\partial_{x_0}+\frac{ix_1+jx_2+kx_3}{{x_1}^2+{x_2}^2+{x_3}^2}\left(x_1\partial_{x_1}+x_2\partial_{x_2}+x_3\partial_{x_3}\right)\right](fg)$$
$$=\partial_{x_0}(fg)+\frac{ix_1+jx_2+kx_3}{{x_1}^2+{x_2}^2+{x_3}^2}\left(x_1\partial_{x_1}(fg)+x_2\partial_{x_2}(fg)+x_3\partial_{x_3}(fg)\right)$$
$$=\left(\partial_{x_0}f\right)g+f\left(\partial_{x_0}g\right)+\frac{ix_1+jx_2+kx_3}{{x_1}^2+{x_2}^2+{x_3}^2}\{x_1[\left(\partial_{x_1}f\right)g+f\left(\partial_{x_1}g\right)]+x_2[\left(\partial_{x_2}f\right)g+f\left(\partial_{x_2}g\right)]+x_3[\left(\partial_{x_3}f\right)g+f\left(\partial_{x_3}g\right)]\}$$
$$=\left(\partial_{x_0}f\right)g+\frac{ix_1+jx_2+kx_3}{{x_1}^2+{x_2}^2+{x_3}^2}\left[x_1\left(\partial_{x_1}f\right)+x_2\left(\partial_{x_2}f\right)+x_3\left(\partial_{x_3}f\right)\right]g$$

$$+f\left(\partial_{x_0} g\right)+\frac{ix_1+jx_2+kx_3}{{x_1}^2+{x_2}^2+{x_3}^2} f\left[x_1\left(\partial_{x_1} g\right)+x_2\left(\partial_{x_2} g\right)+x_3\left(\partial_{x_3} g\right)\right]$$

$$=\mathcal{L}(f) g+f\left(\partial_{x_0} g\right)+\frac{ix_1+jx_2+kx_3}{{x_1}^2+{x_2}^2+{x_3}^2} f\left[x_1\left(\partial_{x_1} g\right)+x_2\left(\partial_{x_2} g\right)+x_3\left(\partial_{x_3} g\right)\right]$$

إذا قاعدة الاشتقاق المعروفة بأن مشتق جداء دالتين هو مشتق الدالة الأولى بالثانية + الدالة الأولى بمشتق الدالة الثانية غير محققة في التحليل فوق العقدي وبالنسبة لهذا التعريف.

سنستخدم القاعدة التي توصلنا لها في إثبات أن الدالة $f(q)=q^n$ قابلة للمفاضلة فوق العقدية.

مثال5

لنرى فيما إذا كانت الدالة $f(q)=q^n$ قابلة للمفاضلة أم لا.

باستخدام الاستقراء الرياضي:

من أجل $n=1$ لدينا $f(q)=q$ قابلة للمفاضلة. أي أن:

$$\mathcal{L}(q)=0 \Rightarrow\left[\partial_{x_0}+\frac{ix_1+jx_2+kx_3}{{x_1}^2+{x_2}^2+{x_3}^2}\left(x_1 \partial_{x_1}+x_2 \partial_{x_2}+x_3 \partial_{x_3}\right)\right] q=0$$

والآن لنفرض أن الدالة $f(q)=q^{n-1}$ قابلة للمفاضلة. أي نفرض أن:

$$\mathcal{L}\left(q^{n-1}\right)=0 \Rightarrow\left[\partial_{x_0}+\frac{ix_1+jx_2+kx_3}{{x_1}^2+{x_2}^2+{x_3}^2}\left(x_1 \partial_{x_1}+x_2 \partial_{x_2}+x_3 \partial_{x_3}\right)\right] q^{n-1}=0$$

ولنثبت أن $f(q)=q^n$ قابلة للمفاضلة. أي لنثبت أن:

$$\mathcal{L}(q^n) = 0 \Rightarrow \left[\partial_{x_0} + \frac{ix_1 + jx_2 + kx_3}{{x_1}^2 + {x_2}^2 + {x_3}^2}\left(x_1\partial_{x_1} + x_2\partial_{x_2} + x_3\partial_{x_3}\right)\right] q^n = 0 \qquad (2)$$

لدينا $q^n = qq^{n-1}$:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(q^n) &= \mathcal{L}(qq^{n-1}) \\ &= \mathcal{L}(q)q^{n-1} + q\left(\partial_{x_0} q^{n-1}\right) + \frac{ix_1 + jx_2 + kx_3}{{x_1}^2 + {x_2}^2 + {x_3}^2} q\left[x_1\left(\partial_{x_1} q^{n-1}\right) + x_2\left(\partial_{x_2} q^{n-1}\right) + x_3\left(\partial_{x_3} q^{n-1}\right)\right] \\ &= q\left(\partial_{x_0} q^{n-1}\right) + \frac{ix_1 + jx_2 + kx_3}{{x_1}^2 + {x_2}^2 + {x_3}^2}(x_0 + ix_1 + jx_2 + kx_3)\left[x_1\left(\partial_{x_1} q^{n-1}\right) + x_2\left(\partial_{x_2} q^{n-1}\right) + x_3\left(\partial_{x_3} q^{n-1}\right)\right] \\ &= q\left(\partial_{x_0} q^{n-1}\right) + \left[\frac{x_0(ix_1 + jx_2 + kx_3)}{{x_1}^2 + {x_2}^2 + {x_3}^2} - 1\right]\left[x_1\left(\partial_{x_1} q^{n-1}\right) + x_2\left(\partial_{x_2} q^{n-1}\right) + x_3\left(\partial_{x_3} q^{n-1}\right)\right]\end{aligned}$$

ولكن لدينا:

$$\left[\partial_{x_0} + \frac{ix_1 + jx_2 + kx_3}{{x_1}^2 + {x_2}^2 + {x_3}^2}\left(x_1\partial_{x_1} + x_2\partial_{x_2} + x_3\partial_{x_3}\right)\right] q^{n-1} = 0$$

$$\Rightarrow -\partial_{x_0} q^{n-1} = \left[\frac{ix_1 + jx_2 + kx_3}{{x_1}^2 + {x_2}^2 + {x_3}^2}\left(x_1\partial_{x_1} + x_2\partial_{x_2} + x_3\partial_{x_3}\right)\right] q^{n-1}$$

وبالتالي:

$$\mathcal{L}(q^n) = q\left(\partial_{x_0} q^{n-1}\right) - x_0\partial_{x_0} q^{n-1} - \left[x_1\left(\partial_{x_1} q^{n-1}\right) + x_2\left(\partial_{x_2} q^{n-1}\right) + x_3\left(\partial_{x_3} q^{n-1}\right)\right]$$

$$
\begin{aligned}
&= (ix_1 + jx_2 + kx_3)\left(\partial_{x_0} q^{n-1}\right) \\
&\qquad - \left[x_1\left(\partial_{x_1} q^{n-1}\right) + x_2\left(\partial_{x_2} q^{n-1}\right) + x_3\left(\partial_{x_3} q^{n-1}\right)\right] \\
&= (ix_1 + jx_2 + kx_3)\Big\{\left(\partial_{x_0} q^{n-1}\right) \\
&\qquad + \frac{ix_1 + jx_2 + kx_3}{{x_1}^2 + {x_2}^2 + {x_3}^2}\Big[x_1\left(\partial_{x_1} q^{n-1}\right) + x_2\left(\partial_{x_2} q^{n-1}\right) \\
&\qquad + x_3\left(\partial_{x_3} q^{n-1}\right)\Big]\Big\} \\
&= (ix_1 + jx_2 + kx_3)\mathcal{L}(q^{n-1}) = 0
\end{aligned}
$$

وبالتالي فإن العلاقة (2) محققة والدالة $f(q) = q^n$ قابلة للمفاضلة.

نتيجة4: كثيرات الحدود فوق العقدية التي من الشكل:

$$
\sum_{n=1}^{k} q^n c_n \quad ; \quad c_n \in \mathbb{H}
$$

هي دوال قابلة للمفاضلة حسب التعريف السابق.

مثال6 الدالة الأسية

$$
\begin{aligned}
&\left[\partial_{x_0} + \frac{ix_1 + jx_2 + kx_3}{{x_1}^2 + {x_2}^2 + {x_3}^2}\left(x_1\partial_{x_1} + x_2\partial_{x_2} + x_3\partial_{x_3}\right)\right]\left[e^{x_0 + ix_1 + jx_2 + kx_3}\right] \\
&= e^{x_0 + ix_1 + jx_2 + kx_3} \\
&\quad + \frac{ix_1 + jx_2 + kx_3}{{x_1}^2 + {x_2}^2 + {x_3}^2}\Big(x_1 i e^{x_0 + ix_1 + jx_2 + kx_3} + x_2 j e^{x_0 + ix_1 + jx_2 + kx_3} \\
&\qquad + x_3 k e^{x_0 + ix_1 + jx_2 + kx_3}\Big) \\
&= e^{x_0 + ix_1 + jx_2 + kx_3} \\
&\qquad + \frac{ix_1 + jx_2 + kx_3}{{x_1}^2 + {x_2}^2 + {x_3}^2}\Big(x_1 i + x_2 j \\
&\qquad + x_3 k\Big) e^{x_0 + ix_1 + jx_2 + kx_3} \\
&= (1 + \operatorname{sgn}(\mathbf{q})\mathbf{q}) e^{q} \neq 0
\end{aligned}
$$

وبالتالي الدالة الأسية غير قابلة للمفاضلة.

مثال7 الدالة اللوغاريتمية

$$\left[\partial_{x_0} + \frac{ix_1 + jx_2 + kx_3}{{x_1}^2 + {x_2}^2 + {x_3}^2}\left(x_1\partial_{x_1} + x_2\partial_{x_2} + x_3\partial_{x_3}\right)\right]\ln(x_0 + ix_1 + jx_2 + kx_3)$$
$$= \frac{1}{x_0 + ix_1 + jx_2 + kx_3} + \frac{ix_1 + jx_2 + kx_3}{{x_1}^2 + {x_2}^2 + {x_3}^2}\left(x_1\frac{i}{x_0 + ix_1 + jx_2 + kx_3} + x_2\frac{j}{x_0 + ix_1 + jx_2 + kx_3} + x_3\frac{k}{x_0 + ix_1 + jx_2 + kx_3}\right)$$
$$= \frac{1}{x_0 + ix_1 + jx_2 + kx_3} + \frac{ix_1 + jx_2 + kx_3}{{x_1}^2 + {x_2}^2 + {x_3}^2}(x_1 i + x_2 j + x_3 k)\frac{1}{x_0 + ix_1 + jx_2 + kx_3}$$
$$= (1 + \mathrm{sgn}(\mathbf{q})\mathbf{q})\frac{1}{q} \neq 0$$

وبالتالي الدالة اللوغاريتمية غير قابلة للمفاضلة.

مثال8 دالة الجيب المثلثي

$$\left[\partial_{x_0} + \frac{ix_1 + jx_2 + kx_3}{{x_1}^2 + {x_2}^2 + {x_3}^2}\left(x_1\partial_{x_1} + x_2\partial_{x_2} + x_3\partial_{x_3}\right)\right]\sin(x_0 + ix_1 + jx_2 + kx_3)$$
$$= \cos(x_0 + ix_1 + jx_2 + kx_3) + \frac{ix_1 + jx_2 + kx_3}{{x_1}^2 + {x_2}^2 + {x_3}^2}[x_1 i\cos(x_0 + ix_1 + jx_2 + kx_3) + x_2 j\cos(x_0 + ix_1 + jx_2 + kx_3) + x_3 k\cos(x_0 + ix_1 + jx_2 + kx_3)]$$

$$= \cos(x_0 + ix_1 + jx_2 + kx_3) + \frac{ix_1 + jx_2 + kx_3}{{x_1}^2 + {x_2}^2 + {x_3}^2}[x_1 i + x_2 j + x_3 k]\cos(x_0 + ix_1 + jx_2 + kx_3)$$
$$= (1 + \operatorname{sgn}(\mathbf{q})\mathbf{q})\cos(q) \neq 0$$

وبالتالي دالة الجيب المثلثي غير قابلة للمفاضلة حسب التعريف السابق.

3.3. الدوال النظامية [2]

إن أول محاولة ناجحة لدراسة سلوك الدوال التحليلية $f: \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ كانت في عام 1935، عندما عرَّف عالم الرياضيات السويسري رودولف فيوتر Rudolph Fueter ما يسمّى بالدوال النظامية من خلال معادلات كوشي ريمان المعممة. ترك فيوتر المجال لكثيرٍ من العلماء لاقتراح العديد من التعريفات البديلة. أكثر هذه التعريفات شيوعاً يرجع إلى كولين Cullen. ([3]،[4])

تعريف17 مؤثر كوشي–ريمان–فيوتر اليساري $\overline{\partial_l}$

$$\overline{\partial_l} = \frac{\partial}{\partial a} + i\frac{\partial}{\partial b} + j\frac{\partial}{\partial c} + k\frac{\partial}{\partial d}$$

تعريف18 مؤثر كوشي–ريمان–فيوتر اليميني $\overline{\partial_r}$

$$\overline{\partial_r} = \frac{\partial}{\partial a} + \frac{\partial}{\partial b}i + \frac{\partial}{\partial c}j + \frac{\partial}{\partial d}k$$

تعريف19 مؤثر كولين التفاضلي ∂_c

$$\partial_c = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\operatorname{Im}(q)}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)$$

حيث $q = t + ix + jy + kz$ و $\operatorname{Im}(q) = ix + jy + kz$ و $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$.

تعريف20 الدالة النظامية من اليسار حسب مفهوم فيوتر عند نقطة

تكون $f: \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ نظامية من اليسار عند $q \in \mathbb{H}$ إذا وفقط إذا كان $\overline{\partial_l} f(q) = 0$.

تعريف21 الدالة النظامية من اليمين حسب مفهوم فيوتر عند نقطة

تكون $f: \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ نظامية من اليمين عند $q \in \mathbb{H}$ إذا وفقط إذا كان $f(q)\overline{\partial_r} = 0$.

تعريف22 الدالة النظامية حسب كولين عند نقطة

تكون $f: \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ نظامية حسب كولين عند $q \in \mathbb{H}$ إذا وفقط إذا كان $\partial_c f(q) = 0$.

تعريف23 تعريف مكافئ للدالة النظامية حسب كولين

ليكن Ω نطاقاً في فضاء الأعداد فوق العقدية $\mathbb{H}$، أي هو مجموعة جزئية متصلة ومفتوحة من:

$$\mathbb{H} = \mathbb{R} + i\mathbb{R} + j\mathbb{R} + k\mathbb{R}$$

ولتكن:

$$\mathbb{S} = \{q \in \mathbb{H} \ \ ; \ \ q^2 = -1\}$$

ترمُز إلى الـ 2–كرة من الوحدات التخيلية فوق العقدية، نعرّف مفهوم الدالة النظامية كالآتي.

لتكن f دالة ذات قيمة فوق عقدية معرفة على النطاق Ω. من أجل كل $I \in \mathbb{S}$، ليكن $\Omega_I = \Omega \cap L_I$ وليكن $f_I = f|_{\Omega_I}$ مقصور f على Ω_I. عندئذٍ يقال عن المقصور f_I إنه هولومورفي إذا امتلك مشتقات جزئية مستمرة، وكان:

$$\overline{\partial_I} f(x + yI) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + I\frac{\partial}{\partial y}\right) f_I(x + yI) \equiv 0$$

ويقال عن f إنها نظامية، إذا كان f_I هولومورفياً من أجل كل $I \in \mathbb{S}$.

مثال9

- التطبيق المطابق $q \longmapsto q$ هو دالة نظامية حسب كولين في $\mathbb{H}$، ولكنه ليس كذلك حسب فيوتر.
- كل كثير حدود من الشكل $q \longmapsto a_0 + qa_1 + \ldots + q^n a_n$ حيث $a_l \in \mathbb{H}$ من أجل كل l هو دالة نظامية حسب كولين في $\mathbb{H}$.

تعريف24 الـ I–مشتق

لتكن $f : \Omega \to \mathbb{H}$ دالة نظامية. من أجل كل $I \in \mathbb{S}$، يُعرَّف الـ I–مشتق على Ω_I بالشكل الآتي:

$$\partial_I f(x+yI) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - I\frac{\partial}{\partial y}\right) f_I(x+yI)$$

تعريف25 مشتق الشريحة

إن مشتق الشريحة لـ f هو الدالة:

$$\grave{f} = \partial_c f : \Omega \to \mathbb{H}$$

المعرَّفة من خلال $\partial_I f$ على Ω_I، من أجل كل $I \in \mathbb{S}$.

ملاحظة1: من أجل أية دالة نظامية حسب كولين $f : \Omega \to \mathbb{H}$، يكون مشتق الشريحة $\grave{f}$ دالة نظامية في Ω أيضاً.

وبالتالي بتكرار عملية الاشتقاق نصل إلى المشتق النوني $f^{(n)} = \frac{\partial^n f}{\partial q^n}$ لكل $n \in \mathbb{N}$ وعندها سيكون هذا المشتق دالةً نظاميةً أيضاً.

4.3. دراسة نظامية الدالة الأسية الطبيعية فوق العقدية

لنطبق مؤثر كوشي–ريمان–فيوتر اليساري على الدالة الأسية الطبيعية فوق العقدية:

$$\overline{\partial}_l e^p = \left(\frac{\partial}{\partial a} + i\frac{\partial}{\partial b} + j\frac{\partial}{\partial c} + k\frac{\partial}{\partial d}\right) e^{a+bi+cj+dk}$$

$$= e^{a+bi+cj+dk} - e^{a+bi+cj+dk} - e^{a+bi+cj+dk} - e^{a+bi+cj+dk}$$
$$= -2e^{a+bi+cj+dk} \neq 0$$

وبالتالي فإن الدالة الأسية الطبيعية فوق العقدية غير نظامية حسب فيوتر.

5.3. دراسة نظامية الدالة اللوغاريتمية الطبيعية فوق العقدية

بتطبيق مؤثر كوشي–ريمان–فيوتر اليساري نجد:

$$\overline{\partial}_l \ln(p) = \left(\frac{\partial}{\partial a} + i\frac{\partial}{\partial b} + j\frac{\partial}{\partial c} + k\frac{\partial}{\partial d}\right)\left(\ln|p| + \operatorname{sgn}(\mathbf{p})\arg(p)\right)$$
$$= \left(\frac{\partial}{\partial a} + i\frac{\partial}{\partial b} + j\frac{\partial}{\partial c} + k\frac{\partial}{\partial d}\right)\left(\ln\sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2} + \frac{bi+cj+dk}{\sqrt{b^2+c^2+d^2}}\arg(p)\right)$$
$$= \frac{a}{|p|} + i\frac{b}{|p|} + i\arg(p)\frac{i|\mathbf{p}| - \mathbf{p}\frac{b}{|\mathbf{p}|}}{|\mathbf{p}|^2} + j\frac{c}{|p|} + j\arg(p)\frac{j|\mathbf{p}| - \mathbf{p}\frac{c}{|\mathbf{p}|}}{|\mathbf{p}|^2} + k\frac{d}{|p|}$$
$$+k\arg(p)\frac{k|\mathbf{p}| - \mathbf{p}\frac{d}{|\mathbf{p}|}}{|\mathbf{p}|^2}$$
$$= \frac{a+ib+jc+kd}{|p|} + \left[i(i|\mathbf{p}|^2 - \mathbf{p}b) + j(j|\mathbf{p}|^2 - \mathbf{p}c) + k(k|\mathbf{p}|^2 - \mathbf{p}d)\right]\frac{\arg(p)}{|\mathbf{p}|^3}$$
$$= \frac{p}{|p|} + \left(-|\mathbf{p}|^2 - i\mathbf{p}b - |\mathbf{p}|^2 - j\mathbf{p}c - |\mathbf{p}|^2 - k\mathbf{p}d\right)\frac{\arg(p)}{|\mathbf{p}|^3}$$

$$= \frac{p}{|p|} + [-3|\mathbf{p}|^2 - (ib + jc + kd)\mathbf{p}]\frac{\arg(p)}{|\mathbf{p}|^3}$$
$$= \frac{p}{|p|} + (-3|\mathbf{p}|^2 - \mathbf{p^2})\frac{\arg(p)}{|\mathbf{p}|^3}$$
$$= \frac{p}{|p|} + (-3+1)\frac{\arg(p)}{|\mathbf{p}|} = \frac{p}{|p|} - 2\frac{\arg(p)}{|\mathbf{p}|}$$
$$\neq 0$$

حيث لدينا $\arg(p) = \text{constasnt}$.

وبالتالي الدالة اللوغاريتمية الطبيعية فوق العقدية غير نظامية حسب مفهوم فيوتر.

6.3. دراسة نظامية دالة الجيب المثلثي فوق العقدية

بتطبيق مؤثر كوشي–ريمان–فيوتر اليساري نجد:

$$\bar{\partial}_l \sin(p) = \left(\frac{\partial}{\partial a} + i\frac{\partial}{\partial b} + j\frac{\partial}{\partial c} + k\frac{\partial}{\partial d}\right)\left[-\frac{1}{2}\operatorname{sgn}(\mathbf{p})\left(e^{p\operatorname{sgn}(\mathbf{p})} - e^{-p\operatorname{sgn}(\mathbf{p})}\right)\right]$$
$$= -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial a} + i\frac{\partial}{\partial b} + j\frac{\partial}{\partial c} + k\frac{\partial}{\partial d}\right)\left(\operatorname{sgn}(\mathbf{p})e^{p\operatorname{sgn}(\mathbf{p})}\right)$$
$$+ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial a} + i\frac{\partial}{\partial b} + j\frac{\partial}{\partial c} + k\frac{\partial}{\partial d}\right)\left(\operatorname{sgn}(\mathbf{p})e^{-p\operatorname{sgn}(\mathbf{p})}\right)$$

لنحسب الحد الأول بدون الثابت:

$$\mathrm{I}_1 = \left(\frac{\partial}{\partial a} + i\frac{\partial}{\partial b} + j\frac{\partial}{\partial c} + k\frac{\partial}{\partial d}\right)\left(\operatorname{sgn}(\mathbf{p})e^{p\operatorname{sgn}(\mathbf{p})}\right)$$
$$= \left(\frac{\partial}{\partial a} + i\frac{\partial}{\partial b} + j\frac{\partial}{\partial c} + k\frac{\partial}{\partial d}\right)\left(\frac{bi + cj + dk}{\sqrt{b^2 + c^2 + d^2}} e^{(a+bi+cj+dk)\frac{bi+cj+dk}{\sqrt{b^2+c^2+d^2}}}\right)$$

لنوجد المشتقات:

$$\left(\frac{\partial}{\partial a}\right)\frac{bi + cj + dk}{\sqrt{b^2 + c^2 + d^2}} = 0$$

$$\left(i\frac{\partial}{\partial b}\right)\frac{bi+cj+dk}{\sqrt{b^2+c^2+d^2}}$$
$$=i\frac{i\sqrt{b^2+c^2+d^2}-(bi+cj+dk)\frac{b}{\sqrt{b^2+c^2+d^2}}}{b^2+c^2+d^2}$$
$$=i\frac{i|\mathbf{p}|-\mathbf{p}\frac{b}{|\mathbf{p}|}}{|\mathbf{p}|^2}=\frac{-|\mathbf{p}|-ib\operatorname{sgn}(\mathbf{p})}{|\mathbf{p}|^2}$$
$$\left(j\frac{\partial}{\partial c}\right)\frac{bi+cj+dk}{\sqrt{b^2+c^2+d^2}}$$
$$=j\frac{j\sqrt{b^2+c^2+d^2}-(bi+cj+dk)\frac{c}{\sqrt{b^2+c^2+d^2}}}{b^2+c^2+d^2}$$
$$=j\frac{j|\mathbf{p}|-\mathbf{p}\frac{c}{|\mathbf{p}|}}{|\mathbf{p}|^2}=\frac{-|\mathbf{p}|-jc\operatorname{sgn}(\mathbf{p})}{|\mathbf{p}|^2}$$
$$\left(k\frac{\partial}{\partial d}\right)\frac{bi+cj+dk}{\sqrt{b^2+c^2+d^2}}$$
$$=k\frac{k\sqrt{b^2+c^2+d^2}-(bi+cj+dk)\frac{d}{\sqrt{b^2+c^2+d^2}}}{b^2+c^2+d^2}$$
$$=k\frac{k|\mathbf{p}|-\mathbf{p}\frac{d}{|\mathbf{p}|}}{|\mathbf{p}|^2}=\frac{-|\mathbf{p}|-kd\operatorname{sgn}(\mathbf{p})}{|\mathbf{p}|^2}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial a}\right)e^{(a+bi+cj+dk)\frac{bi+cj+dk}{\sqrt{b^2+c^2+d^2}}}$$
$$=\frac{bi+cj+dk}{\sqrt{b^2+c^2+d^2}}e^{(a+bi+cj+dk)\frac{bi+cj+dk}{\sqrt{b^2+c^2+d^2}}}$$
$$=\operatorname{sgn}(\mathbf{p})e^{p\operatorname{sgn}(\mathbf{p})}$$
$$\left(i\frac{\partial}{\partial b}\right)e^{(a+bi+cj+dk)\frac{bi+cj+dk}{\sqrt{b^2+c^2+d^2}}}$$

$$= \left[(a+bi+cj+dk)\frac{-|\mathbf{p}| - ib\operatorname{sgn}(\mathbf{p})}{|\mathbf{p}|^2} - \frac{bi+cj+dk}{\sqrt{b^2+c^2+d^2}}\right] e^{(a+bi+cj+dk)\frac{bi+cj+dk}{\sqrt{b^2+c^2+d^2}}}$$

$$= \left[p\frac{-|\mathbf{p}| - ib\operatorname{sgn}(\mathbf{p})}{|\mathbf{p}|^2} - \operatorname{sgn}(\mathbf{p})\right] e^{p\operatorname{sgn}(\mathbf{p})}$$

$$\left(j\frac{\partial}{\partial c}\right) e^{(a+bi+cj+dk)\frac{bi+cj+dk}{\sqrt{b^2+c^2+d^2}}}$$

$$= \left[(a+bi+cj+dk)\frac{-|\mathbf{p}| - jc\operatorname{sgn}(\mathbf{p})}{|\mathbf{p}|^2} - \frac{bi+cj+dk}{\sqrt{b^2+c^2+d^2}}\right] e^{(a+bi+cj+dk)\frac{bi+cj+dk}{\sqrt{b^2+c^2+d^2}}}$$

$$= \left[p\frac{-|\mathbf{p}| - jc\operatorname{sgn}(\mathbf{p})}{|\mathbf{p}|^2} - \operatorname{sgn}(\mathbf{p})\right] e^{p\operatorname{sgn}(\mathbf{p})}$$

$$\left(k\frac{\partial}{\partial d}\right) e^{(a+bi+cj+dk)\frac{bi+cj+dk}{\sqrt{b^2+c^2+d^2}}}$$

$$= \left[(a+bi+cj+dk)\frac{-|\mathbf{p}| - kd\operatorname{sgn}(\mathbf{p})}{|\mathbf{p}|^2} - \frac{bi+cj+dk}{\sqrt{b^2+c^2+d^2}}\right] e^{(a+bi+cj+dk)\frac{bi+cj+dk}{\sqrt{b^2+c^2+d^2}}}$$

$$= \left[p\frac{-|\mathbf{p}| - kd\operatorname{sgn}(\mathbf{p})}{|\mathbf{p}|^2} - \operatorname{sgn}(\mathbf{p})\right] e^{p\operatorname{sgn}(\mathbf{p})}$$

$$\Rightarrow \mathrm{I}_1 = -e^{p\operatorname{sgn}(\mathbf{p})} - \operatorname{sgn}(\mathbf{p})\left[p\frac{|\mathbf{p}| + ib\operatorname{sgn}(\mathbf{p})}{|\mathbf{p}|^2} + \operatorname{sgn}(\mathbf{p})\right] e^{p\operatorname{sgn}(\mathbf{p})} - \frac{|\mathbf{p}| + ib\operatorname{sgn}(\mathbf{p})}{|\mathbf{p}|^2} e^{p\operatorname{sgn}(\mathbf{p})} - \operatorname{sgn}(\mathbf{p})\left[p\frac{|\mathbf{p}| + jc\operatorname{sgn}(\mathbf{p})}{|\mathbf{p}|^2} + \operatorname{sgn}(\mathbf{p})\right] e^{p\operatorname{sgn}(\mathbf{p})} - \frac{|\mathbf{p}| + jc\operatorname{sgn}(\mathbf{p})}{|\mathbf{p}|^2} e^{p\operatorname{sgn}(\mathbf{p})}$$

$$-\mathrm{sgn}(\mathbf{p})\left[p\frac{|\mathbf{p}|+kd\mathrm{sgn}(\mathbf{p})}{|\mathbf{p}|^2}+\mathrm{sgn}(\mathbf{p})\right]e^{p\mathrm{sgn}(\mathbf{p})}$$
$$-\frac{|\mathbf{p}|+kd\mathrm{sgn}(\mathbf{p})}{|\mathbf{p}|^2}e^{p\mathrm{sgn}(\mathbf{p})}$$
$$=\left\{-1-\frac{\mathrm{sgn}(\mathbf{p})p}{|\mathbf{p}|^2}[3|\mathbf{p}|+ib\mathrm{sgn}(\mathbf{p})+jc\mathrm{sgn}(\mathbf{p})+kd\mathrm{sgn}(\mathbf{p})]+3\right.$$
$$-\frac{1}{|\mathbf{p}|^2}[3|\mathbf{p}|+ib\mathrm{sgn}(\mathbf{p})+jc\mathrm{sgn}(\mathbf{p})$$
$$\left.+kd\mathrm{sgn}(\mathbf{p})]\right\}e^{p\mathrm{sgn}(\mathbf{p})}$$
$$=\left\{2-\frac{\mathrm{sgn}(\mathbf{p})p}{|\mathbf{p}|^2}[3|\mathbf{p}|+\mathbf{p}\mathrm{sgn}(\mathbf{p})]\right.$$
$$\left.-\frac{1}{|\mathbf{p}|^2}[3|\mathbf{p}|+\mathbf{p}\mathrm{sgn}(\mathbf{p})]\right\}e^{p\mathrm{sgn}(\mathbf{p})}$$

والآن لنحسب الحد الثاني بدون الثابت:

$$\mathrm{I}_2=\left(\frac{\partial}{\partial a}+i\frac{\partial}{\partial b}+j\frac{\partial}{\partial c}+k\frac{\partial}{\partial d}\right)\left(\mathrm{sgn}(\mathbf{p})e^{-p\mathrm{sgn}(\mathbf{p})}\right)$$
$$=\left(\frac{\partial}{\partial a}+i\frac{\partial}{\partial b}+j\frac{\partial}{\partial c}\right.$$
$$\left.+k\frac{\partial}{\partial d}\right)\left(\frac{bi+cj+dk}{\sqrt{b^2+c^2+d^2}}e^{-(a+bi+cj+dk)\frac{bi+cj+dk}{\sqrt{b^2+c^2+d^2}}}\right)$$

لنوجد المشتقات:

$$\left(\frac{\partial}{\partial a}\right)e^{-(a+bi+cj+dk)\frac{bi+cj+dk}{\sqrt{b^2+c^2+d^2}}}$$
$$=-\frac{bi+cj+dk}{\sqrt{b^2+c^2+d^2}}e^{-(a+bi+cj+dk)\frac{bi+cj+dk}{\sqrt{b^2+c^2+d^2}}}$$
$$=-\mathrm{sgn}(\mathbf{p})e^{-p\mathrm{sgn}(\mathbf{p})}$$
$$\left(i\frac{\partial}{\partial b}\right)e^{-(a+bi+cj+dk)\frac{bi+cj+dk}{\sqrt{b^2+c^2+d^2}}}$$

$$= \left[(a+bi+cj+dk)\frac{|\mathbf{p}|+ib\operatorname{sgn}(\mathbf{p})}{|\mathbf{p}|^2} + \frac{bi+cj+dk}{\sqrt{b^2+c^2+d^2}}\right]e^{-(a+bi+cj+dk)\frac{bi+cj+dk}{\sqrt{b^2+c^2+d^2}}}$$

$$= \left[p\frac{|\mathbf{p}|+ib\operatorname{sgn}(\mathbf{p})}{|\mathbf{p}|^2} + \operatorname{sgn}(\mathbf{p})\right]e^{-p\operatorname{sgn}(\mathbf{p})}$$

$$\left(j\frac{\partial}{\partial c}\right)e^{-(a+bi+cj+dk)\frac{bi+cj+dk}{\sqrt{b^2+c^2+d^2}}} = \left[(a+bi+cj+dk)\frac{|\mathbf{p}|+jc\operatorname{sgn}(\mathbf{p})}{|\mathbf{p}|^2} + \frac{bi+cj+dk}{\sqrt{b^2+c^2+d^2}}\right]e^{-(a+bi+cj+dk)\frac{bi+cj+dk}{\sqrt{b^2+c^2+d^2}}}$$

$$= \left[p\frac{|\mathbf{p}|+jc\operatorname{sgn}(\mathbf{p})}{|\mathbf{p}|^2} + \operatorname{sgn}(\mathbf{p})\right]e^{-p\operatorname{sgn}(\mathbf{p})}$$

$$\left(k\frac{\partial}{\partial d}\right)e^{-(a+bi+cj+dk)\frac{bi+cj+dk}{\sqrt{b^2+c^2+d^2}}} = \left[(a+bi+cj+dk)\frac{|\mathbf{p}|+kd\operatorname{sgn}(\mathbf{p})}{|\mathbf{p}|^2} + \frac{bi+cj+dk}{\sqrt{b^2+c^2+d^2}}\right]e^{-(a+bi+cj+dk)\frac{bi+cj+dk}{\sqrt{b^2+c^2+d^2}}}$$

$$= \left[p\frac{|\mathbf{p}|+kd\operatorname{sgn}(\mathbf{p})}{|\mathbf{p}|^2} + \operatorname{sgn}(\mathbf{p})\right]e^{-p\operatorname{sgn}(\mathbf{p})}$$

$$\Rightarrow \mathrm{I}_2 = e^{-p\operatorname{sgn}(\mathbf{p})}$$

$$+\operatorname{sgn}(\mathbf{p})\left[p\frac{|\mathbf{p}|+ib\operatorname{sgn}(\mathbf{p})}{|\mathbf{p}|^2}+\operatorname{sgn}(\mathbf{p})\right]e^{-p\operatorname{sgn}(\mathbf{p})}$$
$$-\frac{|\mathbf{p}|+ib\operatorname{sgn}(\mathbf{p})}{|\mathbf{p}|^2}e^{-p\operatorname{sgn}(\mathbf{p})}$$
$$+\operatorname{sgn}(\mathbf{p})\left[p\frac{|\mathbf{p}|+jc\operatorname{sgn}(\mathbf{p})}{|\mathbf{p}|^2}+\operatorname{sgn}(\mathbf{p})\right]e^{-p\operatorname{sgn}(\mathbf{p})}$$
$$-\frac{|\mathbf{p}|+jc\operatorname{sgn}(\mathbf{p})}{|\mathbf{p}|^2}e^{-p\operatorname{sgn}(\mathbf{p})}$$
$$+\operatorname{sgn}(\mathbf{p})\left[p\frac{|\mathbf{p}|+kd\operatorname{sgn}(\mathbf{p})}{|\mathbf{p}|^2}+\operatorname{sgn}(\mathbf{p})\right]e^{-p\operatorname{sgn}(\mathbf{p})}$$
$$-\frac{|\mathbf{p}|+kd\operatorname{sgn}(\mathbf{p})}{|\mathbf{p}|^2}e^{-p\operatorname{sgn}(\mathbf{p})}$$
$$=\left\{1+\frac{\operatorname{sgn}(\mathbf{p})p}{|\mathbf{p}|^2}[3|\mathbf{p}|+ib\operatorname{sgn}(\mathbf{p})+jc\operatorname{sgn}(\mathbf{p})+kd\operatorname{sgn}(\mathbf{p})]-3\right.$$
$$-\frac{1}{|\mathbf{p}|^2}[3|\mathbf{p}|+ib\operatorname{sgn}(\mathbf{p})+jc\operatorname{sgn}(\mathbf{p})$$
$$\left.+kd\operatorname{sgn}(\mathbf{p})]\right\}e^{-p\operatorname{sgn}(\mathbf{p})}$$
$$=\left\{-2+\frac{\operatorname{sgn}(\mathbf{p})p}{|\mathbf{p}|^2}[3|\mathbf{p}|+\mathbf{p}\operatorname{sgn}(\mathbf{p})]\right.$$
$$\left.-\frac{1}{|\mathbf{p}|^2}[3|\mathbf{p}|+\mathbf{p}\operatorname{sgn}(\mathbf{p})]\right\}e^{-p\operatorname{sgn}(\mathbf{p})}$$

وبالتالي:

$$\bar{\partial}_l\sin(p)=-\frac{1}{2}\mathrm{I}_1+\frac{1}{2}\mathrm{I}_2$$
$$=-\frac{1}{2}\left\{2-\frac{\operatorname{sgn}(\mathbf{p})p}{|\mathbf{p}|^2}\big(3|\mathbf{p}|+\mathbf{p}\operatorname{sgn}(\mathbf{p})\big)\right.$$
$$\left.-\frac{1}{|\mathbf{p}|^2}\big(3|\mathbf{p}|+\mathbf{p}\operatorname{sgn}(\mathbf{p})\big)\right\}e^{p\operatorname{sgn}(\mathbf{p})}$$

$$+\frac{1}{2}\left\{-2+\frac{\operatorname{sgn}(\mathbf{p})p}{|\mathbf{p}|^2}[3|\mathbf{p}|+\mathbf{p}\operatorname{sgn}(\mathbf{p})]\right.$$
$$\left.-\frac{1}{|\mathbf{p}|^2}[3|\mathbf{p}|+\mathbf{p}\operatorname{sgn}(\mathbf{p})]\right\}e^{-p\operatorname{sgn}(\mathbf{p})}$$
$$\neq 0$$

إذاً دالة الجيب المثلثي فوق العقدية غير نظامية حسب فيوتر.

7.3. دراسة نظامية دالة جيب التمام المثلثي فوق العقدية

بتطبيق مؤثر كوشي–ريمان–فيوتر اليساري نجد:

$$\bar{\partial}_l \cos(p)=\left(\frac{\partial}{\partial a}+i\frac{\partial}{\partial b}+j\frac{\partial}{\partial c}+k\frac{\partial}{\partial d}\right)\left[\frac{1}{2}\left(e^{p\operatorname{sgn}(\mathbf{p})}+e^{-p\operatorname{sgn}(\mathbf{p})}\right)\right]$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial a}+i\frac{\partial}{\partial b}+j\frac{\partial}{\partial c}+k\frac{\partial}{\partial d}\right)e^{p\operatorname{sgn}(\mathbf{p})}$$
$$+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial a}+i\frac{\partial}{\partial b}+j\frac{\partial}{\partial c}+k\frac{\partial}{\partial d}\right)e^{-p\operatorname{sgn}(\mathbf{p})}$$

باستخدام المشتقات من الفِقْرة السابقة، نحسب الحد الأول بدون الثابت:

$$I_1=\operatorname{sgn}(\mathbf{p})e^{p\operatorname{sgn}(\mathbf{p})}+\left[p\frac{-|\mathbf{p}|-ib\operatorname{sgn}(\mathbf{p})}{|\mathbf{p}|^2}-\operatorname{sgn}(\mathbf{p})\right]e^{p\operatorname{sgn}(\mathbf{p})}$$
$$+\left[p\frac{-|\mathbf{p}|-jc\operatorname{sgn}(\mathbf{p})}{|\mathbf{p}|^2}-\operatorname{sgn}(\mathbf{p})\right]e^{p\operatorname{sgn}(\mathbf{p})}$$
$$+\left[p\frac{-|\mathbf{p}|-kd\operatorname{sgn}(\mathbf{p})}{|\mathbf{p}|^2}-\operatorname{sgn}(\mathbf{p})\right]e^{p\operatorname{sgn}(\mathbf{p})}$$
$$=\left\{-2\operatorname{sgn}(\mathbf{p})+\frac{p}{|\mathbf{p}|^2}[-3|\mathbf{p}|-(ib+jc+kd)\operatorname{sgn}(\mathbf{p})]\right\}e^{p\operatorname{sgn}(\mathbf{p})}$$
$$=\left\{-2\operatorname{sgn}(\mathbf{p})+\frac{p}{|\mathbf{p}|^2}[-3|\mathbf{p}|-\mathbf{p}\operatorname{sgn}(\mathbf{p})]\right\}e^{p\operatorname{sgn}(\mathbf{p})}$$

والآن نحسب الحد الثاني بدون الثابت:

$$I_2=-\operatorname{sgn}(\mathbf{p})e^{-p\operatorname{sgn}(\mathbf{p})}+\left[p\frac{|\mathbf{p}|+ib\operatorname{sgn}(\mathbf{p})}{|\mathbf{p}|^2}+\operatorname{sgn}(\mathbf{p})\right]e^{-p\operatorname{sgn}(\mathbf{p})}$$

$$+\left[p\frac{|\mathbf{p}|+jc\,\mathrm{sgn}(\mathbf{p})}{|\mathbf{p}|^2}+\mathrm{sgn}(\mathbf{p})\right]e^{-p\,\mathrm{sgn}(\mathbf{p})}$$
$$+\left[p\frac{|\mathbf{p}|+kd\,\mathrm{sgn}(\mathbf{p})}{|\mathbf{p}|^2}+\mathrm{sgn}(\mathbf{p})\right]e^{-p\,\mathrm{sgn}(\mathbf{p})}$$
$$=\left\{2\mathrm{sgn}(\mathbf{p})+\frac{p}{|\mathbf{p}|^2}[3|\mathbf{p}|+\mathbf{p}\,\mathrm{sgn}(\mathbf{p})]\right\}e^{-p\,\mathrm{sgn}(\mathbf{p})}$$

وبالتالي:

$$\bar{\partial}_l\cos(p)=\frac{1}{2}I_1+\frac{1}{2}I_2$$
$$=\left\{-\mathrm{sgn}(\mathbf{p})+\frac{p}{2|\mathbf{p}|^2}[-3|\mathbf{p}|-\mathbf{p}\,\mathrm{sgn}(\mathbf{p})]\right\}e^{p\,\mathrm{sgn}(\mathbf{p})}$$
$$+\left\{\mathrm{sgn}(\mathbf{p})+\frac{p}{2|\mathbf{p}|^2}[3|\mathbf{p}|+\mathbf{p}\,\mathrm{sgn}(\mathbf{p})]\right\}$$
$$\neq 0$$

إذاً دالة جيب التمام المثلثي فوق العقدية غير نظامية حسب فيوتر.

4. الاستنتاجات والتوصيات

من خلال ما سبق نجد أنَّ كثيرات الحدود فوق العقدية قابلة للمفاضلة حسب أحد تعريفي قابلية المفاضلة بينما هي غير كذلك بالنسبة للتعريف الآخر، كما أنها دوال نظامية حسب تعريف كولين. وأيضاً وجدنا أن الدالة الأسية والدالة اللوغاريتمية ودالة الجيب المثلثي وجيب التمام المثلثي فوق العقدية هي دوال غير نظامية حسب مفهوم فيوتر.

نوصي بدراسة نظامية تلك الدوال حسب مفهوم كولين والمقارنة بينهما. كما يمكن البحث عن طرق أخرى لتعريف الدوال النظامية ودراستها.

5. قائمة المراجع References

[1]. MORAIS J, SPRÖßIG W, GEORGIEV S,2014-Real Quaternionic Calculus Handbook. Springer Basel, New York, 222p.

[2]. GENTILI G, STOPPATO C, STRUPPA D,2013-Regular Functions of a Quaternionic Variable. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, New York, 202p.

[3]. AHLFORS L, 1979- Complex Analysis: An Introduction to the Theory of Analytic Functions of One Complex Variable. McGraw-Hill, 3rd edn. New York, 247p.

[4]. BURNS D, KRANTZ S, 1994- Rigidity of holomorphic mappings and a new Schwarz lemma at the boundary. J. Am. Math. Soc. **7**(3), (661-676).

[5]. SUDBERY A, 1977- Quaternionic Analysis. Department of Mathematics University of York, Heslington, York, 44p.

[6]. TAIT P, 1867- An Elementary Treatise on Quaternions. C.U.P., Cambridge, (1831-1901).

[7]. JOLY C, 1905- A Manual of Quaternions. Macmillan, London, 343p.

[8]. FUETET R, 1935- Die Funktionentheorie der Differentialgleichungen $\Delta u = 0$ und $\Delta\Delta u = 0$ mit vier reellen Variablen. Comment. math. Helv. **7,** (307-330).

[9]. FUETER R, 1936-ber die analytische Darstellung der regula ̈ren Funktionen einer Quaternionenvariablen. Comment. math. Helv. **8,** (371-378).
[10]. HAEFELI H, 1947- Hyperkomplexe Differentiale. Comment. math. Helv. **20, (**382-420).
[11]. DEAVOURS C, 1973- The Quaternion Calculus. Amer. Math. Monthly **80,** (995-1008).