طريقة متجه تشيفر لأجل مسألة الوصف التقليدي (العام) لحالة التناظر المحوري الثانية للانفعالات المرنة للجسم الصلب المرن دقيق الاستقطاب

الدكتورة: وعد سمير عطية *
waed.atteiah@wpu.edu.sy

ملخص البحث:

يتعلق البحث بالجسم الصلب المرن دقيق الاستقطاب، مركزي التناظر والمتجانس والمتماثل المناحي والمعيّن بخمسة ثوابت مادية، ضمن ما يسمى حالة التناظر المحوري الثانية للانفعالات المرنة والمناقش رياضياً من خلال الباحثين: البولندي نوفاتسكي [5]، والتركي: إرينغن [6]، والذي نرمز له اختصاراً بالرمز (E−N:5). بدايةً تم مايلي:
أولاً: عرض النموذج الرياضي التقليدي للجسم المذكور، ثانياً: عرض النموذج الرياضي الإزاحي– الدوراني للجسم المدروس، ثالثاً: عرض طريقة متجه تشيفر لأجل مسألة القيم الحدية والإبتدائية، الإزاحية – الدورانية للجسم المدروس.
في البحث، عممنا طريقة متجه تشيفر إلى الشكل التقليدي (العام) للجسم الصلب المرن دقيق الإستقطاب (E−N:5)، ضمن حالة التناظر المحوري الثانية لانفعالاته المرنة. بعدها أنهينا البحث بسرد عدد من المسائل للمناقشة.

الكلمات المفتاحية: طريقة متجه تشيفر – الجسم الصلب المرن دقيق الإستقطاب – حالة التناظر المحوري الثانية للانفعالات المرنة.

* دكتورة في الرياضيات التطبيقية ، عضو هيئة تدريسية في الجامعة الوطنية الخاصة.

Schafer vector method for the general traditional mathematical model of the second axially symmetric state of the elastic strain of the micropolar elastic solid

Dr.Waad Samir Attiah †

waed.atteiah@wpu.edu.sy

Abstract

The paper relates to the mathematical model of the centro-symmetric, homogeneous, and isotropic micropolar elastic solid of 5 material constants in the second axially symmetric state of elastic strains, discussed by Nowacki [5] and with Erigen [6], and shortly called (E-N:5). First, we introduce the following:

1) The traditional model of such a body in frame of the second axially symmetric state of elastic strains.

2) The displacement- rotation model of the above mentioned body.

3) The Schafer vector method for the displacement – rotation initial-boundary value problem of the above mentioned micropolar elastic solid.

In paper ,first we generalized the Schafer vector method to the traditional (general) description of the considerable body in the frame of the second axially symmetric state of elastic strains. Finally ,we end the paper by some problems for discussing .

Key words: Schafer vector method –The micropolar elastic solid – The second axially symmetric state of elastic strains.

† Applied Math. Doctor, Lecturer at AL Wataniya Private University.

1- مقدمة :

في [4] تمت مناقشة طريقة متجه تشيفر لحل مسائل القيم الحدية (التوازن) للجسم المرن دقيق الاستقطاب ضمن الحالتين المستويتين الأولى والثانية للانفعالات المرنة ، وضمن حالتي التناظر المحوري الأولى والثانية للانفعالات المرنة.

في [1] قام الباحث ديشليفيتش بمناقشة طريقة متجه تشيفر في حل مسائل القيم الحدية والابتدائية (التحريك) من نوع لامي للجسم الصلب المرن دقيق الإستقطاب، ضمن الحالتين المستويتين الأولى والثانية وكذلك ضمن حالتي التناظر المحوري الأولى والثانية للانفعالات المرنة لهذا الجسم.

2- هدف وأهمية البحث:

أ- يهدف البحث إلى تعميم طريقة متجه تشيفر إلى مسألة النموذج الرياضي التقليدي (العام) للجسم (E-N:5) ، ضمن حالة التناظر المحوري الثانية للانفعالات المرنة لهذا الجسم، بحيث تؤول المسألة الأساسية إلى مجموع مسألتين؛ الأولى معادلاتها أسهل من الأصلية، والثانية شروطها الحدية والابتدائية التي منشأها القوة، متجانسة (أي أنها أسهل من حيث الشروط الحدية والابتدائية).

ب- يمكن أن تملك نتائج البحث أهمية كبيرة كونها تعطي طريقة تسهل إيجاد الحل الناظم للسلوك الديناميكي للجسم الصلب المرن دقيق الاستقطاب ضمن حالة التناظر المحوري الثانية للانفعالات المرنة لهذا الجسم (أسطوانة حديدية، أو نحاسية أو فولاذية أو من الألمنيوم ... الخ)، الأمر الذي يملك أهمية في ميكانيك المواد (مخبر المواد).

3- طرق وأدوات البحث :

باستخدام نتائج البحث [1] سنعمم طريقة متجه شيفر إلى الوصف التقليدي (العام) للجسم الصلب المرن دقيق الاستقطاب (E-N:5) ضمن حالة التناظر المحوري الثانية للانفعالات المرنة لهذا الجسم.

من أجل متطلبات البحث نعرض مايلزمنا من نتائج البحث [1; page 187] ،المتمثلة بما يلي:

3- 1: الوصف التقليدي (العام) للجسم الصلب المرن دقيق الاستقطاب، المتجانس والمتماثل المناحي، ضمن حالة التناظر المحوري الثانية للانفعالات المرنة له، والذي يشغل في لحظة البدء المنطقة Ω المحدودة وبسيطة الترابط والمحدودة في R^3 [1,3]:

توطئة:

نعتبر جملة المقارنة العطالية $O\,x_1\,x_2\,x_3$ ذات القاعدة الديكارتية $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$، ولنعتبر القاعدة الاسطوانية الموافقة $(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_z)$، ولنعتبر أيضاً الاحداثيات الاسطوانية (r, θ, z) لنقطة مادية لاغرانجية من الجسم المدروس. لنرمز بـΩ للمنطقة بسيطة الترابط والمحدودة في R^3، والتي يشغلها الجسم المعتبر في لحظة البدء، ولنرمز بـ $\partial\Omega$ للحدود الملساء لهذا الجسم، ولنرمز أيضاً بـ $\mathrm{T}_+ =]0,\infty[$ وبـ$\mathrm{T} = [0,\infty[$. تتحدد الحالة الديناميكية المرنة دقيقة الاستقطاب، للجسم المعتبر من خلال مجموعة الحقول التنسورية: $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\kappa})$، حيث أن: $\mathbf{u}$ و $\boldsymbol{\varphi}$ حقلان متجهيان مستقلان، هما على الترتيب، حقل الإزاحة وحقل الدوران، كما أن: $\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\kappa}$، حقول تنسورية من المرتبة الثانية، هي على الترتيب: حقل إجهادات القوة وحقل إجهادات العزم، وحقل الانفعالات، وحقل الانفعالات دقيقة الاستقطاب.

من أجل حالة التناظر المحوري الثانية للانفعالات المرنة للجسم المدروس(E−N:5) تكون بالتعريف كافة الحقول التنسورية التي تحكم الحالة الديناميكية المرنة للجسم مستقلة عن الإحداثي الأسطواني الثاني θ، ويمكن في هذه الحالة أن تمثل الحقول السابقة في النظام الإحداثي الأسطواني $(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_z)$ وفي $\Omega \times \mathrm{T}_+$ على النحو التالي:

$$\mathbf{u} \equiv (0, u_\theta, 0)\ ,\quad \boldsymbol{\varphi} \equiv (\varphi_r, 0, \varphi_z)\ , \tag{3.1}$$

$$\boldsymbol{\sigma} \equiv \begin{bmatrix} 0 & \sigma_{r\theta} & 0 \\ \sigma_{\theta r} & 0 & \sigma_{\theta z} \\ 0 & \sigma_{z\theta} & 0 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{\mu} \equiv \begin{bmatrix} \mu_{rr} & 0 & \mu_{rz} \\ 0 & \mu_{\theta\theta} & 0 \\ \mu_{zr} & 0 & \mu_{zz} \end{bmatrix}, \tag{3.2}$$

$$\boldsymbol{\gamma} \equiv \begin{bmatrix} 0 & \gamma_{r\theta} & 0 \\ \gamma_{\theta r} & 0 & \gamma_{\theta z} \\ 0 & \gamma_{z\theta} & 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{\kappa} \equiv \begin{bmatrix} \kappa_{rr} & 0 & \kappa_{rz} \\ 0 & \kappa_{\theta\theta} & 0 \\ \kappa_{zr} & 0 & \kappa_{zz} \end{bmatrix}, \tag{3.3}$$

وهنا ننوه بأن المركبات الموجودة في العلاقات السابقة تتبع فقط للموضع $(r\ ,z)$ وللزمن t.

أولاً : الوصف التقليدي (العام):

يتألف الوصف التقليدي (العام) لحالة التناظر المحوري الثانية للانفعالات المرنة للجسم الصلب المرن المدروس (E–N:5)، من المعادلات والعلاقات الأساسية والشروط الحدية والابتدائية التالية [1,3]:

معادلات الحركة في $\Omega \times T_+$:

$$2\sigma_{[\theta z]} + \partial_r \mu_{rr} + \partial_z \mu_{zr} + r^{-1}\left(\mu_{rr} - \mu_{\theta\theta}\right) + Y_r = J\,\ddot{\varphi}_r \ , \qquad (3.4)$$

$$2\sigma_{[r\theta]} + \left(r^{-1} + \partial_r\right)\mu_{rz} + \partial_z \mu_{zz} + Y_z = J\,\ddot{\varphi}_z \ , \qquad (3.5)$$

$$\partial_r \sigma_{r\theta} + \partial_z \sigma_{z\theta} + 2r^{-1}\sigma_{(r\theta)} + X_\theta = \rho\,\ddot{u}_\theta \ , \qquad (3.6)$$

حيث :، $\sigma_{[\theta z]} = \frac{1}{2}\left(\sigma_{\theta z} - \sigma_{z\theta}\right)$, $\sigma_{[r\theta]} = \frac{1}{2}\left(\sigma_{r\theta} - \sigma_{\theta r}\right)$, $\sigma_{r\theta} = \frac{1}{2}\left(\sigma_{r\theta} + \sigma_{\theta r}\right)$

$$\partial_r = \frac{\partial}{\partial r} \ , \ \partial_z = \frac{\partial}{\partial z} \ ,$$

كما أن كلاً من ρ و J، على الترتيب، هما الكتلة الحجمية للجسم ، والعطالة الدورانية له، وهما مقداران ثابتان؛ لأن الجسم متجانس. إضافةً إلى ما تقدم فإن: $X = \left(0, X_\theta, 0\right)$ و $Y = \left(Y_r, 0, Y_z\right)$، على الترتيب، هما القوة الحجمية والعزم الحجمي للجسم المعتبر، كما أن رمز النقطة يعني الاشتقاق الجزئي بالنسبة للزمن ،

معادلات توافق الانفعالات في $\Omega \times T$:

$$\begin{aligned}
&\partial_z\left(\gamma_{r\theta}+\gamma_{\theta r}\right)+\left(r^{-1}-\partial_r\right)\left(\gamma_{z\theta}+\gamma_{\theta z}\right)=0\,,\\
&\partial_z\gamma_{\theta r}+r^{-1}\gamma_{z\theta}-\kappa_{zz}-\kappa_{\theta\theta}=0\,,\\
&\partial_r\left(r\gamma_{\theta r}\right)+\gamma_{r\theta}-r\,\kappa_{rz}=0\,,\\
&\kappa_{rr}+\partial_r\gamma_{\theta z}=0\quad,\quad\kappa_{\theta\theta}+r^{-1}\gamma_{\theta z}=0,\\
&\qquad\kappa_{zz}+\partial_z\gamma_{\theta z}=0\;,
\end{aligned}\tag{3.7}$$

العلاقات التأسيسية، المحققة في $\Omega\times\mathrm{T}$:

$$\begin{aligned}
&\mu_{rr}=2\gamma\,\kappa_{rr}+\beta\,\kappa\,,\\
&\mu_{\theta\theta}=2\gamma\,\kappa_{\theta\theta}+\beta\,\kappa\,,\\
&\mu_{zz}=2\gamma\,\kappa_{zz}+\beta\,\kappa\,,\\
&\mu_{rz}=\left(\gamma+\varepsilon\right)\kappa_{rz}+\left(\gamma-\varepsilon\right)\kappa_{zr}\,,\\
&\mu_{zr}=\left(\gamma+\varepsilon\right)\kappa_{zr}+\left(\gamma-\varepsilon\right)\kappa_{rz}\,,\\
&\sigma_{r\theta}=\left(\mu+\alpha\right)\gamma_{r\theta}+\left(\mu-\alpha\right)\gamma_{\theta r}\,,\\
&\sigma_{\theta r}=\left(\mu+\alpha\right)\gamma_{\theta r}+\left(\mu-\alpha\right)\gamma_{r\theta}\,,\\
&\sigma_{\theta z}=\left(\mu+\alpha\right)\gamma_{\theta z}+\left(\mu-\alpha\right)\gamma_{z\theta}\,,\\
&\sigma_{z\theta}=\left(\mu+\alpha\right)\gamma_{z\theta}+\left(\mu-\alpha\right)\gamma_{\theta z}\,,
\end{aligned}\tag{3.8}$$

حيث: $\kappa=\kappa_{rr}+\kappa_{\theta\theta}+\kappa_{zz}$ ، كما أن: $\mu,\alpha,\beta,\gamma,\varepsilon\in R_+$ ثوابت المرونة للجسم.

العلاقات الهندسية المحققة في $\Omega\times\mathrm{T}_+$:

$$\begin{aligned}
&\kappa_{rr}=\partial_r\varphi_r\;,\kappa_{\theta\theta}=r^{-1}\varphi_r\;,\;\kappa_{zz}=\partial_z\varphi_z\;,\\
&\kappa_{rz}=\partial_r\varphi_z\;\;,\kappa_{zr}=\partial_z\varphi_r\;,\\
&\gamma_{r\theta}=\partial_r u_\theta-\varphi_z\;,\;\gamma_{\theta r}=\varphi_z-r^{-1}u_\theta\,,\\
&\gamma_{z\theta}=\partial_z u_\theta+\varphi_r\;\;,\;\;\gamma_{\theta z}=-\varphi_r\;,
\end{aligned}\tag{3.9}$$

ونضيف إلى ماتقدم الشروط الحدية والابتدائية التالية:

الشروط الحدية على $\partial\Omega \times \mathrm{T}$:

$$n_r \mu_{rr} + n_z \mu_{zr} = m_r \ , n_r \mu_{rz} + n_z \mu_{zz} = m_z \ , \quad n_r \sigma_{r\theta} + n_z \sigma_{z\theta} = p_\theta \ , \qquad (3.10)$$

حيث الدوال: $m_z \ , p_\theta \ , m_z \ : \partial\Omega \times \mathrm{T} \to R$ مفروضة، و $\mathbf{n} \equiv (n_r, 0, n_z)$ هي المركبات الاسطوانية لمتجه واحدة الناظم الخارجي على السطح $\partial\Omega$.

الشروط الابتدائية في $\Omega \times \{0\}$:

$$(\varphi_r, u_\theta, \varphi_z) = (h_r, h_\theta, h_z) \ , \ (\dot{\varphi}_r, \dot{u}_\theta, \dot{\varphi}_z) = (\ell_r, \ell_\theta, \ell_z) \ , \qquad (3.11)$$

حيث الدوال: $h_r, h_\theta, h_z \ , \ \ell_r, \ell_\theta, \ell_z \ : \Omega \to R$ مفروضة.

هدف مسألة الوصف التقليدي (العام) للجسم الصلب المرن دقيق الاستقطاب، المعتبر، ضمن حالة التناظر المحوري الثانية لانفعالاته المرنة، هو إيجاد مجموعة الحقول الفيزيائية $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\kappa})$*، المحققة للمسألة (3.11)-(3.1).*

ثانياً : الوصف الإزاحي- الدوراني [1]:

نحصل على هذه المسألة بحذف الحقول الفيزيائية: $\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\mu}$ من الوصف التقليدي (العام) (3.11)-(3.1)، فنحصل بعد التبسيط والاختصار على مسألة الوصف الإزاحي-الدوراني التالية، المكوّنة من مجموعة المعادلات والشروط الحدية والابتدائية التالية:

معادلات الإزاحات والدورانات، المحققة في $\Omega \times \mathrm{T}_+$:

$$\begin{aligned} &\Box_4^0 \varphi_r + (\beta + \gamma - \varepsilon)\partial_r \kappa - 2\alpha \partial_z u_\theta + Y_r = 0 \ , \\ &\Box_4 \varphi_z + (\beta + \gamma - \varepsilon)\partial_z \kappa + 2\alpha r^{-1} \partial_r (r u_\theta) + Y_z = 0 \ , \\ &\Box_2^0 u_\theta + 2\alpha(\partial_z \varphi_r - \partial_r \varphi_z) + X_\theta = 0 \ , \end{aligned} \qquad (3.12)$$

حيث:

$$\kappa = r^{-1}\partial_r\left(r\,\varphi_r\right)+\partial_z\,\varphi_z\ \ ,\ \ \square_2^0=\left(\mu+\alpha\right)\Delta_0-\rho\,\partial_t^2\ ,$$
$$\square_4=\left(\gamma+\varepsilon\right)\Delta-4\alpha-J\ \partial_t^2\ ,\ \ \square_4^0=\left(\gamma+\varepsilon\right)\Delta_0-4\alpha-J\ \partial_t^2\ ,\quad (3.13)$$
$$\Delta=\partial_r^2+r^{-1}\partial_r+\partial_z^2\ ,\ \Delta_0=\Delta-r^{-2},$$

الشروط الحدية على $\partial\Omega \times \mathrm{T}$:

$$\begin{aligned}&n_r\{\,2\gamma\,\partial_r\varphi_r+\beta\,[r^{-1}\partial_r\left(r\,\varphi_r\right)+\partial_z\,\varphi_z\,]\}+\\&+n_z\,[(\gamma+\varepsilon)\ \partial_z\varphi_r+(\gamma-\varepsilon)\ \partial_r\varphi_z\,]=m_r\ ,\end{aligned}\qquad (3.14)$$

$$\begin{aligned}&n_r[(\gamma+\varepsilon)\ \partial_r\varphi_z\ +(\gamma-\varepsilon)\ \partial_z\varphi_r\,]+\\&+n_z\,\{\,2\gamma\,\partial_z\,\varphi_z+\beta\,[r^{-1}\partial_r\left(r\,\varphi_r\right)+\partial_z\,\varphi_z\,]\}=m_z\ ,\end{aligned}\qquad (3.15)$$

$$\begin{aligned}&n_r\,[(\mu+\alpha)\,(\partial_r u_\theta-\varphi_z\,)+(\mu-\alpha)\,(\varphi_z\ -r^{-1}u_\theta)]+\\&+n_z\ [(\mu+\alpha)\,(\partial_z u_\theta+\varphi_r)-(\mu-\alpha)\,\varphi_r\,]=p_\theta\ ,\end{aligned}\qquad (3.16)$$

نضيف إلى ما تقدم ، العلاقات الهندسية (3.9) والعلاقات التأسيسية (3.8) والشروط الابتدائية (3.11)، ونسمي المسألة الناتجة بمسألة القيم الحدية والابتدائية، الإزاحية الدورانية للجسم المدروس (E−N:5)، المتجانس والمتماثل المناحي، ضمن حالة التناظر المحوري الثانية لانفعالاته المرنة.

هدف مسألة الوصف الإزاحي-الدوراني للجسم الصلب المرن دقيق الاستقطاب، المعتبر، ضمن حالة التناظر المحوري الثانية لانفعالاته المرنة، هو إيجاد مجموعة الحقول الفيزيائية $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\varphi}\ , \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\mu}\ , \boldsymbol{\gamma}\ , \boldsymbol{\kappa})$*، المحققة للمسألة (3.16)-(3.11) و (3.8) و(3.9).*

ثالثاً: طريقة متجه تشيفر في حل مسألة القيم الحدية والابتدائية الإزاحية - الدورانية للجسم المعتبر ضمن حالة التناظر المحوري الثانية لانفعالات المرنة:

لمناقشة هذه الطريقة، نعرِّف متجه تشفير : $\xi=\left(\xi_r, 0, \xi_z\right)$ بالشكل التالي:

$$\zeta_r=-\frac{1}{2}\partial_z u_\theta-\varphi_r\ \ ,\ \zeta_z=\frac{1}{2}\left(r^{-1}+\partial_r\right)u_\theta-\varphi_z\ \ ,\qquad (3.17)$$

ونفرض أن:

$$\begin{aligned}&\varphi_r=\varphi_r^0+\varphi_r' \,, u_\theta=u_\theta^0+u_\theta' \,,\ \varphi_z=\varphi_z^0+\varphi_z' \,,\\&\zeta_r=\zeta_r^0+\zeta_r' \,,\ \zeta_z=\zeta_z^0+\zeta_z' \,, Y_r=Y_r^{\,0}+Y_r' \,,\\&Y_z=Y_z^{\,0}+Y_z' \,,\end{aligned} \tag{3.18}$$

حيث الحقول: $\left(\varphi_r^0,u_\theta^0,\varphi_z^0\right)$ تتعلق بالجسم الصلب المرن في إطار المرونة الخطية التقليدية ضمن حالة التناظر المحوري الثانية للانفعالات المرنة التقليدية، أما الحقول: $\left(\varphi_r',u_\theta',\varphi_z'\right)$ فتسمى بالإزاحات والدورانات، المتممة (الزائدة) (أي: الزائدة عن التقليدية). فيما يلي سنناقش كلاً من مسألة القيم الحدية والابتدائية الكلاسيكية، للحقول الكلاسيكية $\left(\varphi_r^0,u_\theta^0,\varphi_z^0\right)$، ومسألة القيم الحدية والابتدائية المتممة (الزائدة) للحقول المتممة (الزائدة) $\left(\varphi_r',u_\theta',\varphi_z'\right)$.

ثالثاً - 1 : مسألة القيم الحدية والابتدائية، الكلاسيكية، المتعلقة بالحقول الكلاسيكية $\left(\varphi_r^0,u_\theta^0,\varphi_z^0\right)$: نحصل على هذه المسألة باتباع ما يلي:

نوضع: $\zeta_r^0=\zeta_z^0=0$ في المعادلة الثالثة من المعادلات (3.12)، نحصل على المعادلة الكلاسيكية، التالية المحققة في $\Omega \times T_+$:

$$\overset{*}{\square}{}_2^0\, u_\theta^0+X_\theta=0 \,, \tag{3.19}$$

حيث المؤثر: $\overset{*}{\square}{}_2^0$ هو المؤثر الناتج عن وضع: $\alpha=0$ في المؤثر $\square_2^0$ ؛

ومن الشروط الحدية (3.16)−(3.14) (أو (3.10))، نحصل على الشروط الحدية التقليدية التالية، المحققة على $\partial\Omega \times T$:

$$n_r\,\sigma_{r\theta}^0+n_z\,\sigma_{z\theta}^0=p_\theta \,, \tag{3.20}$$

حيث : $\sigma_{r\theta}^0$ و $\sigma_{z\theta}^0$ على الترتيب، هي الجزء الكلاسيكي لكل من $\sigma_{r\theta}$ و $\sigma_{z\theta}$؛ حيث:

$$\sigma_{r\theta}^0=2\mu\,\varepsilon_{r\theta}^0 \,,\quad \sigma_{z\theta}^0=2\mu\,\varepsilon_{z\theta}^0 \,, \tag{3.21}$$

علماً أن:

$$\varepsilon^0_{r\theta} = \frac{1}{2}(\partial_r - r^{-1})\, u^0_\theta \ , \quad \varepsilon^0_{z\theta} = \frac{1}{2}\partial_z u^0_\theta \ ,$$

أخيراً، من الشروط الإبتدائية (3.11)، نحصل على الشروط الإبتدائية، الكلاسيكية، التالية المحققة في $\Omega\times\{0\}$:

$$u^0_\theta = h_\theta \ , \ \dot{u}^0_\theta = \ell_\theta \ , \tag{3.22}$$

ثالثاً- 2 : مسألة القيم الحدية والابتدائية، المتممة (الزائدة)، المتعلقة بالحقول المتممة (الزائدة) $(\varphi'_r, u'_\theta, \varphi'_z)$:

من أجل استنتاج المعادلات والعلاقات الناظمة للحقول المتممة $(\varphi'_r, u'_\theta, \varphi'_z)$ يلزمنا إثبات صحة المعادلتين، التاليتين، المحققتين في $\Omega \times T_+$:

$$\overset{*}{\Box}{}^0_2\, \varphi^0_r - \frac{1}{2}\partial_z X_\theta = 0 \ , \tag{3.23}$$

$$\overset{*}{\Box}_2\, \varphi^0_z + \frac{1}{2}\left(r^{-1} + \partial_r\right) X_\theta = 0 \ , \tag{3.24}$$

حيث المؤثر: $\overset{*}{\Box}_2$ ينتج عن وضع: $\alpha = 0$ في المؤثر: $\Box_2 := (\mu+\alpha)\,\Delta - \rho\,\partial^2_t$.

الإثبات:

من العلاقة (3.17) ، لأجل $\zeta_0 = 0$، بحصل على:

$$\varphi^0_r = -\frac{1}{2}\partial_z u^0_\theta \ , \ \varphi^0_z = \frac{1}{2}\left(r^{-1} + \partial_r\right) u^0_\theta \tag{3.25}$$

1. باشتقاق طرفي المعادلة (3.19)، جزئياً بالنسبة لـ z ، نجد:

$$\partial_z \overset{*}{\Box}{}^0_2\, u^0_\theta + \partial_z X_\theta = 0 \ , \tag{3.26}$$

بالتالي:

$$\overset{*}{\Box}{}_2^0\left(-\frac{1}{2}\partial_z u_\theta^0\right)-\frac{1}{2}\partial_z X_\theta=0\,, \qquad (3.27)$$

تنتج (3.23) مباشرةً عن المعادلتين (3.27) و $(3.25)_1$.

2. أما لإثبات صحة المعادلة(3.24)، نطبق المؤثر $\frac{1}{2}\left(r^{-1}+\partial_r\right)$ على طرفي المعادلة (3.19)، فنحصل على المعادلة التالية، المحققة في $\Omega \times T_+$:

$$\frac{1}{2}\left(r^{-1}+\partial_r\right)\overset{*}{\Box}{}_2^0 u_\theta^0+\frac{1}{2}\left(r^{-1}+\partial_r\right)X_\theta=0\,, \qquad (3.28)$$

وبما أن [1,3]:

$$\left(r^{-1}+\partial_r\right)\overset{*}{\Box}{}_2^0 = \overset{*}{\Box}{}_2\left(r^{-1}+\partial_r\right), \qquad (3.29)$$

فتصبح المعادلة (3.28) بالشكل:

$$\overset{*}{\Box}{}_2\left[\frac{1}{2}\left(r^{-1}+\partial_r\right)u_\theta^0\right]+\frac{1}{2}\left(r^{-1}+\partial_r\right)X_\theta=0\,, \qquad (3.30)$$

تنتج المعادلة (3.24) مباشرةً من المعادلتين (3.30) و $(3.25)_2$.

الآن لاستنتاج جملة المعادلات التفاضلية المتعلقة بالحقول المتممة (الزائدة) $(\varphi_r',u_\theta',\varphi_z')$،

نطبق المؤثر $\overset{*}{\Box}{}_2^0$ على طرفي المعادلة$(3.12)_1$، والمؤثر $\overset{*}{\Box}{}_2$ على طرفي المعادلة $(3.12)_2$، فنحصل على جملة المعادلتين التاليتين المحققتين في $\Omega \times T_+$:

$$\overset{*}{\square}{}_2^0\left[\square_4^0\,\varphi_r+\left(\beta+\gamma-\varepsilon\right)\partial_r\kappa-2\alpha\,\partial_z\,u_\theta\right]+\overset{*}{\square}{}_2^0 Y_r=0\,,$$
$$\overset{*}{\square}{}_2\left[\square_4\,\varphi_z+\left(\beta+\gamma-\varepsilon\right)\partial_z\,\kappa+2\alpha r^{-1}\,\partial_r(r\,u_\theta)\right]+\overset{*}{\square}{}_2 Y_z=0\;, \qquad (3.31)$$

الآن، ينتج عن المعادلتين $(3.31)_1$ و (3.23) ، وعن المعادلتين $(3.31)_2$ و (3.24)،

وعن المعادلتين $(3.12)_3$ و (3.19)، وعن كون أن: $(\kappa^0=0)$، أن الثلاثية $(\varphi_r',u_\theta',\varphi_z')$

تحقق جملة المعادلات التفاضلية المتممة، التالية في $\Omega\times T_+$:

$$\overset{*}{\square}{}_2^0\left[\square_4^0\,\varphi_r'+\left(\beta+\gamma-\varepsilon\right)\partial_r\kappa'-2\alpha\,\partial_z\,u_\theta'\right]+\hat{Y}_r=0\,, \qquad (3.32)$$

$$\overset{*}{\square}{}_2\left[\square_4\,\varphi_z'+\left(\beta+\gamma-\varepsilon\right)\partial_z\,\kappa'+2\alpha r^{-1}\,\partial_r(r\,u_\theta')\right]+\hat{Y}_z=0\;, \qquad (3.33)$$

$$\square_2^0\,u_\theta'+2\alpha\left(\partial_z\,\varphi_r'-\partial_r\,\varphi_z'\right)+\hat{X}_\theta=0\,, \qquad (3.34)$$

حيث : $\kappa'=r^{-1}\partial_r\left(r\varphi_r'\right)+\partial_z\varphi_z'$ ، كما أن:

$$\hat{Y}_r=\overset{*}{\square}{}_2^0 Y_r+\frac{1}{2}\overset{*}{\square}{}_4^0\,\partial_z X_\theta\;\;,\hat{Y}_z=\overset{*}{\square}{}_2 Y_z-\frac{1}{2}\overset{*}{\square}{}_4\left(r^{-1}+\partial_r\right)X_\theta\;\;,\;\hat{X}_\theta=0$$

نضيف إلى المعادلات السابقة الشروط الحدية والابتدائية التالية الناتجة عن الشروط الحدية والابتدائية الأصلية، وذلك باتباع مايلي:

من الشروط الحدية الأصلية $(3.16)-(3.14)$، نحصل على الشروط الحدية المتممة (أو الزائدة)، التالية المحققة في $\partial\Omega\times T$:

$$\begin{aligned}&n_r\,[(\mu+\alpha)\,(\partial_r u_\theta'-\varphi_z')+(\mu-\alpha)\,(\varphi_z'-r^{-1}u_\theta')]+\\&+n_z\,[(\mu+\alpha)\,(\partial_z u_\theta'+\varphi_r')-(\mu-\alpha)\,\varphi_r']=0\,,\end{aligned} \qquad (3.35)$$

$$\begin{aligned}&n_r\{\,2\gamma\,\partial_r\varphi_r'+\beta\,[r^{-1}\,\partial_r\left(r\,\varphi_r'\right)+\partial_z\,\varphi_z']\}+\\&+n_z[(\gamma+\varepsilon)\;\partial_z\varphi_r'+(\gamma-\varepsilon)\;\partial_r\varphi_z']=m_r-m_r^0\,,\end{aligned} \qquad (3.36)$$

$$n_r[(\gamma+\varepsilon)\,\partial_r\varphi'_z+(\gamma-\varepsilon)\,\partial_z\varphi'_r]+ \\ +n_z\{2\gamma\,\partial_z\varphi'_z+\beta[r^{-1}\partial_r\left(r\,\varphi'_r\right)+\partial_z\,\varphi'_z]\}=m_z-m_z^0\,, \qquad (3.37)$$

ومن الشروط الإبتدائية الأصلية (3.11)، نحصل على الشروط الإبتدائية المتممة التالية المحققة في $\Omega\times\{0\}$:

$$\varphi'_r=h_r-\varphi_r^0\ ,\ u'_\theta=0\ ,\ \varphi'_z=h_z-\varphi_z^0\ , \qquad (3.38)$$

$$\dot\varphi'_r=\ell_r-\dot\varphi_r^0\ ,\ \dot u'_\theta=0\ ,\ \dot\varphi'_z=\ell_z-\dot\varphi_z^0 \qquad (3.39)$$

حيث هنا نشير إلى أنه في الشروط الحدية والابتدائية السابقة المقادير:

$$m_r^0=n_r\,\mu_{rr}^0+n_z\,\mu_{zr}^0\ ,\ m_z^0=n_r\,\mu_{rz}^0+n_z\,\mu_{zz}^0 \qquad (3.40)$$

والمقادير $\varphi_r^0,\varphi_z^0,\dot\varphi_r^0,\dot\varphi_z^0$ تنتج عن مسألة القيم الحدية والابتدائية الكلاسيكية (3.19)–(3.22) وعن العلاقات:

$$\varphi_r^0=-\frac{1}{2}\partial_z u_\theta^0\ ,\ \varphi_z^0=\frac{1}{2}\left(r^{-1}+\partial_r\right)u_\theta^0$$

كما أن:

$$\mu_{rr}^0=2\gamma\kappa_{rr}^0+\beta\,\kappa^0\ ,\ \mu_{\theta\theta}^0=2\gamma\,\kappa_{\theta\theta}^0+\beta\,\kappa^0\ ,\ \mu_{zz}^0=2\gamma\,\kappa_{zz}^0+\beta\,\kappa^0\ , \\ \mu_{rz}^0=\left(\gamma+\varepsilon\right)\kappa_{rz}^0+\left(\gamma-\varepsilon\right)\kappa_{zr}^0\ ,\ \mu_{zr}^0=\left(\gamma+\varepsilon\right)\kappa_{zr}^0+\left(\gamma-\varepsilon\right)\kappa_{rz}^0\ , \qquad (3.41) \\ \kappa^0=\kappa_{rr}^0+\kappa_{\theta\theta}^0+\kappa_{zz}^0=0\ ,$$

و:

$$\kappa_{rr}^0=\partial_r\,\varphi_r^0\ ,\ \kappa_{\theta\theta}^0=r^{-1}\,\varphi_r^0\ ,\ \kappa_{zz}^0=\partial_z\,\varphi_z^0\ , \\ \kappa_{rr}^0=\partial_r\,\varphi_r^0\ ,\ \kappa_{\theta\theta}^0=r^{-1}\,\varphi_r^0\ ,\ \kappa_{zz}^0=\partial_z\,\varphi_z^0\ , \qquad (3.42) \\ \kappa_{rz}^0=\partial_r\,\varphi_z^0\ ,\ \kappa_{zr}^0=\partial_z\,\varphi_r^0\ ,$$

ومع العلم أن:

$$\varphi_r^0\left(r,z\right)=\lim_{t\to 0}\varphi_r^0\left(r,z,t\right)\ ,\ \varphi_z^0\left(r,z\right)=\lim_{t\to 0}\varphi_z^0\left(r,z,t\right)\ ,$$

$$\dot{\varphi}_r^0(r,z)=\lim_{t\to 0}\frac{\partial\varphi_r^0}{\partial t}(r,z,t)\ ,\ \ \dot{\varphi}_z^0(r,z)=\lim_{t\to 0}\frac{\partial\varphi_z^0}{\partial t}(r,z,t)$$

آلية حل المسألة: بحل مسألة القيم الحدية والابتدائية التقليدية (3.22)−(3.19)، نحصل على الحل التقليدي $(\varphi_r^0,u_\theta^0,\varphi_z^0)$، وبحل مسألة القيم الحدية والابتدائية (الزائدة) (3.39)−(3.32)، نحصل على الحقول المتممة الزائدة $(\varphi_r',u_\theta',\varphi_z')$. نعوض ماتقدم في العلاقات $(3.18)_{1\text{-}3}$، فنحصل على الثلاثية $(\varphi_r,u_\theta,\varphi_z)$. نعوض $(\varphi_r,u_\theta,\varphi_z)$ في العلاقات الهندسية الأصلية فنحصل على الانفعالات، وإذا عوضنا هذه الانفعالات الناتجة في العلاقات التأسيسية الأصلية، نحصل على الإجهادات.

4) النتائج والمناقشة:

تعميم طريقة متجه شيفر إلى حل مسألة الوصف التقليدي العام (3.11)−(3.1) للجسم الصلب المرن دقيق الإستقطاب (E-N:5) ضمن حالة التناظر المحوري الثانية للانفعالات المرنة لهذا الجسم:

لهذا الغرض نفرض في المسألة (3.11)−(3.1) أن:

$$\begin{aligned}&\mathbf{u}=\mathbf{u}^0+\mathbf{u}'\ ,\ \boldsymbol{\varphi}=\boldsymbol{\varphi}^0+\boldsymbol{\varphi}'\ ,\\&\boldsymbol{\sigma}=\boldsymbol{\sigma}^0+\boldsymbol{\sigma}'\ ,\ \boldsymbol{\mu}=\boldsymbol{\mu}^0+\boldsymbol{\mu}'\ ,\ \boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{\varepsilon}^0+\boldsymbol{\gamma}'\ ,\\&\boldsymbol{\kappa}=\boldsymbol{\kappa}^0+\boldsymbol{\kappa}'\ ,\ \mathbf{Y}=\mathbf{Y}^0+\mathbf{Y}'\ ,\end{aligned}\tag{4.1}$$

حيث الحقول $(\mathbf{u}^0,\boldsymbol{\varphi}^0,\boldsymbol{\sigma}^0,\boldsymbol{\mu}^0,\boldsymbol{\varepsilon}^0,\boldsymbol{\kappa}^0)$ و $\mathbf{Y}^0$ ، تتعلَّق بالمرونة الخطية ، الكلاسيكية والديناميكية (موديل Hooke) ضمن حالة التناظر المحوري الثانية للانفعالات المرنة لهذا الجسم، أما الحقول $(\mathbf{u}',\boldsymbol{\varphi}',\boldsymbol{\sigma}',\boldsymbol{\mu}',\boldsymbol{\gamma}',\boldsymbol{\kappa}')$ و $\mathbf{Y}'$ فهي الحقول المتممة، أو الزائدة عن حقول الجسم Hooke. فيما يلي سنستنتج كلاً من مسألة القيم الحدية الإبتدائية الكلاسيكية المتعلقة بـ $(\mathbf{u}^0,\boldsymbol{\varphi}^0,\boldsymbol{\sigma}^0,\boldsymbol{\mu}^0,\boldsymbol{\varepsilon}^0,\boldsymbol{\kappa}^0)$ ومسألة القيم الحدية الإبتدائية المتممة (أو الزائدة) المتعلقة بالحقول المتممة (أو الزائدة) $(\mathbf{u}',\boldsymbol{\varphi}',\boldsymbol{\sigma}',\boldsymbol{\mu}',\boldsymbol{\gamma}',\boldsymbol{\kappa}')$.

4 −1 : مسألة القيم الحدية الإبتدائية الكلاسيكية المتعلقة بالحقول الكلاسيكية $(\mathbf{u}^0,\boldsymbol{\varphi}^0,\boldsymbol{\sigma}^0,\boldsymbol{\mu}^0,\boldsymbol{\varepsilon}^0,\boldsymbol{\kappa}^0)$*:* نحصل عليها باتباع مايلي.

من المعادلة (3.6) نحصل على:

معادلة الحركة الكلاسيكية التالية المحققة في $\Omega \times T_+$:

$$\partial_r \sigma^0_{r\theta} + \partial_z \sigma^0_{z\theta} + 2r^{-1}\sigma^0_{r\theta} + X_\theta = \rho\, \ddot{u}^0_\theta \,, \tag{4.2}$$

من معادلات توافق الإنفعالات (3.7)، نحصل على معادلات توافق الانفعالات الكلاسيكية التالية المحققة في $\Omega \times T$:

$$2\partial_z \varepsilon^0_{r\theta} + 2\left(r^{-1} - \partial_r\right)\varepsilon^0_{z\theta} = 0 \,,$$

$$\partial_z \varepsilon^o_{\theta r} + r^{-1}\varepsilon^0_{z\theta} - \kappa^0_{zz} - \kappa^0_{\theta\theta} = 0 \,, \quad \partial_r\left(r\,\varepsilon^0_{\theta r}\right) + \varepsilon^0_{r\theta} - r\,\kappa^0_{rz} = 0 \,,$$

$$\kappa^0_{rr} + \partial_r \varepsilon^0_{\theta z} = 0 \,,\ \kappa^0_{\theta\theta} + r^{-1}\varepsilon^0_{\theta z} = 0 \,,\ \kappa^0_{zz} + \partial_z \varepsilon^0_{\theta z} = 0 \,,$$

والتي إذا حذفنا منها انفعالات العزم، التقليدية نحصل على معادلة واحدة فقط ، هي:

معادلة توافق الانفعالات الكلاسيكية المحققة في $\Omega \times T$:

$$\partial^2_{rz}\left(r\,\varepsilon^0_{\theta z}\right) - r\,\partial^2_z \varepsilon^0_{\theta r} - 2\partial_z \varepsilon^o_{z\theta} = 0 \,, \tag{4.3}$$

ومن العلاقات الهندسية (3.9) نحصل على العلاقات الهندسية الكلاسيكية التالية المحققة في $\Omega \times T_+$:

$$\begin{aligned}
&\kappa^0_{rr} = \partial_r \varphi^0_r \,,\ \kappa^0_{\theta\theta} = r^{-1}\varphi^0_r \,,\ \kappa^0_{zz} = \partial_z \varphi^0_z \,,\\
&\kappa^0_{rz} = \partial_r \varphi^0_z \,,\ \kappa^0_{zr} = \partial_z \varphi^0_r \,,\\
&\varepsilon^0_{r\theta} = \partial_r u^0_\theta - \varphi^0_z \,,\ \varepsilon^0_{\theta r} = \varphi^0_z - r^{-1}u^0_\theta \,,\\
&\varepsilon^0_{zr} = \partial_z u^0_\theta + \varphi^0_r \,,\ \varepsilon^0_{\theta z} = -\varphi^0_r \,,
\end{aligned} \tag{4.4}$$

والتي بالاعتماد على تعريف الدورانين الكلاسيكيين: φ^0_r و φ^0_z :

$$\varphi^0_r = -\frac{1}{2}\partial_z u^0_\theta \,,\ \varphi^0_z = \frac{1}{2}\left(r^{-1} + \partial_r\right)u^0_\theta \tag{4.5}$$

فإن العلاقات الأربعة الأخيرة في (4.4)، تعطينا:

العلاقات الهندسية الكلاسيكية التالية المحققة في $\Omega \times T_+$:

$$\varepsilon^0_{r\theta} = \varepsilon^0_{\theta r} \ , \ \varepsilon^0_{z\theta} = \varepsilon^0_{\theta z} \ ,$$
$$\varepsilon^0_{r\theta} = \frac{1}{2}\left(\partial_r - r^{-1}\right) u^0_\theta \ , \ \varepsilon^0_{z\theta} = \frac{1}{2}\partial_z u^0_\theta \ , \tag{4.6}$$

ويتضح هنا تناظر حقل الانفعالات التنسوري، الكلاسيكي.

ومن العلاقات التأسيسية (3.8) نحصل على العلاقات التأسيسية الكلاسيكية، التالية، المحققة في $\Omega \times T$:

$$\mu^0_{rr} = 2\gamma\,\kappa^0_{rr} + \beta\,\kappa^0 \ , \ \mu^0_{\theta\theta} = 2\gamma\,\kappa^0_{\theta\theta} + \beta\,\kappa^0 \ , \ \mu^0_{zz} = 2\gamma\,\kappa^0_{zz} + \beta\,\kappa^0 ,$$
$$\kappa^0 = \kappa^0_{rr} + \kappa^0_{\theta\theta} + \kappa^0_{zz} = 0 ,$$
$$\mu^0_{rz} = (\gamma + \varepsilon)\kappa^0_{rz} + (\gamma - \varepsilon)\kappa^0_{zr} \ , \ \mu^0_{zr} = (\gamma + \varepsilon)\kappa^0_{zr} + (\gamma - \varepsilon)\kappa^0_{rz} \ , \tag{4.7}$$
$$\sigma^0_{r\theta} = (\mu + \alpha)\,\varepsilon^0_{r\theta} + (\mu - \alpha)\ \varepsilon^0_{\theta r} \ , \ \sigma^0_{\theta r} = (\mu + \alpha)\,\varepsilon^0_{\theta r} + (\mu - \alpha)\varepsilon^0_{r\theta} ,$$
$$\sigma^0_{\theta z} = (\mu + \alpha)\varepsilon^0_{\theta z} + (\mu - \alpha)\varepsilon^0_{z\theta} \ , \ \sigma^0_{z\theta} = (\mu + \alpha)\,\varepsilon^0_{z\theta} + (\mu - \alpha)\varepsilon^0_{\theta z} ,$$

وكون تنسور الانفعالات الكلاسيكية متناظر ،فإن العلاقات الأربعة الأخيرة في (4.7) تعطينا :

العلاقات التأسيسية الكلاسيكية، التالية، المحققة في $\Omega \times T$:

$$\sigma^0_{r\theta} = \sigma^0_{\theta r} \ , \ \sigma^0_{\theta z} = \sigma^0_{z\theta} \ ,$$
$$\sigma^0_{r\theta} = 2\mu\,\varepsilon^0_{r\theta} \ , \ \sigma^0_{\theta z} = 2\mu\,\varepsilon^0_{\theta z} \ , \tag{4.8}$$

ومن الشروط الحدية (3.10) ، نحصل على:

الشروط الحدية التقليدية، التالية المحققة على $\partial\Omega \times T$:

$$n_r\,\sigma^0_{r\theta} + n_z\,\sigma^0_{z\theta} = p_\theta \ , \tag{4.9}$$

أخيراً من الشروط الابتدائية (3.11)، نحصل على:

الشروط الابتدائية، الكلاسيكية، التالية، المحققة في $\Omega\times\{0\}$:

$$u^0_\theta = h_\theta \ , \ \dot{u}^0_\theta = \ell_\theta \ , \tag{4.10}$$

ندعو المسألة (4.10)-(4.2) بالمسألة الكلاسيكية للوصف التقليدي العام للجسم (E-N:5) ضمن حالة التناظر المحوري الثانية للانفعالات المرنة له.

4-2: مسألة القيم الحدية والابتدائية المتممة(أو الزائدة) المتعلقة بالحقول الزائدة $(\mathbf{u}', \boldsymbol{\varphi}', \boldsymbol{\sigma}', \boldsymbol{\mu}', \boldsymbol{\gamma}', \boldsymbol{\kappa}')$*:* من أجل الحصول على هذه المسألة يلزمنا صياغة وإثبات المبرهنة المساعدة التالية.

مبرهنة مساعدة: إن الحقول الكلاسيكية $(\boldsymbol{\varphi}^0, \boldsymbol{\mu}^0)$ تحقق في $\Omega \times T_+$ جملة المعادلتين:

$$\overset{*}{\square}{}_2^0\left[\left(r^{-1}+\partial_r\right)\mu_{rr}^0+\partial_z\,\mu_{zr}^0-r^{-1}\mu_{\theta\theta}^0-J\,\ddot{\varphi}_r^0\right]=\frac{1}{2}\overset{*}{\square}{}_4^0\,\partial_z X_\theta\,, \qquad (4.11)$$

$$\overset{*}{\square}{}_2\left[\left(r^{-1}+\partial_r\right)\mu_{rz}^0+\partial_z\,\mu_{zz}^0-J\,\ddot{\varphi}_z^0\right]=-\frac{1}{2}\overset{*}{\square}{}_4\left(r^{-1}+\partial_r\right)X_\theta\,, \qquad (4.12)$$

الإثبات: باستخدام العلاقات التأسيسية الكلاسيكية (4.7) والعلاقات الهندسية الكلاسيكية (4.4)، بسهولة نحصل على:

$$\left(r^{-1}+\partial_r\right)\mu_{rr}^0+\partial_z\,\mu_{zr}^0-r^{-1}\mu_{\theta\theta}^0-J\,\ddot{\varphi}_r^0=\overset{*}{\square}{}_4^0\,\varphi_r^0\,, \qquad (4.13)$$

$$\left(r^{-1}+\partial_r\right)\mu_{rz}^0+\partial_z\,\mu_{zz}^0-J\,\ddot{\varphi}_z^0=\overset{*}{\square}{}_4\,\varphi_z^0\,, \qquad (4.14)$$

الآن، بتطبيق المؤثر $\overset{*}{\square}{}_2^0$ على طرفي العلاقة (4.13) ،ومن ثم بالاستفادة من المعادلة (3.23)، نحصل مباشرةً على المعادلة (4.11).

وبتطبيق المؤثر $\overset{*}{\square}{}_2$ على طرفي المعادلة (4.14)، من ثم بالاستفادة من المعادلة (3.24) نحصل مباشرةً على المعادلة الثانية (4.12)، وبذلك يكون قد انتهى اثبات صحة المبرهنة المساعدة.

الآن ، للحصول على المعادلات الناظمة للحقول المتممة $(\mathbf{u}', \boldsymbol{\varphi}', \boldsymbol{\sigma}', \boldsymbol{\mu}', \boldsymbol{\gamma}', \boldsymbol{\kappa}')$

(الحقول الزائدة)، نتبع مايلي:

نطبق المؤثر $\overset{*}{\square}{}_2^0$ على طرفي المعادلة (3.4)، والمؤثر $\overset{*}{\square}{}_2$ على طرفي المعادلة (3.5)، فنحصل على المعادلتين التاليتين المحققتين في $\Omega \times T_+$:

$$\overset{*}{\square}{}_2^0\left[2\sigma_{[\theta z]}+\partial_r\mu_{rr}+\partial_z\mu_{zr}+r^{-1}\left(\mu_{rr}-\mu_{\theta\theta}\right)\right]+\overset{*}{\square}{}_2^0 Y_r + +\frac{1}{2}\overset{*}{\square}{}_2^0\partial_z X_\theta-\frac{1}{2}\overset{*}{\square}{}_2^0\partial_z X_\theta = J\,\overset{*}{\square}{}_2^0\varphi_r , \qquad (4.15)$$

$$\overset{*}{\square}{}_2\left[2\sigma_{[r\theta]}+(r^{-1}+\partial_r)\mu_{rz}+\partial_z\mu_{zz}\right]+\overset{*}{\square}{}_2 Y_z-\frac{1}{2}\overset{*}{\square}{}_4(r^{-1}+\partial_r)X_\theta+ +\frac{1}{2}\overset{*}{\square}{}_4(r^{-1}+\partial_r)X_\theta = J\,\overset{*}{\square}{}_2\varphi_Z , \qquad (4.16)$$

ينتج الآن، عن المعادلتين (4.15) و (4.11) وعن المعادلتين (4.16) و (4.12)، وعن المعادلتين (3.6) و(4.2) ، أن الحقول المتممة (الزائدة) $(\mathbf{u}',\boldsymbol{\varphi}', \boldsymbol{\sigma}', \boldsymbol{\mu}', \boldsymbol{\gamma}', \boldsymbol{\kappa}')$، تحقق نظام المعادلات المتمم التالي في $\Omega \times T_+$:

$$\overset{*}{\square}{}_2^0\left\{2\sigma'_{[\theta z]}+\partial_r\mu'_{rr}+\partial_z\mu'_{zr}+r^{-1}\left(\mu'_{rr}-\mu'_{\theta\theta}\right)\right\}+\hat{Y}_r = J\,\overset{*}{\square}{}_2^0\varphi'_r , \qquad (4.17)$$

$$\overset{*}{\square}{}_2\left\{2\sigma'_{[r\theta]}+(r^{-1}+\partial_r)\mu'_{rz}+\partial_z\mu'_{zz}\right\}+\hat{Y}_z = J\,\overset{*}{\square}{}_2\varphi'_z , \qquad (4.18)$$

$$\partial_r\sigma'_{r\theta}+\partial_z\sigma'_{z\theta}+2r^{-1}\sigma'_{(r\theta)}+\hat{X}_\theta=\rho\,\ddot{u}'_\theta , \qquad (4.19)$$

ومن علاقات توافق الانفعالات (3.7) نحصل على:

علاقات توافق الانفعالات، الزائدة، التالية المحققة في $\Omega \times T$:

$$\begin{aligned}
&\partial_z\left(\gamma'_{r\theta}+\gamma'_{\theta r}\right)+\left(r^{-1}-\partial_r\right)\left(\gamma'_{z\theta}+\gamma'_{\theta z}\right)=0\,,\\
&\partial_z\gamma'_{\theta r}+r^{-1}\gamma'_{z\theta}-\kappa'_{zz}-\kappa'_{\theta\theta}=0\,,\\
&\partial_r\left(r\gamma'_{\theta r}\right)+\gamma'_{r\theta}-r\,\kappa'_{rz}=0\,,\\
&\kappa'_{rr}+\partial_r\gamma'_{\theta z}=0\quad,\quad \kappa'_{\theta\theta}+r^{-1}\gamma'_{\theta z}=0,\\
&\qquad\kappa'_{zz}+\partial_z\gamma'_{\theta z}=0\;,
\end{aligned}\tag{4.20}$$

ومن العلاقات الهندسية (3.9)، نحصل على:

العلاقات الهندسية، الزائدة، التالية ، المحققة في $\Omega\times T_+$*:*

$$\begin{aligned}
&\kappa'_{rr}=\partial_r\varphi'_r\;,\kappa'_{\theta\theta}=r^{-1}\varphi'_r\;,\;\kappa'_{zz}=\partial_z\varphi'_z\;,\;\kappa'_{rz}=\partial_r\varphi'_z\;\;,\;\kappa'_{zr}=\partial_z\varphi'_r\;,\\
&\gamma'_{r\theta}=\partial_r u'_\theta-\varphi'_z\;,\;\gamma'_{\theta r}=\varphi'_z-r^{-1}u'_\theta\;,\;\gamma'_{z\theta}=\partial_z u'_\theta+\varphi'_r\;\;,\;\;\gamma'_{\theta z}=-\varphi'_r\;,
\end{aligned}\tag{4.21}$$

ومن العلاقات التأسيسية الزائدة (3.8)، نحصل على:

العلاقات التأسيسية، الزائدة، التالية ، المحققة في $\Omega\times T$*:*

$$\begin{aligned}
&\mu'_{rr}=2\gamma\,\kappa'_{rr}+\beta\,\kappa'\;,\;\mu'_{\theta\theta}=2\gamma\,\kappa'_{\theta\theta}+\beta\,\kappa'\;,\;\mu'_{zz}=2\gamma\,\kappa'_{zz}+\beta\,\kappa'\;,\\
&\mu'_{rz}=\left(\gamma+\varepsilon\right)\kappa'_{rz}+\left(\gamma-\varepsilon\right)\kappa'_{zr}\;,\;\;\mu'_{zr}=\left(\gamma+\varepsilon\right)\kappa'_{zr}+\left(\gamma-\varepsilon\right)\kappa'_{rz}\;,\\
&\sigma'_{r\theta}=\left(\mu+\alpha\right)\gamma'_{r\theta}+\left(\mu-\alpha\right)\gamma'_{\theta r}\;,\sigma'_{\theta r}=\left(\mu+\alpha\right)\gamma'_{\theta r}+\left(\mu-\alpha\right)\gamma'_{r\theta}\;,\\
&\sigma'_{\theta z}=\left(\mu+\alpha\right)\gamma'_{\theta z}+\left(\mu-\alpha\right)\gamma'_{z\theta}\;,\;\sigma'_{z\theta}=\left(\mu+\alpha\right)\gamma'_{z\theta}+\left(\mu-\alpha\right)\gamma'_{\theta z}\;,
\end{aligned}\tag{4.22}$$

حيث: $\kappa'=\kappa'_{rr}+\kappa'_{\theta\theta}+\kappa'_{zz}$ ،

إلى المعادلات والعلاقات المتممة السابقة نضيف الشروط الحدية والابتدائية، الزائدة، التالية، الناتجة عن الشروط الحدية والابتدائية، الأصلية (3.10) و (3.11):

الشروط الحدية، الزائدة، المحققة على $\partial\Omega\times T$*:*

$$\begin{aligned}
&n_r\,\sigma'_{r\theta}+n_z\,\sigma'_{z\theta}=0\;\;,\;n_r\,\mu'_{rr}+n_z\,\mu'_{zr}=m_r-m_r^0\;,\\
&n_r\,\mu'_{rz}+n_z\,\mu'_{zz}=m_z-m_z^0\;,
\end{aligned}\tag{4.23}$$

الشروط الابتدائية المتممة (أو الزائدة)، التالية ، المحققة في $\Omega\times\{0\}$*:*

$$\varphi_r' = h_r - \varphi_r^0 \ , \ u_\theta' = 0 \ , \ \varphi_z' = h_z - \varphi_z^0 \ , \qquad (4.24)$$

$$\dot{\varphi}_r' = \ell_r - \dot{\varphi}_r^0 \ , \dot{u}_\theta' = 0 \ , \ \dot{\varphi}_z' = \ell_z - \dot{\varphi}_z^0 \qquad (4.25)$$

تسمى المسألة (4.25)-(4.17) بمسألة القيم الحدية والابتدائية المتممة (أو الزائدة) للوصف التقليدي (العام) للجسم الصلب المرن (E-N:5) ضمن حالة التناظر المحوري الثانية للانفعالات المرنة.

ألية حل المسألة:

1- نحل مسألة القيم الحدية والابتدائية الكلاسيكية (4.10)-(4.2)، فنحصل على الحقول الكلاسيكية: $(\mathbf{u}^0, \boldsymbol{\varphi}^0, \boldsymbol{\sigma}^0, \boldsymbol{\mu}^0, \boldsymbol{\varepsilon}^0, \boldsymbol{\kappa}^0)$.

2- بحل مسألة القيم الحدية والإبتدائية المتممة (الزائدة) (4.25)-(4.17) ، نحصل على الحقول المتممة (الزائدة) $(\mathbf{u}', \boldsymbol{\varphi}', \boldsymbol{\sigma}', \boldsymbol{\mu}', \boldsymbol{\gamma}', \boldsymbol{\kappa}')$.

3- وأخيراً بالتعويض في العلاقات (4.1)، نحصل على الحل النهائي: $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\kappa})$ لمسألة الوصف التقليدي (العام) (3.11)-(3.1).

4– 5. <u>النتائج والمقترحات</u> :

أولاً: النتائج:

في هذا البحث عممنا طريقة متجه تشيفر إلى حل مسألة الوصف التقليدي (العام) للجسم الصلب المرن (E-N:5) ضمن حالة التناظر المحوري الثانية للانفعالات المرنة لهذا الجسم .

ثانياً: المقترحات:

في نهاية هذا البحث نوصي بمناقشة المسائل الأتية:

مسألة1: تعميم طريقة متجه تشيفر المتجهية إلى طريقة تنسور تشيفر لتشمل وصف إغناتشاك الإجهادي للجسم (E-N:5)ضمن حالة التناظر المحوري الثانية لانفعالاته المرنة .

مسألة2: مناقشة طريقة متجه تشيفر المتجهية غي حل مسألة الوصف التقليدي العام لنفس الجسم، لكن ضمن حالة التناظر المحوري الأولى للإنفعالات المرنة له.

مسألة3: مناقشة طريقة تنسور تشيفر في حل مسألة الوصف الإجهادي لنفس الجسم (E-N:5) ، ضمن حالة التناظر المحوري الأولى للإنفعالات المرنة لهذا الجسم.

المراجع

[1]- Dyszlewicz , J, **2004** - Micropolar Theory of Elasticity , in : Series Lectures. Notes in Applied and Computational Mechanics, Vol.15, 356 p, Springer .

[2]–Dyszlewicz , J ,**1996** - *Selected problems of linear asymmetrical thermoelasticity*, Journal of Thermal Stresesses,19, 185-206.

[3]–Dyszlewicz , J ,**1997** - *Stress equations of motion of Ignaczak type for the second axisymmetric problem of micropolar elastodynamics*, Applicationes Mathematicae, 24,3 (1997), pp. 251–265.

[4]-Dyszlewicz , J , **1980-** *Selected boundary problems of equations for the plane problems in micropolar theory of elasticity*, Stud. Geotech. et. mech., I-1980, 2 **,** 3 , 5-20 ; II-1980 ,2 , 4 , 21-36.

[5] –Nowacki, W , **1986 -** Theory of Asymmetric Elasticity , Warsaw , PWN.

[6] – Eringen , A . C , **1966** - *Linear theory of micropolar elasticity*, J.Math. Mech., 15 , 909 – 930.

[7]– W. Nowocki , **(1970)**, Theory of Elasticity , PWN Warsaw.