توصيف جبري لمسألة نقل المعلومات على شبكات الاتصال الترجيحية

علاء جوني[1] أ.م. د. شوقي الراشد[2]

قسم الرياضيات – كلية العلوم – جامعة دمشق – سورية

(1) طالب دكتوراه - قسم الرياضيات - كلية العلوم - جامعة دمشق.

(2) أستاذ مشارك في الجامعة العربية الدولية الخاصة، عضو هيئة تدريسية في كلية العلوم جامعة دمشق.

ملخص

قُمنا في هذا البحث بتقديم دراسة لمسألة إرسال واستقبال المعلومات على شبكة اتصال ترجيحية وذلك باستخدام بعض الأدوات المُستخدمة في الجبر التبادلي والهندسة الجبرية، من خلال تقديم نموذج جبري للتعريف بمسألة الإرسال المُتعدد على شبكة اتصالات ترجيحية، ثم قُمنا بتعميم النظرية الأساسية في ترميز الشبكة من الحالة الكلاسيكية إلى الحالة الترجيحية وذلك بعد وضع المفاهيم اللازمة لهذا التعميم، ثم وضعنا شرطاً لازماً وكافياً لتكون مسألة الترميز قابلة للحل اعتماداً على طبيعة مجموعة كثيرات الحدود المُعرِّفة لمسألة الترميز على شبكة اتصالات ترجيحية مُعطاة، وبناءً على ذلك قدّمنا بعض النتائج حول قابلية الحل أي قابلة إتمام عملية الإرسال المتعدد بنجاح، ثم أوجدنا علاقة بين قابلية حل مسألة الترميز و بُعد الفضاء $\frac{(\mathrm{F_q},\mu_1)[X,Y]}{I}$ وذلك باستخدام قواعد غروبنر، وتم تعريف ترميز ثنائي ترجيحي وشبكة ترجيحية كتطبيق عملي لهذه الدراسة.

التصنيف الرياضياتي (2020) $05C21, 13P10, 13P25, 94D05$

الكلمات المفتاحية: ترميز الشبكة – المجموعة الترجيحية – البيان الترجيحي – التطبيق الترجيحي.

Algebraic Characterization Of The Problem Of Transferring Information On Fuzzy Communication Networks

Abstract

In this paper, we present a study of the problem of sending and receiving information on a probability communication network, using some useful tools from commutative algebra and algebraic geometry. Then we transferred the fundamental theory of network coding from the classical case to the general case, i.e. the Fuzzy case, after developing the necessary concepts for this generalization.

Then we set a necessary and sufficient condition for the coding problem to be solvable depending on the nature of the set of polynomials defining the coding problem on a given fuzzy communication network.

Accordingly, we presented some results about the solvability, i.e. the ability to complete the transmission process successfully, and then we found a relationship between the solvability of the encoding problem and the dimension of the space $\frac{(F_q,\mu_1)[X,Y]}{I}$ using Grobner Bases, also we define a fuzzy coding and a fuzzy communication network as an application for this study.

MSC2020: $05C21, 13P10, 13P25, 94D05$

Key words

Network Coding – Fuzzy Set – Fuzzy Graph – Fuzzy Map.

1- مُقدِّمة

لقد تم إحراز تقدُّم كبير في نظرية المجموعات الترجيحية (الضبابية أو العائمة) منذ نشأتها بطرقٍ متنوعة وفي العديد من التخصصات، فيمكن العثور على تطبيقات هذه النظرية في الذكاء الصُنعي وعلوم الكمبيوتر وهندسة التحكم ونظرية اتخاذ القرار والأنظمة الخبيرة والمنطق وعلوم الإدارة وبحوث العمليات والروبوتات وغيرها.

تُعتبر الرياضيات الترجيحية، فرعاً من فروع الرياضيات، يتعلق بنظرية المجموعات الترجيحية وبالمنطق الترجيحي الذي ظهر على يد العالم Zadeh حيث قدَّم مفهوم المجموعة الترجيحية في بحثه [17] مُبيّناً أن كل عنصر من المجموعة له درجة انتماء من المجال [0,1] . تأتي أهمية مفهوم الترجيح من كونه أقرب إلى أسلوب الحياة الواقعية، الأمر الذي دفعنا لدراسة الترميز على شبكات الاتصال الترجيحية لأنَّه في الحالة العامة عند نقل المعلومات بين المُرسل والمستقبل يتم استخدام قنوات ضجيجية أي مُعرَّضة للتشويش مما يعني أن الرسالة المستلمة قد تكون تعرضت للتشويه، بمعنى آخر أنَّه قد تم استلام الرسالة ولكن بدرجة معينة من الصحة، لذلك قُمنا أولاً في هذا البحث بتوصيف شبكة الاتصالات الترجيحية ودراسة إمكانية إتمام عملية الإرسال على هذه الشبكة الترجيحية.

ظهر مفهوم ترميز الشبكة الكلاسيكي في الأبحاث ([4], p7) ([5], p1) حيث يُسمح للرؤوس الداخلية إجراء عمليات معالجة على البيانات الداخلة إليها، ويُقال إن مسألة الترميز فوق الشبكة المدروسة أو مسألة الإرسال المُتعدد قابلة للحل إذا وُجدت عمليات على الرؤوس المتوسطة في الشبكة حيث إن كل مستقبل يحصل على كل الرسائل المرسلة من كل المصادر.

2- تعاريف ومفاهيم أساسية:

2-1- تعريف (التطبيق الحدودياتي) ([2], p79)

ليكن K حقلاً ما، يُقال عن كل تطبيق من الشكل:

$$F = (f_1, \dots, f_n): K^n \to K^n$$
$$(a_1, \dots, a_n) \mapsto \big(f_1(a_1, \dots, a_n), \dots, f_n(a_1, \dots, a_n)\big)$$

حيث f_i هو عنصر من الحلقة $K[X] = K[x_1, \dots, x_n]$، من أجل كل $i \in \{1, \dots, n\}$. إنه تطبيق حدودياتي أو تطبيق كثيرات حدود.

2-2- تعريف: ([16],p5)

يُقال عن التطبيق الحدودياتي $F: K^n \to K^n$ إنه قلوب إذا وجد $g_1, \dots, g_n \in K[y_1, \dots, y_n]$ تحقق $y_i = g_i(f_1, \dots, f_n), i = 1, \dots, n$

2-3- تعريف (قاعدة غروبنر): ([6], p78)

ليكن I مثالي في حلقة كثيرات الحدود $K[x_1, \dots, x_n]$ و $G = \{g_1, \dots, g_t\}$ مجموعة جزئية منتهية من I فإنَّه يُقال عن G إنها قاعدة غروبنر للمثالي I إذا وفقط إذا تحقق:

$$\langle LT(g_1), \dots, LT(g_t) \rangle = \langle LT(I) \rangle$$

حيث $LT(I) = \{cx^\alpha : \exists f \in I, LT(f) = cx^\alpha\}$

أو بشكلٍ مكافئ

المجموعة $\{g_1, \dots, g_t\} \subset I$ هي قاعدة غروبنر لـ I إذا وفقط إذا كان الحد القائد لأي عنصر من I يقبل القسمة على أحد الحدود $LT(g_i)$ حيث $i = 1, \dots, t$.

ويُقال إنَّ G هي قاعدة غروبنر للمثالي I وفق علاقة ترتيب معينة، وذلك لأن تحديد الحدود القائدة $LT(g_i)$ يتطلب تعيين علاقة ترتيب على الحدوديات.

2-4- مفاهيم أساسية في البيان: ([15],p2)

- البيان هو زوج مرتب $\mathrm{G} = (\mathrm{V}, \mathrm{E})$ من المجموعات V, E حيث عناصر V هي رؤوس البيان وعناصر E هي أضلاع البيان وتكون على شكل مجموعات جزئية من V كلاً منها مكوَّن من رأسين.
- يُقال عن الرأسين u, v إنهما متجاورين إذا وجد ضلع e يصل بينهما ونكتب $e = (\mathrm{u}, \mathrm{v})$.
- يُقال عن الرؤوس غير المترافقة إنها مستقلة.
- وتُعرَّف درجة الرأس v بإنها عدد الأضلاع المشتركة مع الرأس v ويُرمز لها بـ $\deg(\mathrm{v})$ أو $\mathrm{d}(\mathrm{v})$.

2-5- البيان الموجه: ([19])

يُقال عن البيان $G = (V, E)$ إنه بيان موجه الأضلاع إذا تحقق أن كل ضلع فيه موجه من رأس إلى رأس آخر.

3- الموديل الرياضي لشبكة اتصالات عامة ([13],p2)

شبكة الاتصالات هي بيان موجه لا يحوي دوائر $G = (V, E)$، حيث V تُمثل مجموعه الرؤوس و E تُمثل مجموعة الأضلاع أو قنوات الاتصال، يوجد مجموعتين منفصلتين في V هما $S, T \subseteq V$ (أي $S \cap T = \emptyset$) حيث:

الرؤوس في $S = \{s_1, \dots, s_n\}$ تدعى رؤوس المصدر وتملك درجة دخل صفر.

الرؤوس في $T = \{t_1, \dots, t_m\}$ تدعى رؤوس المستقبل أو الهدف وتملك درجة خرج صفر.

حيثُ تُعرَّف درجة دخل الرأس v بأنها عدد الأضلاع الموجهة الداخلة إلى الرأس v ورمزها $id(v)$.

ودرجة خرج الرأس v بأنها عدد الأضلاع الموجهة الخارجة من الرأس v ورمزها $od(v)$.

كل الرؤوس الأخرى في V تُدعى رؤوس متوسطة أو داخلية.

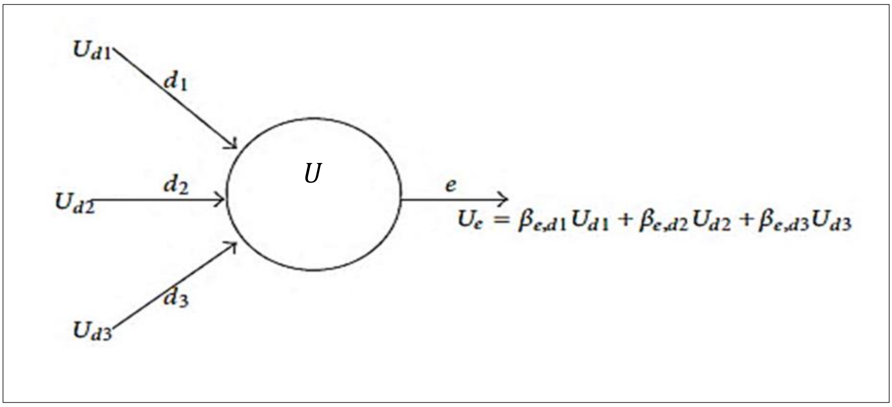
تُشكِّل مجموعة الرموز $M = \{m_1, \dots, m_n\}$ ما يُسمى بالرسالة المُراد نقلها من S إلى T وهي مأخوذة من أبجدية (Alphabet) Σ غالباً ما تكون عبارة عن حقل منته.

كل مصدر s_i يُولِّد مجموعة من الرسائل، وكل مستقبل t_i يطلب مجموعة من الرسائل.

يتم إرسال رمز واحد خلال واحدة الزمن عبر كل ضلع من أضلاع البيان G .

ولأجل كل مصدر s_i الرمز على الضلع (s_i, v) هو دالة بالرسائل المولَّدة في المصدر.

ومن أجل رأس متوسط u الرمز على الضلع (u, v) هو دالة بالرموز المحمولة على الأضلاع الداخلة إلى الرأس u.



شكل 3-1

3−1− تعريف (ترميز الشبكة) ([13], p2)

لتكن N شبكة اتصالات مُعطاة عندئذٍ مجموعة كل الدوال المرافقة للأضلاع تُدعى بترميز الشبكة.

ملاحظة: ترميز الشبكة يَسمح للرؤوس الداخلية في الشبكة بمعالجة البيانات الواردة إليها و إجراء عمليات رياضية عليها بدلاً من نقلها و تخزينها فقط.

3−2− تعريف (الارتباط الجبري) ([11], p1)

ليكن K حقلاً ما، يُقال عن كثيرات الحدود $f_1, \dots, f_k \in K[x_1, \dots, x_n]$ إنها مرتبطة جبرياً إذا وجد كثير حدود غير صفري $A(t_1, \dots, t_k) \in K[t_1, \dots, t_n]$ يُحقق $A(f_1, \dots, f_k) = 0$، وخلاف ذلك تُدعى مستقلة جبرياً.

مثال:

$f_1(x,y) = (x^2+y^2)^2$ و $f_2(x,y) = (x^2+y^2)^3 + 1$

هي مرتبطة جبرياً لأنه يتحقق $f_1^3 = (f_2-1)^2$ بالتالي وجد كثير حدود $A(t_1,t_2) = t_1^3 - (t_2-1)^2$ يُحقق $A(f_1,f_2) = 0$.

3-3- تعريف (الاستقلال غير الخطي) ([18],p23)

ليكن K حقلاً ما، يُقال عن مجموعة الرسائل

$\{f_1, \dots, f_m\} \subseteq K[x_1, \dots, x_m]$ إنها مستقلة غير خطية إذا تحقق

$$|\{f_1, \dots, f_m\}| = |\{x_1, \dots, x_m\}| = |K|^m$$

حيث $x_1, \dots, x_m$ تُمثل الرسائل المرسلة و $f_1(x_1, \dots, x_m), \dots, f_m(x_1, \dots, x_m)$ تُمثل الرسائل المُستلمة.

3-4- مبرهنة (النظرية الأساسية في ترميز الشبكة): ([8], p3) ([7], p15)

بفرض أن المصدر s_i ينقل الرمز σ_i من حقل ما F_q، وبما أن الرؤوس المتوسطة يمكنها إجراء عملية تركيب خطي على العناصر الداخلة إليها فإن الأضلاع تحمل تراكيب خطية بالرموز المُرسلة عبر المصادر وبإمكان المستقبلات استخلاص الرموز المُرسلة، أي أن مسألة الترميز قابلة للحل إذا وفقط إذا تحقق أن الـ n ضلع المتعلقة بكل مستقبل تحمل تراكيب خطية مستقلة بالرموز σ_i.

4- البيان الترجيحي:

4-1- تعريف (البيان الترجيحي): ([14],p9)

البيان الترجيحي هو الثلاثية $G = (V, \sigma, \mu)$ حيث V مجموعة غير خالية و σ, μ هي دوال مُعرفة بالشكل التالي

$\sigma: V \to [0,1]$, $\mu: E \to [0,1]$ بحيث يتحقق

$$\forall x, y \in V;\ \mu(x, y) \le \min\{\sigma(x), \sigma(y)\}$$

- المجموعة الترجيحية σ تُدعى مجموعة الرؤوس الترجيحية للبيان G.
- المجموعة الترجيحية μ تُدعى مجموعة الأضلاع الترجيحية للبيان G.

4-2- تعريف ([14],p4)

لتكن S هي مجموعة ما، العلاقة الترجيحية μ على S هي مجموعة جزئية ترجيحية من $S \times S$

4-3- تعريف ([14],p4)

إذا كانت μ علاقة ترجيحية على S و σ مجموعة جزئية ترجيحية من S، عندئذ μ هي علاقة ترجيحية على σ إذا تحقق:

$$\mu(x,y) \le \min\{\sigma(x),\sigma(y)\}\ ,\forall x,y \in S$$

4-4- تعريف ([14],p4)

إذا كانت σ مجموعة جزئية ترجيحية من S، فإن أقوى علاقة ترجيحية على σ هي μ_σ المعطاة بالشكل

$$\mu_\sigma(x,y) = \min\{\sigma(x),\sigma(y)\}\ ,\forall x,y \in S$$

4-5- تعريف (تركيب العلاقات الترجيحية) ([14],p4)

لتكن $\rho: S \times T \to [0,1]$ هي علاقة ترجيحية من مجموعة جزئية ترجيحية μ من S إلى مجموعة جزئية ترجيحية ν من T ولتكن $\omega: T \times U \to [0,1]$ علاقة ترجيحية من مجموعة جزئية ترجيحية ν من T إلى مجموعة جزئية ترجيحية ξ من U. تُعرَّف عملية التركيب للعلاقتين

$\rho \circ \omega : S \times U \to [0,1]$ بأنها العلاقة الترجيحية من μ إلى ξ المُعرَّفة بالشكل

$$\rho \circ \omega(x,z) = \sup_{y \in T}\{\min\{\rho(x,y),\omega(y,z)\}\}$$

5- التطبيقات الترجيحية

يُعد التطبيق الترجيحي في الحالة الترجيحية تعميماً لمفهوم التطبيق في الحالة الكلاسيكية فهو تطبيق يربط كل عناصر المنطلق بعناصر من المستقر بدرجات ارتباط تأخذ قيمها من المجال $L = [0,1]$ مع إهمال عناصر المنطلق والمستقر التي درجات انتمائها تساوي الصفر.

5-1- تعريف ([10],p2)

يُعرَّف التطبيق الترجيحي بين المجموعتين μ, δ الجزئيتين الترجيحيتين من X, Y على الترتيب على أنه الثنائية (f, R) حيث:

- f هو تطبيق كلاسيكي من الشكل

$$\begin{aligned} f: \mu_0 &\to \delta_0 \\ x &\longmapsto f(x) \end{aligned}$$

حيث $\mu_0 = \{x \in X\ ;\ \mu(x) > 0\}$

- R هي علاقة ترجيحية تحقق:

i. $0 < R(x, f(x)) = \min\{\mu(x), \delta(f(x))\}$

ii. $\forall y \in \delta_0 \ : y \neq f(x) \ ; R(x, y) = 0$

ونكتب : $f_R: \mu \to \delta$

5-2- تعريف ([10],p4)

يُقال عن التطبيق الترجيحي $f_R: \mu \to \delta$ إنه متبايناً (غامراً) إذا كان التطبيق $f: \mu_0 \to \delta_0$ متبايناً (غامراً) ويُقال عن $f_R: \mu \to \delta$ إنه تقابل إذا كان $f: \mu_0 \to \delta_0$ تقابلاً.

5-3- تعريف التطبيق الترجيحي الواحدي ([10],p4)

يُعرَّف التطبيق الترجيحي الواحدي بالنسبة لـ μ على أنه الثنائية (I, i_μ) حيث

- I هو التطبيق المطابق بالنسبة لـ μ_0 :

$$\begin{aligned} I: \mu_0 &\to \mu_0 \\ x &\mapsto I(x) = x \end{aligned}$$

- i_μ هي علاقة ترجيحية معرفة بالشكل

$$\forall (x, \grave{x}) \in X \times X: i_\mu(x, \grave{x}) = \begin{cases} \mu(x) & ; x = \grave{x} \\ 0 & ; x \neq \grave{x} \end{cases}$$

ونكتب $I_{i_\mu}: \mu \to \mu$

5-4- تعريف: تركيب تطبيقين ترجيحيين: ([10],p4)

ليكن $f_{R_1}: \mu \to \delta, g_{R_2}: \delta \to \lambda$ تطبيقين ترجيحيين، عندئذ يُعرف التركيب $g_{R_2} \circ f_{R_1}$ على أنه التطبيق الترجيحي التالي: $(g \circ f)_{R_2 \circ R_1}$ حيث:

$$\begin{aligned} g_{R_2} \circ f_{R_1} &: \mu \to \lambda \\ g \circ f&: \mu_0 \to \lambda_0 \\ x &\longmapsto g(f(x)) \end{aligned}$$

حيث إن

$$\begin{aligned} \forall x \in \mu_0 : R_2 \circ R_1(x, g(f(x))) &= \sup_{t \in Y}\{\min\{R_1(x, t), R_2(t, g(f(x)))\}\} \\ &= \min\{R_1(x, f(x)), R_2(f(x), g(f(x)))\} \\ &= \min\{\mu(x), \delta(f(x)), \lambda(g(f(x)))\} \end{aligned}$$

5-5- مبرهنة: ([10],p5)

ليكن $f_{R_1}:\mu \to \delta, g_{R_2}:\lambda \to \mu$ تطبيقين ترجيحيين، إن التطبيق الترجيحي الواحدي بالنسبة لـ μ تطبيق يحقق المساواتين التاليتين

$$I_{i_\mu} \circ g_{R_2} = g_{R_2}, f_{R_1} \circ I_{i_\mu} = f_{R_1}$$

6-5- تعريف: مقلوب تطبيق ترجيحي ([10],p8)

ليكن $f_{R_1}:\mu \to \lambda$ إن مقلوب f_{R_1} هو عبارة عن التطبيق الترجيحي $g_{R_2}:\lambda \to \mu$

$$f_{R_1} \circ g_{R_2} = I_{i_\lambda}, g_{R_2} \circ f_{R_1} = I_{i_\mu}$$

ملاحظة: إن مقلوب f_{R_1} يحقق أن

$$\left(f \circ g = I_{\lambda_0}\right) \text{و} \left(g \circ f = I_{\mu_0}\right) \text{و} \left(R_1 \circ R_2 = i_\lambda\right) \text{و} \left(R_2 \circ R_1 = i_\mu\right)$$

عندها من السهل أن نرى مما سبق أنه لوجود التطبيق g يجب أن يكون f تقابلاً، ونكتب

$g = f^{-1}$ ، ومن جهةٍ أخرى يجب إيجاد علاقة ترجيحية R_2 تحقق

$$R_2 \circ R_1 = i_\mu, R_1 \circ R_2 = i_\lambda$$

هذا يعني أنه يجب أن يتحقق ما يلي:

- $\forall x \in \mu_0 : (R_2 \circ R_1)\big(x, g \circ f(x)\big) = (R_2 \circ R_1)(x,x) = \min\{\mu(x), \lambda(f(x))\}$
- $\forall y \in \lambda_0 : (R_1 \circ R_2)\big(y, f \circ g(y)\big) = (R_1 \circ R_2)(y,y) = \min\{\lambda(y), \mu(f^{-1}(y))\}$

وبما أن f غامر فإن

$$\forall y \in \lambda_0 : \exists x \in \mu_0 : y = f(x)$$

وبالتالي يكون $f^{-1}(y) = x$ بالتالي

$$\forall y \in \lambda_0 : (R_1 \circ R_2)\big(x, f \circ g(y)\big) = (R_1 \circ R_2)(y,y) = \min\{\lambda(f(x)), \mu(x)\}$$

من أجل (1) نجد $\min\{\mu(x), \lambda(f(x))\} = \mu(x)$ عندما $\mu(x) \le \lambda(f(x))$

من أجل (2) نجد $\min\{\mu(x), \lambda(f(x))\} = \lambda(f(x))$ عندما $\mu(x) \ge \lambda(f(x))$

بالتالي $\mu(x) = \lambda(f(x))$

إذاً يكون للتطبيق الترجيحي $f_{R_1}: \mu \to \lambda$ مقلوب إذا تحقق الشرطان

1) f تقابل.

2) f ينقل كل عنصر $x \in \mu_0$ إلى عنصر من λ_0 بحيث يتحقق $\mu(x) = \lambda(f(x))$.

5-7- نتيجة: ([10],p8)

إذا وجِدَ للتطبيق الترجيحي $f_{R_1}: \mu \to \lambda$ مقلوب عندئذ يكون f_{R_1} تطبيقاً ترجيحياً تقابلاً، ولكن العكس غير صحيح بالضرورة.

5-8- تعريف: ([9],p2)

ليكن F حقلاً ما، ولتكن K مجموعة جزئية في F مزودة بدالة عضوية μ يُقال إن K حقل ترجيحي في F ويُرمز له بـ (K_μ, F) أو اختصاراً (K, μ) ، إذا تحقق ما يلي:

1. $\mu(x+y) \geq \min\{\mu(x), \mu(y)\} \quad , \forall x, y \in F$
2. $\mu(-x) \geq \mu(x) \quad , \forall x \in F$
3. $\mu(xy) \geq \min\{\mu(x), \mu(y)\} \quad , \forall x, y \in F$
4. $\mu(x^{-1}) \geq \mu(x) \quad , x \neq 0$

5-9- تعريف ([1],p2)

يُقال عن المجموعة الجزئية μ من فضاءٍ متجهي E على حقلٍ K إنها فضاء جزئي ترجيحي من E إذا تحقق

$$\forall a, b \in K, \forall x, y \in E \ ; \ \mu(ax+by) \geq \min\{\mu(x), \mu(y)\}$$

5-10- مبرهنة ([1],p2)

لتكن المجموعة الجزئية μ من فضاء متجهي E على حقل K فضاءً جزئياً ترجيحياً من E عندئذٍ يتحقق:

1. $\mu(0) = \sup\{\mu(x) \mid x \in E\}$
2. $\mu(ax) = \mu(x) \quad , \forall a \in K - \{0\} \text{ and } x \in E$
3. $\text{if } x, y \in E \text{ and } \mu(x) \neq \mu(y) \text{ then}$
$$\mu(x+y) = \min\{\mu(x), \mu(y)\}$$

5-11- تعريف (الاستقلال الخطي الترجيحي) ([1],p2)

ليكن μ فضاءً جزئياً ترجيحياً من E يُقال عن مجموعة المتجهات B إنها مجموعة مستقلة خطية ترجيحية إذا تحقق

1. B هي مستقلة خطياً
2. $\mu(\sum_{i=1}^{n} a_i x_i) = \min\{\mu(a_i x_i)\}, i = 1, \dots, n$

إنَّ القاعدة الترجيحية للفضاء الترجيحي μ هي مجموعة مولِّدة ومستقلة خطية ترجيحية لـ E. لذلك إذا ملك فضاء جزئي ترجيحي μ قاعدة ترجيحية B عندئذ قيم μ عند عناصر القاعدة كافية لتحديد μ.

إذا كان $x \in E$ تركيباً خطياً بعناصر من القاعدة الترجيحية B أي $x = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i$ حيث $a_i \neq 0$ عندئذ

$$\mu(x) = \mu\left(\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right)$$
$$= \min\{\mu(a_i x_i)\} = \min\{\mu(x_i)\}, i = 1, \dots, n$$

5-12- تعريف المثالي الترجيحي ([12],487)

المثالي الترجيحي في حلقة R هو مجموعة جزئية ترجيحية $\alpha: R \to [0,1]$ تحقق مايلي :

1. $\alpha(x+y) \geq \min\{\alpha(x), \alpha(y)\}, \forall x, y \in R$
2. $\alpha(x\,y) \leq \max\{\alpha(x), \alpha(y)\}, \forall x, y \in R$
3. $\alpha(x) = \alpha(-x)$

5-13- تعريف المثالي الحدودي الترجيحي ([12],488)

ليكن المثالي الترجيحي $\alpha: R \to [0,1]$ من حلقة R، وليكن $f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ كثير حدود في الحلقة $R[x]$. ولتكن المجموعة الترجيحية $\alpha_x: R[x] \to [0,1]$ حيث

$$\alpha_x(f(x)) = \min\{\alpha(a_i) \mid i = 0,1, \dots, n\}$$

عندئذ يدعى α_x مثالي حدودي ترجيحي.

6- الموديل الرياضي لشبكة اتصالات ترجيحية

في هذا الجزء نُعرِّف نموذج رياضي ترجيحي لمسألة نقل المعلومات عبر شبكة اتصالات ترجيحية لتكون على الشكل الآتي

$$N = \left(G{:}\,(V,\sigma,\mu), S, R, \left(F_q, \mu_1\right), C, M, F\right)$$

حيث $G{:}\,(V,\sigma,\mu)$ بيان موجه ترجيحي لا يحوي دوائر

وتحتوي σ على مجموعتين منفصلتين هما S, T

والرؤوس في $S = \{s_1, \dots, s_n\}$ تدعى رؤوس المصدر.

والرؤوس في $T = \{t_1, \dots, t_m\}$ تدعى رؤوس المستقبل أو الهدف.

كل الرؤوس الأخرى في σ تدعى رؤوس متوسطة أو داخلية.

تُمثل C مجموعة سعات قنوات الارسال خلال واحدة الزمن (باعتبار أضلاع البيان هي قنوات نقل المعلومات).

وتُشكل مجموعة الرموز $M = \{m_1, \dots, m_n\}$ ما يُسمى بالرسالة المُراد نقلُها من المصادر إلى المستقبلات وهي مأخوذة من أبجدية (Alphabet) Σ هي عبارة عن حقل ترجيحي منته وليكن $\left(F_q, \mu_1\right)$.

كل مصدر s_i يولِّد مجموعة من الرسائل الترجيحية $A(s_i) \subseteq M$

وكل مستقبل t_i يطلب مجموعة من الرسائل الترجيحية $D(t_i) \subseteq M$

يتم إرسال رمز واحد خلال واحدة الزمن عبر كل ضلع من أضلاع البيان G .

من أجل رأس متوسط u الرمز في القناة (Channel) $e = (u, v)$ هو دالة ترجيحية بالرموز المُرسلة عبر الأضلاع الداخلة إلى الرأس u.

مجموعة دوال الترميز الترجيحية المُعرَّفة لشبكة الاتصالات الترجيحية تُشكل تطبيق حدودياتي

$F_R = (f_1, \dots, f_n){:}\left(F_q^n, \mu_1\right) \longrightarrow \left(F_q^n, \mu_1\right)$ مُعرف بالشكل التالي

من أجل كل i فإن f_{i_e} معطى بالشكل

$$f_{i_e}{:}\begin{cases} \Sigma^{|M|} \to \Sigma & \text{if } \exists i{:}\, v = s_i \\ \Sigma^{|E_{in}(v)|} \to \Sigma & \text{if } \forall i{:}\, v \neq s_i \end{cases}$$

$$(x_1, \dots, x_n) \longmapsto \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} c_\alpha X^\alpha \ : \ c_\alpha \in (F_q, \mu_1)$$

$|E_{in}(v)|$ تُمثل عدد الأضلاع الداخلة إلى v.

إن R هي علاقة ترجيحية تحقق من أجل كل $e = (u, v)$

i. $0 < R\left(X, f_{i_e}(X)\right) = \min\left\{\sigma_u(X), \sigma_v\left(f_{i_e}(X)\right)\right\}$

ii. $\forall y \in \sigma_{v_0} \ : y \neq f_{i_e}(X) \ ; R(X, y) = 0$

حيث تُمثِّل σ_u دالة العضوية لأبجدية الرأس u، و σ_v دالة العضوية لأبجدية الرأس v.

سندعو التطبيق السابق بالتطبيق الترجيحي الحدودياتي

(Fuzzy polynomial map) ونرمز له بـ F_R.

6-1- ملاحظة

نقول عن دوال الترميز الترجيحية المحمولة على الأضلاع الداخلة إلى المستقبل إنها تُمثِّل مسألة الترميز على شبكة الاتصالات الترجيحية أو المُعرِّفة لشبكة الاتصالات الترجيحية، عندما يكون التطبيق الترجيحي الحدودياتي مُعرَّف من أجل كل $e = (u, t) : t \in T$.

وتكون العلاقة الترجيحية R مُعرَّفة بالشكل التالي:

i. $0 < R\big(X, F(X)\big) = \min\{\sigma_S(X), \sigma_t\big(F(X)\big)\}$

ii. $\forall y \in \sigma_{t_0} \ : y \neq F(X) \ ; R(X, y) = 0$

6-2- تعريف (الاستقلال غير الخطي الترجيحي)

ليكن μ فضاءً جزئياً ترجيحياً من E يُقال إن مجموعة المتجهات B هي مجموعة مستقلة غير خطية ترجيحية إذا تحقق

1. $B = \{f_1, \dots, f_n\}$ هي مستقلة غير خطية
2. $\mu\left(\sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} c_\alpha f_i\right) = \min_i\{\mu(c_\alpha f_i)\} \ , i = 1, \dots, n$

القاعدة الترجيحية للفضاء الترجيحي μ هي مجموعة مولِّدة ومستقلة غير خطية ترجيحية لـ E.

ويتحقق

$$\mu\left(\sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}^n\\ i=1,\dots,n}} c_\alpha f_i\right) = \min_i\{\mu(c_\alpha f_i)\}$$

وأكثر من ذلك يتحقق

$$\begin{aligned}\min_i\{\mu(c_\alpha f_i)\} &= \min_i\{\mu(f_i)\}\\ &= \min_i\left\{\mu\left(\sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n} c_\alpha X^\alpha\right)\right\} = \min_\alpha\{\mu(X^\alpha)\}\end{aligned}$$

في ما يلي نقوم بتقديم تعميم للنظرية الأساسية في ترميز الشبكة إلى الحالة الترجيحية

6-3- النظرية الأساسية في ترميز الشبكة غير الخطي الترجيحي:

لتكن $N = \left(G: (V, \sigma, \mu), S, R, \left(F_q, \mu_1\right), C, M, F\right)$ شبكة اتصالات ترجيحية وليكن المصدر $s_i \in S \subseteq (V, \sigma, \mu)$ ينقل الرمز $\sigma_i \in \left(F_q, \mu_1\right)$، لأجل كل $i = 1, \dots, q$ وبفرض أن الرؤوس الداخلية يمكنها إجراء عملية تركيب غير خطي على العناصر الداخلة إليها، فإن الأضلاع ستحمل تركيبات غير خطية بالرموز المرسلة عبر المصادر وبإمكان المستقبلات استخلاص رموز المصدر أي أن مسألة الترميز قابلة للحل إذا وفقط إذا تحقق أن الـ n ضلع المتعلقة بكل مستقبل تحمل تركيبات مستقلة غير خطية ترجيحية بالرموز σ_i .

6-4- مبرهنة

لتكن N شبكة ترجيحية، ولتكن $S = \{s_1, \dots, s_n\}$ مجموعة رؤوس المصدر و $T = \{t_1, \dots, t_m\}$ مجموعة المستقبلات، وخلال واحدة الزمن يُرسل المصدر s_i الرسالة الترجيحية $a_i \in \left(F_q, \mu_1\right)$، وذلك $\forall i = 1, \dots, n$. عندئذ بإمكان المستقبلات t_j وذلك $\forall j = 1, \dots, m$ استخلاص الرموز المُرسلة a_i إذا وفقط إذا تحقق أن مجموعة دوال الترميز الترجيحية $\{f_1, \dots, f_m\}$ الممثلة لمسألة الترميز على شبكة الاتصالات الترجيحية N تُشكل قاعدة ترجيحية في الفضاء $\left(F_q, \mu_1\right)[x_1, \dots, x_n]$ للمثالي

$I=(\langle f_e\rangle,\mu_2)$ والذي هو مثالي ترجيحي مُولَّد بدوال الترميز الترجيحية المُعرِّفة لشبكة الاتصالات الترجيحية.

البرهان

بفرض أن المسألة قابلة للحل، وبما أن $\{f_1,\dots,f_n\}$ تولِّد المثالي I فيكفي أن نُبرهن أنها مجموعة مستقلة غير خطية ترجيحية.

أولاً

المسألة قابلة للحل تعني أن الـ n مسار منفصل المتعلقة بالمستقبلات تحمل تركيبات غير خطية مستقلة برسائل المصدر ([8], p3)، وهذا يكافئ أنه إذا كانت $\{x_1,\dots,x_n\}$ هي مجموعة الرسائل الأصلية المُرسلة عبر المصادر والـ n رسالة المستلمة هي $\{f_1(x_1,\dots,x_n),\dots,f_n(x_1,\dots,x_n)\}$، وذلك بافتراض عدم وجود أي ضياع أو فقدان للرموز المرسلة عبر المصادر، عندئذ حسب النظرية الأساسية في ترميز الشبكة في الحالة الترجيحية تكون المسألة قابلة للحل إذا وفقط إذا تحقق أن الـ n ضلع المتعلقة بها تحمل تركيبات غير خطية مستقلة بالرسائل $\{x_1,\dots,x_n\}$ أي دوال الترميز الترجيحية المُعرِّفة لشبكة الاتصالات الترجيحية، مما يعني أن الرسائل المستلمة $\{f_1(x_1,\dots,x_n),\dots,f_n(x_1,\dots,x_n)\}$ مستقلة غير خطية.

ثانياً

لنبرهن تحقق $\mu_2(\sum_{i=1}^{n} a_i f_i)=\min\{\mu_2(a_i f_i)\}\,,i=1,\dots,n$

ينتج مباشرةً حسب تعميم المبرهنة الأساسية في ترميز الشبكة إلى الحالة الترجيحية وذلك حسب تعريف الاستقلال غير الخطي الترجيحي وهو المطلوب.

بفرض أن مجموعة دوال الترميز الترجيحية $\{f_1,\dots,f_n\}$ المُمثلة لمسألة الترميز على شبكة الاتصالات الترجيحية N تُشكل قاعدة ترجيحية في الفضاء $(F_q,\mu_1)[x_1,\dots,x_n]$ للمثالي $I=(\langle f_e\rangle,\mu_2)$.

عندئذ حسب التعريف تكون هذه الدوال مستقلة غير خطية ترجيحية، وحسب النظرية الأساسية في ترميز الشبكة الترجيحية تكون المسالة قابلة للحل وهو المطلوب.

6-5- نتيجة

لتكن N شبكة ترجيحية. إن مسألة ترميز الشبكة الترجيحية قابلة للحل إذا وفقط إذا تحقق أن التطبيق الترجيحي الحدودياتي F_R المُعرَّف بدوال الترميز الممثِّلة لمسألة ترميز الشبكة على N متباين.

البرهان:

إن مسألة ترميز الشبكة في الحالة الكلاسيكية قابلة للحل إذا وفقط إذا تحقق أن تطبيق كثيرات الحدود $F=(f_1,\dots,f_n)$ المعرِّف للشبكة متباين.

لأن المسألة قابلة للحل إذا وفقط إذا تحقق أن الـ n ضلع المتعلقة بها تحمل تركيبات غير خطية مستقلة بالرسائل $\{m_1,\dots,m_n\}$ مما يعني أن الرسائل المستلمة $\{f_1(m_1,\dots,m_n),\dots,f_n(m_1,\dots,m_n)\}$ مستقلة، وحسب تعريف الاستقلال غير الخطي (3-3) يوجد تقابل واحد لواحد بين المجموعة $\{m_1,\dots,m_n\}$ والمجموعة $\{f_1(m_1,\dots,m_n),\dots,f_n(m_1,\dots,m_n)\}$ وهذا يكافئ أن تطبيق كثيرات الحدود F المعرِّف للشبكة متباين

$$F=(f_1,\dots,f_n):{F_q}^n\to{F_q}^n$$
$$(m_1,\dots,m_n)\mapsto\big(f_1(m_1,\dots,m_n),\dots,f_n(m_1,\dots,m_n)\big)$$

وهذا يكافئ حسب التعريف (5-2) أن التطبيق الترجيحي الحدودياتي

$F_R=(f_1,\dots,f_n):\left(F_q^n,\mu_1\right)\longrightarrow\left(F_q^n,\mu_1\right)$ متباين.

6-6- نتيجة:

لتكن N شبكة ترجيحية، وبفرض أن $\{f_1,\dots,f_m\}$ هي مجموعة دوال الترميز الترجيحية المُمثلة لمسألة الترميز على شبكة الاتصالات الترجيحية N. عندئذ تكون مسألة ترميز الشبكة الترجيحية قابلة للحل إذا وجد للتطبيق الترجيحي الحدودياتي $F_R=(f_1,\dots,f_n):\left(F_q^n,\mu_1\right)\longrightarrow\left(F_q^n,\mu_1\right)$ مقلوب ترجيحي وليكن F_R^{-1}.

البرهان:

حسب النتيجة (5−7) نجد أن التطبيق الترجيحي الحدودياتي $F_R = (f_1, \dots, f_n): \left(F_q^n, \mu_1\right) \longrightarrow \left(F_q^n, \mu_1\right)$ هو تطبيق ترجيحي تقابل، فهو متباين وحسب النتيجة السابقة تكون مسألة الترميز قابلة للحل.

6−7− نتيجة

لتكن N شبكة ترجيحية، والأبجدية Σ هي عبارة عن حقل ترجيحي منته وليكن $\left(\overline{F_q}, \mu_1\right)$ حيث $\overline{F_q}$ هي الغلاقة الجبرية (Algebraic closure) للحقل F_q ، ولتكن $\{f_1, \dots, f_n\}$ دوال الترميز الترجيحية المُعرِّفة لشبكة الاتصالات الترجيحية، عندئذ مسألة ترميز الشبكة الترجيحية قابلة للحل (أي يمكن لكل مستقبل استخلاص الرسائل المرسلة عبر المصادر) إذا تحقق أن $\det JF_R \neq 0$.

لنفترض أن مسألة ترميز الشبكة غير قابلة للحل ولنبرهن أن $\det JF_R = 0$ وبذلك يتم المطلوب.

بما أن مسألة ترميز الشبكة غير قابلة للحل أي حسب النتيجة (6−5) يكون التطبيق الترجيحي الحدودياتي F_R غير متباين أي التطبيق الكلاسيكي $F: \bar{F}_q^n \longrightarrow \bar{F}_q^n$ غير متباين أيضاً.

لنُعرِّف التشاكل الحلقي:

$$\Phi: \bar{F}_q[y_1, \dots, y_n] \to \bar{F}_q[x_1, \dots, x_n]$$
$$y_i \mapsto f_i$$

أي

$$\forall h = \sum_v c_v y_1^{v_1} \dots y_n^{v_n} \ : \ c_v \in F_q, v = (v_1, \dots, v_n) \in N^n$$

يتحقق

$$\Phi(h) = \sum_v c_v f_1^{v_1} \dots f_n^{v_n} = h(f_1, \dots, f_n) \in \bar{F}_q[x_1, \dots, x_n]$$

عندها نواة هذا التشاكل تكون معطاة بالشكل

$$\text{Ker}\, \Phi = \left\{P \in \bar{F}_q[y_1, \dots, y_n] \ : P(f_1, \dots, f_n) = 0\right\}$$

وبما أن التطبيق $F: \bar{F}_q^n \longrightarrow \bar{F}_q^n$ غير متباين فإن $\mathrm{Ker}\,\Phi \neq \{0\}$.

وذلك بسبب التكافؤ التالي:

يُقال إن المتنوعتين A, B متماثلتين إذا وفقط إذا كانت حلقات الاحداثيات لهما متماثلة.

وهنا لدينا $A = B = \bar{F}_q^n$ فيتحقق أن $\mathbb{I}(\bar{F}_q^n) = \langle 0 \rangle$

أي يوجد $P(u_1, \dots, u_n)$ كثير حدود غير صفري ولنختاره من أصغر درجة كلية يحقق :

$$P(f_1, \dots, f_n) = 0$$

عندئذٍ إذا قُمنا بحساب المُشتقات الجزئية لكثير الحدود $P(f_1, \dots, f_n)$ نحصل على:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} P(f_1, \dots, f_n) = \frac{\partial P}{\partial u_1}\frac{\partial f_1}{\partial x_i} + \cdots + \frac{\partial P}{\partial u_n}\frac{\partial f_n}{\partial x_i} : i = 1, \dots, n$$

بالتالي يمكن أن نكتب العلاقة السابقة بالشكل المصفوفي:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_n} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial P}{\partial u_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial P}{\partial u_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

وبحسب اختيار P فإنه يتحقق:

$$\frac{\partial P}{\partial u_i}(f_1, \dots, f_n) \neq 0 \quad : \quad 1 \leq i \leq n$$

وبالتالي $\det(J(f_1, \dots, f_n)) = 0$ وهو المطلوب.

6-8- مبرهنة

ليكن التطبيق الترجيحي الحدودياتي F_R المُعرِّف لشبكة اتصالات ترجيحية معطاة N، من الشكل التالي:

$$F_R = (f_1, \dots, f_n): (F_q^n, \mu_1) \longrightarrow (F_q^n, \mu_1)$$
$$(x_1, \dots, x_n) \longmapsto (f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_n(x_1, \dots, x_n))$$

عندئذ مسألة ترميز الشبكة قابلة للحل إذا تحقق أنَّ

$$\left(F_q,\mu_1\right)[x_1,\dots,x_n]=\left(F_q,\mu_1\right)[f_1,\dots,f_n]$$

البرهان:

بفرض أنَّ $\left(F_q,\mu_1\right)[x_1,\dots,x_n]=\left(F_q,\mu_1\right)[f_1,\dots,f_n]$ عندئذ $x_i\in$ $\left(F_q,\mu_1\right)[f_1,\dots,f_n]$ لأجل كل i، أي يوجد g_i بحيث $x_i=g_i(f_1,\dots,f_n)$ لذلك $G=(g_1,\dots,g_n)$ هو معاكس يساري لـ F_R، حسب التعريف (6−5) وحسب النتيجة (6−6) فإن مسألة ترميز الشبكة تكون قابلة للحل.

نُقدِّم فيما يلي شرطاً كافياً لقابلية حل مسألة الارسال على شبكة ترجيحية اعتماداً على بُعد الفضاء $\frac{\left(F_q,\mu_1\right)[X,Y]}{I}$.

ليكن $\left(F_q,\mu_1\right)$ حقلاً ما و $F_R=(f_1,\dots,f_n):\left(F_q^n,\mu_1\right)\rightarrow\left(F_q^n,\mu_1\right)$ تطبيق حدودياتي ترجيحي ولتكن $y_1,\dots,y_n$ عبارة عن n متحول أو اختصاراً Y وليكن I مثالياً في $\left(F_q,\mu_1\right)[X,Y]$ مُولَّد بـ $y_1-f_1(X),\dots,y_n-f_n(X)$

عندئذ يمكننا صياغة المبرهنة الآتية:

6−9− مبرهنة:

لتكن N شبكة ترجيحية، عندئذ مسألة الترميز قابلة للحل إذا تحقق

$$\dim\frac{\left(F_q,\mu_1\right)[X,Y]}{I}=1$$

البرهان

بفرض أن $\dim\frac{\left(F_q,\mu_1\right)[X,Y]}{I}=1$

عناصر هذا الفضاء هي المرافقات من الشكل :

$$[f]=f+I=\{f+h:h\in I\}$$

وتُعرَّف القاعدة للفضاء المتّجهي $\frac{K[x_1,\dots,x_n]}{I}$ بأنها مجموعة المرافقات لكل الحدوديات X بحيث يتحقق، من أجل كل $i=1,\dots,t$ فإن $LP(g_i)$ لا يقسم X .

([2], p58)

عندئذ قاعدة غروبنر للمثالي I لها الشكل:

$$G=\{x_1-g_1(Y),\dots,x_n-g_n(Y)\}$$ حيث $g_i\in\left(F_q,\mu_1\right)[Y]$

وبما أن $I = \langle y_1 - f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, y_n - f_n(x_1, \dots, x_n) \rangle$

عندئذ يمكن أن نكتب

$$x_i - g_i(Y) = \sum_j b_j(X, Y)\left(y_j - f_j(X)\right) \ : \ b_j \in \left(F_q, \mu_1\right)[X, Y]$$

ويتحقق عند المستقبلات أن $y_j = f_j$

بالتالي $x_i - g_i\left(f_1(X), \dots, f_n(X)\right) = 0 \ ; \forall i = 1, \dots, n$

إذن $G\left(F(X)\right) = X$ حيث $G = (g_1, \dots, g_n)$ أي F يملك معاكس، $([3], p2)$

وحسب النتيجة (6–6) فإن مسألة الترميز قابلة للحل.

6–10- الترميز الثنائي الترجيحي:

نُعرِّف الرسالة الترجيحية الثنائية لتكون مجموعة جزئية M من Z_2^n لها الشكل

$$M = \{(m_i, \mu(m_i)) \ : \ m_i \in Z_2^n\}$$

مزودة بدالة عضوية μ مُعرَّفة بالشكل التالي

$$\mu: Z_2^n \to [0, 1]$$
$$m_i \mapsto \frac{w(m_i)}{J}$$

حيث

- $w(m_i)$ هو مجموع مواقع الخانات غير الصفرية في m_i
- J يمثل أكبر مجموع مواقع خانات ممكن وهو مُعرَّف كما يلي $J = 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

وإذا تحقق

1. $\mu(m_i + m_j) \ge \min\{\mu(m_i), \mu(m_j)\}$
2. $\mu(m_i m_j) \le \max\{\mu(m_i), \mu(m_j)\}$

عندها يُدعى ترميز ثنائي ترجيحي.

6-10-2- مثال لترميز ثنائي ترجيحي:

لنأخذ الترميز على الأبجدية Z_2^7

$$C = \left\{ \begin{matrix} 0000000,1111111,1000101,1100010,0110001, \\ 1011000,0101100,0010110,0001011 \end{matrix} \right\}$$

$m_i \in C$	$\mu(m_i)$
0000000	0/28
1111111	28/28
1000101	13/28
1100010	9/28
0110001	12/28
1011000	8/28
0101100	11/28
0010110	14/28
0001011	17/28

جدول -1

نلاحظ أن شروط الترميز الثنائي الترجيحي محققة من اجل كل كلمات الترميز C .

7- مثال

سنُقدِّم فيما يلي تطبيقاً عملياً على شبكة ترجيحية ما وسنرى أن هذا النوع من الشبكات يُقدِّم أكبر قدر ممكن من الثقة في جهة الحماية من حسابات التعريف المُزيفة وذلك من خلال تعريف دالة للعضوية في الشبكة، وهذا التطبيق مُتبع في بعض شبكات الاتصال مثل شبكة Research Gate حيث أنه لا يتم قبول أي عضو فيها إلا بعد دراسة معينة.

توصيف العمل على هذا النوع من الشبكات

التسجيل:

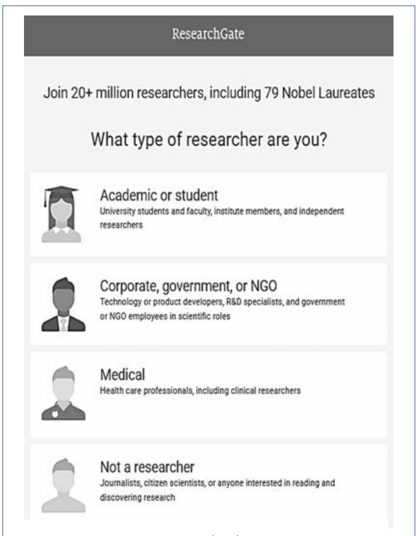
الخطوة الأولى للانضمام إلى الشبكة هي التسجيل، أثناء التسجيل يجب أن يقوم الشخص بعدة خطوات ليتم تسجيله فيجب على الأشخاص المسجلين حديثاً إضافة بعض المعلومات الأساسية مثل الاسم والعمر والصورة الشخصية والجنس وما إلى ذلك من معلومات شخصية، وبعدها يحصل جميع الأشخاص الموجودين على الشبكة على هذه المعلومات الأساسية للشخص المُسجل حديثًا.

تتميز هذه الشبكة المدروسة بخطوة سندعوها خطوة المُصادقة ففي هذه الخطوة يجب على الشخص تقديم بعض المعلومات مثل (1) اسم المدرسة – الكلية، الاهتمامات العلمية (2) موقع الوظيفة الحالية أو مكان العمل أو المؤسسة (أيضاً الوظائف وأماكن العمل السابقة، إن وجدت)، فالمنظمات والمواقع الإلكترونية الرسمية تحتوي على المعلومات الشخصية الأساسية ومعلومات الاتصال إلى جانب عناوين البريد الإلكتروني كلها متوفرة في مواقع الويب الخاصة بالمؤسسة أو المنظمة أو الجامعة التي ينتمي إليها الشخص.

على سبيل المثال في شبكة Research Gate نلاحظ وجود اختيار آخر للباحثين الذين لا ينتمون إلى منظمة أو مؤسسة تمتلك حساب الكتروني رسمي (شكل 7–1)، لذلك لا يمكن التأكد من هوية هؤلاء الأشخاص لأن الملفات الشخصية الإلكترونية لهؤلاء الأشخاص غير متوفرة في مواقع الويب الأصلية، لذلك سيتم قبول هؤلاء بعد موافقة مجموعة معينة من أعضاء الشبكة وليكن عدد هؤلاء هو n.

(من أجل هؤلاء يتحقق $\sigma(p) = 1$)

حيث p هو عضو أساسي في الشبكة.



شكل 7-1

نُعرِّف أيضاً قيمة عضوية الرؤوس (التي تُمثِّل الأشخاص المنتسبين إلى الشبكة المدروسة) كما يلي:

$$\sigma(p) = \begin{cases} \frac{d}{n} & \text{if } d = 1,2,\dots,n \\ 1 & \text{if } d > n \end{cases}$$

حيث d هو عدد الرؤوس المرافقة لـ p (أي التي تشترك مع الشخص p برابط على سبيل المثال نفس التخصص الدقيق – أو نفس الجنسية).

وحسب التعريف (4−4)، نُعرِّف قيمة عضوية الضلع الذي يربط بين $p_i, p_j \in V$ من خلال التطبيق $\mu: V \times V \rightarrow [0,1]$ حيث

$$\mu(p_i, p_j) = min\{\sigma(p_i), \sigma(p_j)\}$$

الفائدة من هذه الشبكة:

تمتلك الجامعات التي ترعاها الحكومة مواقع ويب رسمية تحتوي هذه المواقع على الأسماء ومعلومات الاتصال (على سبيل المثال أعضاء هيئة التدريس في الجامعة – كلية العلوم). إذا أراد شخص ما التسجيل في الشبكة فعليه تقديم اسم الجامعة وعنوان الويب ثم يتعين عليه تقديم عنوان بريده الإلكتروني وأرقام هواتفه وما إلى ذلك من المعلومات المتوفرة في عنوان الويب، ثم يتم إرسال رمز التحقق أو رابط التفعيل إلى عناوين الاتصال إذا تم التحقق من المعلومات بشكل صحيح، فمن المؤكد أن الشخص ليس مزيفاً.

هنا يحصل الأشخاص العاملين في المؤسسات الرسمية والشركات وما إلى ذلك على فرصة للحصول على العضوية الكاملة (أي $\sigma(p) = 1$)، بينما يحصل الأشخاص الآخرون على العضوية الكاملة من خلال التَّعرُف على الأشخاص المألوفين له فقط مثل أصدقاء المدرسة – الكلية – الجامعة، والزملاء، وما إلى ذلك في الشبكة.

بالمقارنة مع Facebook و Twitter لا يمكن للأشخاص تحديد فيما إذا كان الملف الشخصي الذي يُمثل ملفاً شخصياً لأحد المشاهير أو من عامة الناس هو ملف حقيقي أم مزيف، لأن الملف الشخصي يتم إنشاؤه على هذه الشبكات بواسطة مجهول، لا يحتاج إلى التحقق منه أو التعرف عليه، هنا تكمن فائدة الشبكات الترجيحية في الحد من الملفات المزيفة.

8- خلاصة

تُقدِّم هذه الورقة العلمية توصيف جبري لمسألة ترميز الشبكة الترجيحية، فتم عرض موديل أو نموذج رياضي لشبكة اتصالات ترجيحية، كما تم نقل النظرية الأساسية لترميز الشبكة من الحالة الكلاسيكية إلى الحالة الترجيحية ووضع شرط لازم وكافي لتكون مسألة الترميز قابلة للحل اعتماداً على كثيرات الحدود المُعرِّفة لمسألة الترميز على الشبكة الترجيحية (6-4)، كما تم استخلاص بعض النتائج حول قابلية حل المسألة اعتماداً على التطبيق الترجيحي الحدودياتي F_R المُعرَّف بدوال الترميز الممثلة لمسألة ترميز الشبكة، وفي النهاية تم تقديم دراسة حول شبكة واقعية لتوضيح أهمية العمل على الشبكات الترجيحية.

9- توصيات ومقترحات:

بالارتكاز على ما توصلنا إليه من نتائج، نرى أنه من الممكن الاستفادة من الحالة الترجيحية التي تم عرضها في هذا البحث في نظرية الترميز وبشكل خاص في اكتشاف وتصحيح الأخطاء الناتجة خلال عملية الإرسال عبر قنوات ضجيجية. ومن المواضيع الهامة جداً والتي نضعها كرؤية مستقبلية لموضوع بحثنا هذا هو موضوع حماية شبكة الاتصالات المدروسة من الهجمات (التنصت) أو من المستخدمين غير المُصرح لهم الدخول إلى الشبكة والحصول على المعلومات المُرسلة، أي موضوع أمن المعلومات المرسلة عبر الشبكة.

References :المراجع العلمية

1. ABDUKHALIKOV, K. KIM, C. 1998 Fuzzy Linear Maps, **journal of mathematical analysis and application**, 220. 1-13

2. ADAMS, W and LOUSTAUNAU, P 1994- **An Introduction to Groebner Bases**. Graduate Studies in mathematics 3, AMS, Providence. 105p.

3. ADAMUS, E PAWEL, B CRESPO, T and HAJTO, Z 2016. A new characterization of the invertibility of polynomial maps , **Mathematics, arXiv, Commutative Algebra**, Cornell University.1-15.

4. AHLSWEDE, R. CAI, N and ROBERT, L 2000 Network Information Flow, **IEEE Transactions on Information Theory**, Vol.46, 4. 1204 -1216.

5. CELEBILER, M, and STETTE, G 1978 On Increasing the Down-Link Capacity of a Regenerative Satellite Repeater in Point-to-Point Communications, **Proceedings of the IEEE**, Vol. 66. 1. 98–100.

6.COX D,LITTLE J, and O'SHEA D, 1998- **Ideals, Varieties, and Algorithms**. fourth Edition. New York: London. Springer. 653**p**

7. FRAGOULI, C and SOLJANIN, E 2007 - **Network Coding Fundamentals**, Foundation and Trends R in Networking, 133p

8. FRAGOULI, C and SOLJANIN, E 2015 (Secure) Linear network coding multicast A theoretical minimum and some open problems, Designs, Codes and Cryptography comprising the 25th Anniversary Issue. **New York: Springer Verlag**.1-42.

9. GEBRAY, G and REDDY, B 2014 Fuzzy Set Field and Fuzzy Metric, Department of Mathematics, UCS, **Osmania University, India**,Vol.2014 .1-9.

10. ISMAIL, F and MASSADEH, M 2013 A New Structure and Constructions of L-Fuzzy Maps, **International Journal of Computational and Applied Mathematics**. ISSN 1819-4966 Vol 8.1. 1-10 .

11 KAYAL, N 2007. The complexity of the annihilating polynomial, **Conference Paper in Proceedings of the Annual IEEE Conference on Computational Complexity**, Paris: France.184-193.

12. KIMA, B KIMB, S and SOOK, K 2014 On the fuzzy polynomial ideals, **Journal of Intelligent & Fuzzy Systems**,Vol. 27. 487–494.

13. LEHMAN, A and LEHMAN, E 2004 Complexity classification of network information flow problems, **Proceedings of the fifteenth annual ACM-SIAM symposium on discrete algorithms**. 142–150.

14. MORDESON, J MATHEW, S MALIK, D 2018- **Fuzzy Graph Theory with Applications to Human Trafficking**, Springer, 262p.

15. ROUAYHEB, E and GEORGHIADES, C 2009. Graph Theoretic Methods in Coding Theory, **ECE Department,Texas A&M University**, College Station, TX 77843,1-10

16. VAN DEN ESSEN, A 1994- **Automorphisms of Affine Spaces**, Proceedings of a Conference held in Curaao (Netherlands

AntilIes), July 4-8, 1994, under auspices of the Caribbean Mathematical Foundation CMF. 243p.

17. ZADEH, L 1965 Fuzzy Sets, **Information and control**, Vol. 8, Issue 3. 338-353.

18. ZHANG, G CAI, S ZHANG, D 2017.The Nonlinear Network Coding and Its Application in Error-Correcting Codes, **Springer**. 1-30.

19- شاهين، رامي، محفوض، سهيل. 2010-2011. **نظرية البيان**، منشورات جامعة تشرين، كلية العلوم.