حول مسألة غالوا العكسية

طالب الدراسات العليا: فادي أبو حرب

كلية العلوم – جامعة دمشق

اشراف الدكتور: حمزة حاكمي + د. نور غازي

الملخص

تنص مسألة غالوا العكسية على ما يلي: **لأجل أي زمرة منتهية G ولأجل أي حقل K، يوجد تمديد غالوا F/K زمرته تماثل الزمرة G.** قمنا في بحثنا هذا بحل هذه المسألة فوق حقل لا يحوي حقل أمبل، وذلك بالاعتماد على حل مسألة التوسيع EP وعلاقتها بمسألة غالوا العكسية مع الاستفادة من مبرهنة بوب.

الكلمات المفتاحية : زمرة غالوا – مسألة التوسيع – حقل هنسيلي – الحقل الأمبل.

التصنيف الرياضياتي العالمي: 2020 MSC 12F12

On Inverse Galois Problem

Abstract

Inverse Galois Problem over a field K consists in realizing finite groups as Galois groups of Galois extension F/K. We do a solution of this problem over field does not have ample field, depending on solving Embedding Problem and its relation with Inverse Galois Problem and by using Pop theorem.

Key Words : Galois group, Embedding Problem, Henselian field, Ample field.

Mathematical Subject Classification : 2020 MSC 12F12.

1 – مقدمة .

ظهرت نظرية غالوا في بدايات القرن التاسع عشر لإيجاد حل للحدوديات من خلال جذورها. أول نتيجة مهمة تم إنجازها من قبل العالم غالوا هي برهان أن الحدوديات من الدرجة الخامسة فما فوق ليست قابلة للحل بواسطة الجذور بالحالة العامة، وأعطى العالم غالوا شرطاً لازماً وكافياً لحل هذا النوع من الحدوديات بواسطة الجذور وهو أن تكون زمرة غالوا لهذه الحدودية قابلة للحل.

وفقاً للمبرهنة الأساسية في نظرية غالوا فإنه يوجد لأجل كل حدودية غير خزولة على حقل ما K زمرة غالوا مقابلة لها. دُعيت المسألة المعاكسة لهذه الفكرة **بمسألة غالوا العكسية IGP**، والتي تنص على ما يلي: **لأجل زمرة منتهية ما G، ولأجل حقل ما K، يوجد تمديد غالوا E للحقل K بحيث زمرته تماثل الزمرة G.**

تم حل هذه المسألة لأجل بعض الزمر مثل الزمر A_n, S_n ولأجل الزمر التبديلية، وتم حل هذه المسألة أيضاً لأجل بعض الحقول مثل حقل الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$.

ترافق مع ظهور مسألة غالوا العكسية ظهور مسألة تُعد تعميماً لها، دُعيت مسألة التوسيع Embedding problem والتي يرمز لها بـ **EP**، والتي ساهمت في حل الكثير من الحالات في مسألة غالوا العكسية. هناك الكثير ممن عملوا في هذه المسألة ونذكر منهم Scholz, Brauer, Faddeev, Haran.

أثبت بوب في مقال له عام 1996 أنَّ مسألة التوسيع المنتهية المنشطرة تملك حلاً تاماً فوق نوع معين من الحقول دعاه بالحقل الأمبل[10]، حيث يُعرّف الحقل الأمبل كما يلي: **نقول عن الحقل K إنه أمبل إذا كان لكل منحني أملس معرّف على K عدد غير منته من النقاط الـ K–نسبية بشرط وجود نقطة K –نسبية واحدة على الأقل.**

سنقوم في بحثنا هذا بحل مسألة غالوا العكسية لأجل حقل لا يحوي حقل أمبل. أي سنقوم بإثبات المبرهنة التالية:

مبرهنة (*).

ليكن D حقلاً مميزه صفراً و لا يحوي حقل أمبل. عندئذٍ يوجد حقل K ممدد منتظم لـ D بحيث يحقق ما يلي:

1. **لتكن G زمرة منتهية، عندها يوجد حقل E تمديد للحقل K بحيث $\mathbf{Gal(E/K) \cong G}$.**
2. **الحقل K لا يحوي حقل أمبل.**

2 – الدراسة البحثية.

2 – 1 التمديد المنتهي والجبري. [6]

ليكن L, K حقلين. نقول عن الحقل L إنه تمديد لِ K (و نرمز لذلك بـ L/K) إذا وجد تشاكل حلقي من K إلى L.

نعرّف درجة تمديد L/K بأنها بُعد الفضاء الشعاعي L على الحقل K، و نرمز لها بـ $[L:K]$. نقول عن التمديد L/K إنه منته إذا كان $[L:K] < \infty$ و خلاف ذلك نقول أنّ التمديد غير منتهي. فمثلاً التمديد $\mathbb{Q}(\sqrt{2})/\mathbb{Q}$ تمديد منته درجته 2 بينما $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$ تمديد غير منتهي. نقول عن التمديد L/K إنه تمديد جبري إذا كان كل عنصر $t \in L$ جبرياً فوق K (أي توجد حدودية غير صفرية $p(x) \in K[x]$ بحيث $p(t) = 0$). تشكل مجموعة العناصر من L الجبرية فوق K حقلاً ممدداً للحقل K يدعى باللصاقة الجبرية لـ K في L، ويرمز لها بـ $\overline{K}$.

2 – 2 تمديد غالوا.

2-2-1 تركيب الحقول. [6]

ليكن E/K تمديد حقول. إذا كان L_1, L_2 حقلين جزئيين للتمديد E/K، عندئذٍ ندعو

$$L_1\, L_2 := L_1(\, L_2) = L_2(\, L_1)$$

بتركيب الحقلين L_1, L_2 في E، ويُمثل أصغر حقل (بالنسبة لعلاقة الاحتواء) يحوي L_1, L_2 معاً.

2-2-2 التمديد القابل للفصل. [6]

ليكن F/K تمديداً جبرياً. نقول عن حدودية $p(x) \in K[x]$ إنها قابلةٌ للفصلِ فوق K إذا كانت جميع جذورها في تمديد ما للحقل K بسيطة. نقول عن العنصر $\alpha \in F$ إنه قابل للفصل فوق K إذا كانت الحدودية الأصغرية من $K[x]$ التي تقبل α صفراً لها قابلةً للفصلِ فوق K. نقول عن التمديد الجبري F/K إنه قابل للفصل إذا كان كل عنصر $\alpha \in F$ قابلاً للفصل فوق K. فمثلاً التمديد الجبري $\mathbb{Q}(\sqrt{2})/\mathbb{Q}$ قابل للفصل.
تشكل مجموعة العناصر من F القابلة للفصل فوق K حقلاً ممداً للحقل K يُدعى اللصاقة الانفصالية لـ K في F يرمز له بـ K_s.
ملاحظة : نتعامل في ورقتنا البحثية مع الحقول التي مميزها صفر، وفي هذه الحالة يتطابق مفهوم اللصاقة الانفصالية والجبرية، أي $K_s = \overline{K}$.

3-2-2 التمديد الناظمي. [1]

نقول عن التمديد الجبري E/K إنه ناظمي إذا كان لأجل كل $\alpha \in E$ فإن الحدودية غير الخزولة على K والتي تقبل α صفراً لها تتحلل بشكل تام فيه. مثلاً $\mathbb{Q}(\sqrt{2})/\mathbb{Q}$ تمديد ناظمي، بينما $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})/\mathbb{Q}$ ليس ناظمياً لأن الحدودية $(x^3 - 2)$ تملك صفراً في $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ ولكن لا تتحلل بشكل تام فيه.
كما وأن التعريف السابق يكافئ التعريف التالي: التمديد الجبري E/K ناظمي إذا وفقط إذا كان لأجل كل تشاكل σ من E إلى $\overline{K}$ يثبت جميع عناصر الحقل K هو تماثل على E.

2-2-4 تمديد غالوا : [1]

نقول عن التمديد الجبري E/K إنه تمديد غالوا إذا كان ناظمياً وقابلاً للفصل.

مثال : التمديد $\mathbb{Q}(\sqrt{2})/\mathbb{Q}$ تمديد غالوا، بينما التمديد $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})/\mathbb{Q}$ ليس تمديد غالوا.

2-2-5 زمرة غالوا لتمديد غالوا :[1]

ليكن E/K تمديد غالوا. نعرّف زمرة غالوا لهذا التمديد على أنّها زمرة كل التماثلات من E إلى نفسها و التي تثبت جميع عناصر الحقل K ونرمز لها بـ $\mathrm{Gal}(E/K)$، بمعنى آخر إذا كان σ عنصراً من $\mathrm{Gal}(E/K)$ فإن $\sigma: E \to E$ تماثل ويحقق $\sigma(x) = x$ وذلك مهما يكن $x \in K$.

2-2-6 زمرة غالوا المطلقة. [6]

ليكن K حقلاً ولتكن K_s اللصاقة الانفصالية لـ K. نعرّف زمرة غالوا المطلقة للحقل K بأنها

$$G_K := \mathrm{Gal}(K_s/K)$$

مثال : [6]

زمرة غالوا المطلقة لحقل الأعداد الحقيقة $\mathbb{R}$ هي الزمرة الدوارة من المرتبة 2 نظراً لأنَّ حقل الأعداد العقدية $\mathbb{C}$ هو اللصاقة الجبرية لـ $\mathbb{R}$.

2-2-7 مبرهنة العنصر الأولي : [1]

ليكن L/K تمديداً منتهياً قابلاً للفصل، عندئذٍ يملك L عنصراً أولياً أي يوجد $\alpha \in L$ بحيث إنَّ

$L = K(\alpha)$. يدعى α بعنصر أولي في الحقل L، كما ويدعى التمديد L/K بالتمديد البسيط.

2-2-8 الحقل المثبت بالنواة. [1]

ليكن E/K تمديد غالوا، ولنفرض أنّ Γ زمرة جزئية من زمرة غالوا $Gal(E/K)$. تُشكل المجموعة

$$E^{\Gamma} = \{u \in E: \forall \gamma \in \Gamma;\ \gamma(u) = u\}$$

حقلاً جزئياً من E يحوي K يدعى الحقل الجزئي من E المثبت بـ Γ. كما أن القضايا الآتية صحيحة.

1. $Gal\left(E/E^{\Gamma}\right) = \Gamma$.
2. $\left[E: E^{\Gamma}\right] = \left|Gal\left(E/E^{\Gamma}\right)\right| = |\Gamma|$.
3. $\left[E^{\Gamma}: K\right] = \frac{|Gal(E/K)|}{|\Gamma|}$.

2-2-9 الحقول الجزئية من تمديدات غالوا وعلاقتها بزمرة غالوا. [1]

ليكن E/K تمديد غالوا ولنفرض أن L/K تمديد جزئي من E/K (أي $E/L/K$)، عندئذٍ E/L تمديد غالوا. إنَّ زمرة غالوا $Gal(E/L)$ هي زمرة جزئية من $Gal(E/K)$، ومرتبتها $[E: L] = |Gal(E/L)|$. كما أنَّ $L = E^{Gal(E/L)}$.

2-3 حقل سلاسل لورنس : [11]

بفرض K حقل ما وَ Λ مجموعة المتتاليات $(a_i)_{i\in I}$ من عناصر K حيث كل عناصرها أصفار باستثناء عدد منته منها ولنعرف الجمع على Λ بالشكل

$$(a_i)_i + (b_i)_i = (a_i + b_i)_i$$

والضرب بالشكل

$$(a_i)_i.(b_j)_j = (c_n)_n \quad ; \; c_n = \sum_{i+j=n} a_i b_j$$

يشكل الجمع والضرب قانوني تشكيل داخليين على المجموعة Λ، وتشكل هذه المجموعة مع هذين القانونين حقلاً، إن عمليات الحقل في Λ تقابل صيغتا الجمع والضرب لسلاسل لورنس وبهذا يدعى Λ حقل لصيغ سلاسل لورنس فوق K عناصره من الشكل $\sum_{i=N}^{\infty} a_i x^i$ ونرمز لـ Λ عندئذٍ بالرمز $K((x))$ ويدعى حقل سلاسل لورنس بأمثال من K.

2-4 التمديد المنتظم: [5]

2-4-1 تعريف التمديد المنتظم.

نقول عن التمديد الحقلي K/k إنه منتظم إذا حقق أحد الشرطين المتكافئين التاليين:

1. k مغلق جبرياً في K (بمعنى أن كل عنصر من K جبري فوق k يقع في k)، وK قابل للفصل فوق k.
2. K منفصل خطياً عن $\bar{k}$ فوق k، (أي إن كل مجموعة منتهية من عناصر K والتي تكون مستقلة خطياً فوق k تبقى مستقلة خطياً فوق $\bar{k}$).

خصائص التمديد المنتظم. [5],[4]

2-4-2 مبرهنة. القضايا الآتية محققة.

1. ليكن K تمديداً منتظماً للحقل k. الحقل الجزئي E للتمديد K/k يكون منتظماً فوق k.
2. ليكن E تمديداً منتظماً للحقل k و K تمديد منتظم لـ E، عندئذٍ K تمديد منتظم لـ k.
3. إذا كان k مغلقاً جبرياً، عندئذٍ فإنَّ أي تمديد لـ k يكون منتظماً.
4. التمديد $K(T)/K$ منتظم، كما أنَّ التمديد $K((T))/K$ منتظم.

5. ليكن K, L تمديدين منتظمين لـ k. إذا كان K منفصل خطياً عن L فوق k عندئذٍ فإنَّ LK تمديد منتظم لـ k.

6 . كل تمديد منتظم يكون قابلاً للفصل.

2-5 تعريف حقل الدوال: [4]

ندعو التمديد الحقلي F/K حقل دوال جبرية بمتحول واحد (أو باختصار حقل دوال) إذا تحقق الشرطان التاليان:

1. درجة تسامي F/K تساوي 1.
2. F/K منتهي التوليد ومنتظم.

2-6 الحقل الهنسيلي. [4]

ليكن F حقلاً. نعرّف التقييم للحقل F بأنه تطبيق ν من F إلى مجموعة $\Gamma \cup \{\infty\}$، حيث Γ زمرة مرتبة، ويحقق الخواص التالية :

1. $\nu(ab) = \nu(a) + \nu(b)$.

2. $\nu(a+b) \geq \min\big(\nu(a), \nu(b)\big)$.

3. $\nu(a) = \infty$ إذا وفقط إذا $a = 0$.

4. $\exists a \in F^{\times};\ \nu(a) \neq 0$.

ندعو الزوج (F, ν) بالحقل المقيّم. نقول عن الحقل K إنه حقل هنسيلي بالنسبة للتقييم ν إذا كان ν يملك تمديد وحيد لأجل كل تمديد جبري للحقل K. يحقق التقييم ν لأجل كل $x \in K_s$ و $\sigma \in Gal(K)$ المساواة $\nu\big(\sigma(x)\big) = \nu(x)$. إنَّ $K((x)) \cap \overline{K(x)}$ هو حقل هنسيلي [4, §11.5]. كما أنَّ الحقل الهنسيلي هو حقل أمبل [9, §1].

2-7 حقل هلبرت.

2-7-1 تعريف حقل هلبرت.[11]

نقول عن حقل k إنه حقل هلبرت إذا تحقق الشرط الآتي:

لأجل أي حدودية غير خزولة $f(x, y) \in k[x, y]$ بمتحولين فوق الحقل k، وبدرجة ≤ 1 بالنسبة للمتحول y فإنه يوجد عدد غير منته من الثوابت $b \in k$ بحيث تبقى الحدودية المخصصة عند $x = b$ أي $f(b, y) \in k[y]$ (بمتحول واحد) غير خزولة على k [11, def 1.9].

2-7-2 خواص حقل هلبرت.

1. إذا كان k هلبرت فإنَّ أي تمديد منته التوليد للحقل k يكون أيضاً هلبرت[11, corllary 1.11].
2. الحقل $k(x_1, \cdots, x_n)$ حقل هلبرت وذلك لأجل أي حقل k و أي $n \geq 1$ [11, remark 1.12].
3. حقل الأعداد النسبية $\mathbb{Q}$ هو حقل هلبرت [11, theorem 1.23].

2-8 تعريف مسألة التوسيع. [10]

ليكن k حقلاً. مسألة التوسيع لـ k هي مخطط من التشاكلات الزمرية الغامرة التالية :

$$\begin{tikzcd} & & & G_k \arrow[d, "\alpha_k"] & \\ 1 \arrow[r] & \ker\beta \arrow[r] & \hat{H} \arrow[r, "\beta"'] & H \arrow[r] & 1 \end{tikzcd}$$

حيث أن السطر يشكل متتالية تامة.

نقول عن مسألة التوسيع إنها منتهية إذا كانت الزمرة $\widehat{H}$ منتهية، كما ونقول عنها إنها منشطرة إذا كان التشاكل β منشطراً (بمعنى أنه يوجد $\gamma: H \to \widehat{H}$ بحيث $\gamma \circ \beta = id_{\widehat{H}}$). إنّ حل مسألة التوسيع هو تشاكل $\mu: G_k \to \widehat{H}$ بحيث يحقق $\beta \circ \mu = \alpha_k$، ندعو هذا الحل بحل تام إذا كان التشاكل μ غامراً كما في المخطط التالي:

$$\begin{tikzcd}
 & & & G_k \arrow[dl, dashed, "\mu"'] \arrow[d, "\alpha_k"] & \\
1 \arrow[r] & \ker\beta \arrow[r] & \widehat{H} \arrow[r, "\beta"'] & H \arrow[r] & 1
\end{tikzcd}$$

نعرّف الحل المنتظم لـ EP_k بأنه حل لمسألة التوسيع فوق الحقل $k(T)$ بمعنى آخر أنه تشاكل $\gamma: G_{k(T)} \to \widehat{H}$ يجعل المخطط التالي تبديلي:

$$\begin{tikzcd}
 & & & G_{k(T)} \arrow[dl, dashed, "\gamma"'] \arrow[d, "\alpha"] & \\
1 \arrow[r] & \ker\beta \arrow[r] & \widehat{H} \arrow[r, "\beta"'] & H \arrow[r] & 1
\end{tikzcd}$$

يُدعى هذا الحل بحل منتظم تام إذا كان γ غامراً.

2-9 مبرهنة بوب. [10]

ليكن K حقل أمبل. عندئذٍ فإنَّ كل مسألة توسيع منتهية منشطرة لـ K تملك حلاً منتظماً تاماً. وعلى وجه الخصوص فإنَّ كل زمرة منتهية G تُمثل بشكل منتظم كزمرة غالوا فوق الحقل $K(T)$.

3- المبرهنة. $(*)$

ليكن k حقلاً مميزه صفراً و لا يحوي حقل أمبل. عندئذٍ يوجد حقل K ممدد منتظم لـ k بحيث يحقق ما يلي:

1. لتكن G زمرة منتهية، عندها يوجد حقل E تمديد غالوا للحقل K بحيث $\mathrm{Gal}(E/K) \cong G$.
2. الحقل K لا يحوي حقل أمبل.

البرهان.

لتكن EP_k مسألة توسيع منتهية منشطرة على k

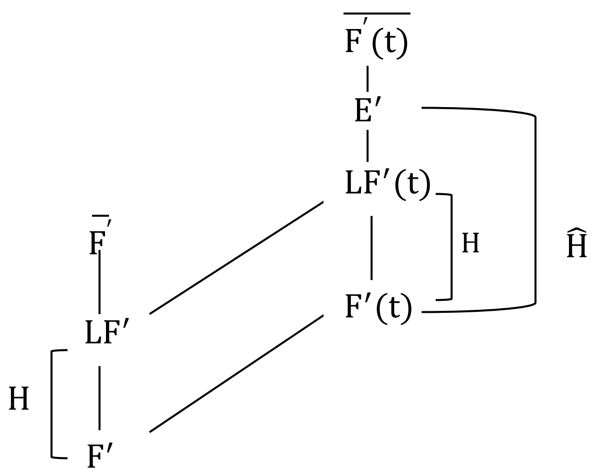
$$\begin{tikzcd} & & & G_k \arrow[d, "\alpha_k"] & \\ 1 \arrow[r] & \ker\beta \arrow[r] & \widehat{H} \arrow[r, "\beta"'] & H \arrow[r] & 1 \end{tikzcd}$$

والتي نرمز لها اختصاراً بـ $EP_k(\alpha_k, \beta)$. إنَّ الحقل $L = \bar{k}^{\ker \alpha_k}$ المثبت بنواة التشاكل α_k هو تمديد غالوا للحقل k زمرته تماثل الزمرة H. كما في الشكل التالي (شكل (1-1)) :

$$\begin{array}{cl} & \bar{k} \\ & | \\ G_k & L = \bar{k}^{\ker \alpha_k} \\ & | \quad\quad\quad\quad H \\ & k \end{array}$$

شكل $(1-1)$

لنثبت x متحولاً فوق k ولنأخذ $k((x))$ حقل سلاسل لورنس بالمتحول x فوق k، عندئذٍ إنَّ $F' = k((x)) \cap \overline{k(x)}$ هو حقل هنسيلي، حيث $\overline{k(x)}$ الغلاقة الجبرية لـ $k(x)$. عندئذٍ حسب $(2 - 4 - 1)$ فإنَّ F' تمديد منتظم لـ k من درجة تسامي 1. كذلك F' مغلق جبرياً في $k((x))$. إنَّ F' يكون أيضاً حقل هنسيلي وبالتالي أمبل وذلك حسب $(2 - 6)$. وبالتالي أي مسألة توسيع منتهية منشطرة فوق F' مثل $EP_k(\alpha_k, \beta)$ تملك حلاً منتظماً وذلك بحسب مبرهنة بوب $(2 - 9)$. إذاً يوجد E' تمديد غالوا للحقل $F'(t)$ يحوي الحقل $LF'(t)$ بحيث إنَّ $Gal(E'/F'(t)) = \widehat{H}$، كما هو موضح بالشكل التالي (شكل $(1 - 2)$)



شكل$(1 - 2)$

كما وأنَّ

$$\beta : Gal(E'/F'(t)) \to Gal(LF'(t)/F'(t))$$
$$\cong Gal(LF'/F')$$
$$\cong Gal(L/k) = H$$

من جهة أخرى التمديد $E'/F'(t)$ تمديد غالوا فهو قابل للفصل، وحسب مبرهنة العنصر الأولي $(2-2-7)$ فيوجد α عنصر أولي بحيث يكون $E' = F'(t)(\alpha)$.

إذاً توجد حدودية غير خزولة على F' مثل

$$f(y) = p(t,y) = a_n(t)y^n + \cdots + a_1(t)y + a_0(t) \in F'(t)[y]$$

بحيث $f(\alpha) = 0$. بأخذ أمثال الحدودية $f(y)$ وإضافتها للحقل $k(x)$ نحصل على الحقل

$$F(t) = k(x)(\, a_n(t), \cdots, a_0(t))$$

إنَّ $F(t)$ تمديد منته للحقل $k(x)$ محتوى في الحقل $k((x))$.

لنرمز بـ E للحقل $F(t)(\alpha)$. إنَّ E تمديد غالوا منتظم لـ $F(t)$ زمرته تماثل $\widehat{H}$. هذا يعني أنَّ مسألة التوسيع المنتهية المنشطرة فوق حقل الدوال F تملك حلاً منتظماً تاماً.

لتكن $\mathcal{EP}_k = \{EP_k^i(\alpha_{ik}, \beta_i) \mid i \in I\}$ مجموعة كل مسائل التوسيع المنتهية المنشطرة فوق الحقل k. حسب ما سبق فإنه يوجد لأجل كل i حقل دوال F_i/k بمتحول واحد بحيث تكون $EP_k^i(\alpha_{ik}, \beta_i)$ تملك حلاً منتظماً تاماً فوق F_i. باختيار الحقول $F_i(i \in I)$ بحيث يكون كل F_i منفصلاً خطياً فوق k عن تركيب جميع الحقول F_j بحيث $i \neq j$.

لنرمز بـ K للحقل المركب لكل F_i حيث $(i \in I)$. من خلال البناء نلاحظ ما يلي:

1. كل مسألة توسيع منشطرة منتهية $EP_k^i(\alpha_{ik}, \beta_i)(i \in I)$ تملك حلاً منتظماً تاماً فوق K.

2. من خلال تعريف حقل الدوال $(2-5)$ و خواص التمديد المنتظم $(2-4-2)$ فإنَّ K/k منتظم.

3. من خلال تعريف حقل هلبرت $(2-7-1)$ والخاصة $([7]\ \text{theorem}\ 1.3)$ فإنَّ K هلبرت.

بالتالي أصبح لدينا مسألة توسيع منشطرة قابلة للحل فوق حقل هلبرت K.

لنفرض G زمرةً منتهيةً ولنأخذ مسألة التوسيع المنتهية المنشطرة :

$$\begin{tikzcd}
 & & & G_{K(T)} \arrow[dl, dashed, "g"'] \arrow[d] & \\
1 \arrow[r] & G \arrow[r] & G \arrow[r] & 1 \arrow[r] & 1
\end{tikzcd}$$

حسب خواص الحقل الذي تم بناؤه فإنَّ هذه المسألة قابلةً للحل فوق الحقل K. بمعنى آخر يوجد تشاكل غامر $g: G_{K(T)} \to G$ بحيث يجعل المخطط تبديلي. بأخذ E الحقل $\overline{K(T)}^{\ker g}$ فإنَّ E تمديد غالوا منتظم للحقل $K(T)$ بحيث $G \cong \mathrm{Gal}(E/K(T))$.

بما أنَّ $E/K(T)$ تمديد غالوا منتظم فهو قابل للفصل وبالتالي حسب مبرهنة العنصر الأولي $(2-2-7)$ توجد $\alpha \in E$ بحيث $E = K(T)(\alpha_T)$. لنرمز بـ $p(T,Y) \in K(T)[Y]$ للحدودية غير الخزولة على $K(T)$ والتي تقبل α صفراً لها.

كون K حقل هلبرت وبالتالي يوجد عدد غير منته من الثوابت $b \in K$ بحيث تبقى الحدودية $p(b,Y) \in K[Y]$ غير خزولة على K. الحقل المقابل للحدودية $p(b,Y)$ هو $E_b = K(\alpha_b)$. وبالتالي E_b هو تمديد غالوا للحقل K زمرته تماثل الزمرة G. المخطط التالي يوضح ما سبق:

$$G\left[\begin{array}{c} E = K(T)(\alpha_T) \\ | \\ K(T) \end{array}\right. \xrightarrow{T=b} \left.\begin{array}{c} E_b = K(\alpha_b) \\ | \\ K \end{array}\right] G$$

بتلخيص ما سبق نجد أننا بنينا حقل هلبرت K ممدد لـ k بحيث لأجل أي زمرة منتهية G يوجد E_b تمديد للحقل K زمرته تماثل الزمرة G. بهذا نكون قد أثبتنا الطلب الأول.

سنثبت الآن إنَّ K لا يملك أي حقل أمبل. لنفرض جدلاً أنَّ K يحوي حقل أمبل وليكن L، عندئذٍ ومن خلال الفرض فإنَّ $L \not\subseteq k$ وبالتالي يوجد $x \in L \setminus k$. من جهة أخرى وبما أنّ K/k حقل دوال فإنَّ x متسام فوق k. ليكن k_0 الحقل الأولي لـ k وباختيار منحني أملس $\mathcal{C}$ من الجنس $g > 2$ معرّف فوق $k_0(x)$ مع نقطة $k_0(x)$–نسبية $P \in \mathcal{C}(k_0(x))$ وبحيث يكون $\mathcal{C}$ ليس متكافئ ثنائي النسبية (birational equivalent [3, p34]) – فوق تمديد ما منتهي لـ $E(x)$ – مع منحني معرّف فوق E لأجل أي حقل E يحوي k_0 وبحيث يبقى x متسامياً. إنَّ مثل هذا المنحني دائماً موجود، ويمكن العودة لـ ([3] example 6.2). لتكن $I_0 \subseteq I$ المجموعة الجزئية المنتهية الأصغرية الوحيدة من I بحيث يكون $x \in F_{I_0}$ (حيث F_{I_0} هي تركيب الحقول $F_i; i \in I_0$)، ولتكن $\{x_1, \cdots, x_n\}$ القاعدة المتسامية لـ F_{I_0} فوق $\mathbb{Q}$ و E هو الحقل المركب للحقول $k(x_1, \cdots, x_{n-1})$ لأجل $F_{I \setminus I_0}$. عندئذٍ يكون x متسامياً فوق E ويكون K حقل دوال بمتحول واحد فوق E. بما أنَّ $\mathcal{C}$ غير متكافئ فوق E مع أي منحني معرّف فوق E ويحقق الشرط السابق فإنه وبالاعتماد على مبرهنة موردل فوق حقول الدوال [8] يقتضي أنَّ $\mathcal{C}(K)$ منته، وكون

$$P \in \mathcal{C}(\mathbb{Q}_0(x)) \subseteq \mathcal{C}(L) \subseteq \mathcal{C}(K)$$

فإنَّ $\mathcal{C}(L)$ غير خال، وكون L حقل أمبل إذاً $\mathcal{C}(L)$ غير منته، وحسب الاحتواء $\mathcal{C}(L) \subseteq \mathcal{C}(K)$ فإنَّ هذا غير ممكن. إذا فالفرض الجدلي خاطئ، وأنَّ K لا يحوي حقل أمبل.

المراجع.

[1] BAKER, A., (2013). **An Introduction To Galois Theory** . University of Glasgow, 101p.

[2] DEBES, P. & DESCHAMPS, B., (1996) **The Regular Inverse Galois Problem over Large Fields**, 21p.

[3] Hartshorne, R., (1977). **Algebraic Geometry**. Springer, 496p.

[4] JARDEN, M. & FRIED, M. D., (2008). **Field Arithmatic**. Springer-Verlag, third edition, 792p.

[5] LANGE, S 2002- **Algebra**. Revised Third Edition, Springer-Verlag New York, 943p.

[6] LORENZ, F 2006- **Algebra, Volume I: Fields and Galois Theory**. Springer, Amrica, 293.

[7] Malle, G. & Matzat, B. H., (2018). **Inverse Galois Theory**. Second Edition, Springer, 533p.

[8] MIWA, M., (1965). **On Mordell's conjecture for algebraic curves over function fields**. 183-188p.

[9] POP, F., **Little survey on Large fields** –OLD & NEW- 22p.

[10] POP, F., (1996). **<u>Embedding problems over large fields</u>**– Annals of Mathematics, 144, 1-34p.

[11] VOLKLEIN, A., (1996). **<u>GROUPS AS GALOIS GROUPS, An Introduction</u>**. CAMPRIDGE UNIVERSITY PRESS, 266p.