الشكل الجديد في التطبيقات F–السوية بين الفضاءات المتناظرة

د. ميشيل حداد [1]

ملخص البحث

نعرف فضاء كيلير والفضاء المتناظر والمتضمن التطبيق F – السوي وتم تحديد العلاقات الأساسية في التطبيقات F – السوية.

ومن ثم نثبت في المبرهنة (3) أن الشرط اللازم والكافي كي يكون الفضاء المتناظر منطلقاً لتطبيق F – سوي هو أن يوجد فيه تنسور متناظر غير معدوم يحقق الخواص (17) و (18).

وأخيراً تم في المبرهنة (4) إثبات أنه إذا وجد تطبيق F – سوي متناظر غير مبتذل من الفضاء S_n إلى الفضاء S_n^1 ذوي الاتصال φ_i , F_i^h على الترتيب، فإنه يتواجد تطبيق F_1 – سوي متناظر غير مبتذل جديد من الفضاء S_n^1 في الفضاء $\overline{S}_n^1$ ذوي الاتصال $\varphi_\circ^1 , \overset{1}{F}{}_1^n$ تحقق العلاقات (11), (16), (20), (23).

كلمات مفتاحية :

فضاء كيلير – التطبيق السوي – الفضاء المتناظر

---

[1] - أستاذ مساعد في قسم العلوم الأساسية جامعة الوادي الخاصة.

New method of F - planimetric mapping between symmetric spaces

D. Michael Haddad

Docent at Wadi international university

Abstract

In this research defined Khlerre space and symmefrie space , and F – planimetric mapping , and in the theorem (3) proved that the necessary and sufficient conditions.

The symmetie space to be premise to F – planimetric mapping, that exist in it symmetric tensor equal Zero investigate (17), (18) .

In theorem (4) proved if exest nontreval F – planimetric ametric symmetric space, from S_n space to S_n^1 space with affine comection , F_i^h, φ_i respectivly, then exist . new treveal F – planimetric symmetric from space S_n^1 to space $\overline{S}_n^1$ with affine connections $\varphi_\circ^1, \overset{1}{F}{}_1^n$ respectivel relation ships (23), (20), (16), (11)

Key word :

Khler space, symmetric spaces, Planimetric mapping .

هدف البحث :

يهدف البحث إلى دراسة خواص التطبيقات (F-) السوية بين الفضاءات المتناظرة ، وإيجاد المعادلات الأساسية لهذه التطبيقات وتحديد الشروط اللازمة و الكافية لوجود مثل هذه التطبيقات، وإيجاد قاعدة يمكننا من خلالها إنشاء متتالية من الفضاءات المتناظرة المتواجدة بينها تطبيقات (F-) سوية.

مقدمة البحث :

يدرس موضوع البحث نوعاً خاصاً من المنطويات ذوات الاتصال الأفيني.

* تطورت في الآونة الأخيرة نظرية التطبيقات الديفيومورفية بين فضاءات ريمان ذوات الاتصال الأفيني ، و من هنا ظهر مفهوم التطبيقات الهولومرفية بين فضاءات كلير التي درست في أعمال (اتسوكي – تاسيرو[8]– يانا [9]– ميكش[6]– ميكش داماشيفا[1] وشيحة [ ] .

والتي تعتبر تعميم لمفهوم التطبيقات الجيوديزية في أعمال سينسكوف و غيرها [ ].

كما درس سينيوكوف نظرية التطبيقات شبه الجيوديزية بين فضاءات ذوات الاتصال الأفيني عديم الالتفاف [4].

كما درس ميكش وكورباتفا [6] أنواع خاصة من التطبيقات شبه الجيوديزية بين فضاءات ريمان [10-2].

ودرس ميكش وسينيكوف نوعا خاصاً من التطبيقات بين الفضاءات ذوات الاتصال الأفيني عديمة الالتفاف أطلقوا عليها تسمية التطبيقات (F-) السوية [3].

نتابع في هذا البحث دراسة العلاقات الأساسية لهذه التطبيقات وشروط وجودها بين الفضاءات المتناظرة .

أولاً: التعاريف الأساسية:

- **تعريف (1)**

المنطوي التفاضلي V_n من الصف $\left(C^n\right)$ يدعى منطوياً ذا اتصال أفيني، إذا وجد فيه تنسور من النوع $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} F^h_i$.

وللاختصار نرمز لجداء التركيب (F^h_i) بأي تنسور ($A_{j\dots}^{\dots}$) من النوع $\begin{pmatrix}p\\q\end{pmatrix}$ ، وأي مرافق الدليل (j) للتنسور A بالشكل: $A_{\alpha\dots}^{\dots} F_i^\alpha = A_{\bar{i}\dots}^{\dots}$

و لمرافق الدليل (h) للتنسور A بالشكل: $A^{\alpha}{}_{\dots}^{\dots} F_\alpha^h = A^{\bar{h}}{}_{\dots}^{\dots}$

- **تعريف (2)**

فضاء كيلير هو فضاء ريمان ذو التنسور المتري (g_{ij}) و التركيب $\left(F_i^h\right)$ بحيث تتحقق الشروط :

$$
\begin{aligned}
&a)\ F_a^h F_i^\alpha = -\delta_i^h\\
&b)\ g_{\alpha j}F_i^\alpha + g_{\alpha i}F_j^\alpha = 0 \qquad (1)\\
&c)\ F_{i,j}^h = 0\ ,
\end{aligned}
$$

حيث $\Gamma_{i,j}^h$ رموز كريستوفل للفضاء V_n و<< , >> تعني المشتق موافق التغيير للتركيب $\left(F_i^h\right)$.

- **تعريف (3)**

يسمى فضاء ريمان V_n فضاء ذا تركيب (متناظر) إذا كان تركيبه الخطي $\left(F_i^h\right)$ المتناظر تخالفياً وغير المعدوم يحقق الشروط :

$$
\begin{aligned}
&a)\ F_{(ij,h)} = F_{ij,h} + F_{hi,j} + F_{jh,i} = 0 \qquad (2)\\
&b)\ \det \| F_{ij}'' \| \neq 0
\end{aligned}
$$

c) $Fij = -Fji$

حيث التركيب المتناظر Fij يعرف على V_n بالشكل:

$F^h i = F\alpha i\ g^{\alpha h}$ (3)

على اعتبار أن:

$$(4)\ F_\alpha^\alpha = 0$$

ثانياً: التطبيقات F- السوية بين الفضاءات ذوات الاتصال الأفيني:

ليكن A_n فضاءً ذا اتصال آفيني عديم الالتفاف المنسوب إلى النظام الإحداثيx^n, - .,x^1 والمحقق للشرط:

$$(5)\ F_i^h(x) \neq \alpha\delta_i^h$$

حيث: δ_i^h دلتا كرونيكر، و α ثابت ما.

- **تعريف (4) :**

ليكن L منحنياً معرفاً بالمعادلة الوسيطية $x^h = x^h(t)$ (t وسيط) و متجه بالمماس له:

$$\lambda^h(t) = \frac{dx^h}{dt}\ (\neq 0) \quad (h = 1,2,....,n)$$

يسمى (L) منحنياً (F-) سوياً ، إذا بقي متجه المماس له λ^h (t) بالانتقال الموازي متوضعاً في المنطقة المستوية ، المحددة بالمتجهين: λ^h (t) ، $\lambda^\alpha F^h{}_\alpha \lambda^{\underline{h}}$.

أي يحقق العلاقة:

$\lambda^h{}_{,\alpha}\lambda^\alpha = \rho_1(t)\lambda^h + \rho_2(t)\lambda^h F^h\alpha$ (5)

حيث: ρ_1, ρ_2 دوال ما في t .

إن مجال الفضاءات A^n ,F– السوية واسع جداً ، على اعتبار أنه في أي نقطة و وفق أي منحى يمر دوماً مجموعة غير منتهية من المنحنيات.

إن وصف الدوال F- السوية يتضمن :

1- المنحنيات الجيوديزية.
2- المنحنيات شبه الجيوديزية.
3- المنحنيات السوية.
4- المنحنيات التحليلية السوية.

- **تعريف (4) [3]**

ليكن $\overline{A}_n, A_n$ فضائين ذوي الاتصال الأفيني F^h_i , $\underline{F}^h_i$ تركيبها الأفيني على الترتيب، يسمى التطبيق: $F : A_n \longrightarrow \underline{A}_n$ F − سوي إذا صور كل منحني F- سوي من الفضاء A_n بمنحنيF سوي من الفضاء $\overline{A}_n$.

الآن لنفرض أن الفضاءين $\overline{A}_n, A_n$ متواجد بينهما تطبيق F- سوي، عندئذ تتحقق المبرهنات الآنية:

- **مبرهنة (1) [3]**

التطبيق F- سوي من الفضاء A_n إلى الفضاء $\overline{A}_n$ (n>3) و يحقق الشرط :

$$P_{ij}^h = \delta_i^h \psi_j + \delta_j^h \psi_i + F_i^h \varphi_j + F_j^h \varphi_i \qquad (6)$$

حيث : $\psi_i(x), \varphi_j(x)$ رموز كريستوفل.

- **مبرهنة (2)[4]**

إن أي تطبيق F- سوي من الفضاء A_n إلى الفضاء $\overline{A}_n$ (n>3) يحافظ على تركيب الفضائين ، أي:

$$F_i^h(x) = \overline{F}_i^h(x)$$

ثالثاً: التطبيقات F- سوية بين الفضاءات المتناظرة:

ليكن الفضاءان المتناظران $\bar{S}_n\left(\bar{g}_{ij},\bar{F}_{ij}\right), S_n\left(g_{ij},F_{ij}\right)$ الموجود بينهما تطبيق F- سوي، عندئذ فإن المعادلة الأساسية لهذا التطبيق في نظام إحداثي مشترك(x^h) تأخذ الشكل:

$$\bar{\Gamma}^h_{ij}(x)=\Gamma^h_{ij}(x)+\psi_{(i}(x)\delta^h_{j)}+\varphi_{(i}(x)F^h_{j)}(x) \qquad (7)$$
$$\left|F^h_i\right|\neq 0$$

$$F_{(ij)}=\bar{F}_{(ij)}=0\ ;\ F_{ij}=F^{\alpha}_j\,g_{\alpha i}\ ;\ \bar{F}_{ij}=F^{\alpha}_j\,\bar{g}_{\alpha i} \qquad (8)$$

$$F_{(ij/k)}=F_{(ij/k)}=0 \qquad (9)$$

حيث (/) تعني المشتق موافق التغيير في الفضاء $\bar{A}_n$ ذي الاتصال $\bar{\Gamma}$.

وتتحقق العلاقة الآتية بين المتجهين φ_i وψ_i:

$$\psi_i=\varphi_\alpha F^\alpha_i=\varphi_{\bar{i}} \qquad (10)$$

استناداً إلى (10) بتقليص (7) بالدليل j,h نجد:

$$\frac{1}{n+2}\left(\Gamma^{\alpha}_{i\alpha}-\bar{\Gamma}^{\alpha}_{i\alpha}\right)=\varphi_{i} \qquad (11)$$

هذا يعني أن $\varphi_{\underline{i}}=\psi_i$ متجه تدرج ، أي يوجد صامد $\psi(\alpha)$ بحيث

$$\psi_{\bar{i}}=\psi_i=\frac{\partial\psi}{\partial x^1} \qquad (12)$$

إن العلاقة الأساسية في التطبيقات F- السوية (7) تكافئ العلاقة:

$$\bar{g}_{ij,k}=2\psi_k\bar{g}_{ij}+\psi_{(i}\bar{g}_{j)k}+\varphi_{\bar{i}}\bar{F}_{j)k} \qquad (13)$$

رابعاً: الصيغة الجديدة للعلاقات الأساسية للتطبيقات F- السوية بين الفضاءات المتناظرة:

ليكن F- تطبيقاً سوياً من الفضاء المتناظر $S_n\left(g_{ij},F_{ij}\right)$ إلى الفضاء المتناظر $\bar{S}_n\left(\bar{g}_{ij},\bar{F}_{ij}\right)$ فإن العلاقات الأساسية لهذا التطبيق في نظام إحداثي مشترك x^c كما وجدنا تأخذ الشكل (13) , (12) , (9) , (8).

تمثل العلاقة (13) جملة معادلات تفاضلية جزئية من المرتبة الأولى بالنسبة للتنسور g_{ij} ، ولإيجاد شروط وجود حل وحيد لهذه الجملة ، نستخدم طريقة التحويل للعالم سينيوكوف [4] في نظرية التطبيقات الجيوديزية بين فضاءات ريمان ولننطلق من المعادلة (13) و لنأخذ في الفضاء S_n التنسور :

$$a_{ij} = e^{2\psi}\cdot g^{\alpha\beta}\cdot g_{\alpha i}.g_{\beta j} \qquad (14)$$

لنأخذ المشتق موافق التغيرله في S_n :

$$a_{ij,k} = e^{2\psi}\left(2\psi_j \bar{g}^{\alpha\beta} g_{\alpha i} g_{\beta} + \bar{g}^{\alpha\beta}_{,k} g_{\alpha i} g_{\beta}\right)$$

و باعتبار أن:

$$\bar{g}_{i\alpha}\bar{g}^{\alpha h} = \delta^h_i$$

ينتج:

$$\bar{g}_{i\alpha,k}\bar{g}^{\alpha h} + \bar{g}_{i\alpha}\bar{g}^{\alpha h}_{,k} = 0$$

أو :

$$\bar{g}^{ih}_{,k} = -\bar{g}_{\alpha\beta,k}\bar{g}^{\alpha i}\bar{g}^{\beta h}$$

من هنا ينتج استناداً إلى (13):

$$\begin{aligned}
a_{ij,k} &= e^{2\psi}\left(2\psi_k \bar{g}^{\alpha\beta} g_{\alpha i} g_{\beta j} - \bar{g}_{\gamma\delta,k}\bar{g}^{\alpha\gamma}\bar{g}^{\beta\delta} g_{\alpha i} g_{\beta j}\right) = \\
&= e^{2\psi}\left[2\psi_k \bar{g}^{\alpha\beta} g_{\alpha i} g_{\beta j} - \left(2\psi_k \bar{g}_{\alpha\beta} + \psi_{(\alpha}\bar{g}_{\beta)k} + \varphi_{(\alpha}\bar{F}_{\beta)k}\right)\bar{g}^{\alpha\gamma} g_{\gamma i} g_{\delta j}\right] = \\
&= e^{2\psi}\left(-\psi_\alpha \bar{g}^{\alpha\gamma} g_{\gamma i} g_{jk} - \psi_\alpha \bar{g}^{\alpha\gamma} g_{\gamma j} g_{ik} - \varphi_\alpha \bar{g}^{\alpha\gamma} g_{\gamma i} F_{jk} - \varphi_\alpha \bar{g}^{\alpha\gamma} g_{\gamma j} F_{ik}\right) = \\
&= -e^{2\psi}\left(\psi_\alpha \bar{g}^{\alpha\gamma} g_{\gamma(i} g_{j)k} + \varphi_\alpha g_{\gamma(i} F_{j)k}\right)
\end{aligned}$$

أي أن:

$$a_{ij,k} = -e^{2\psi}\left(\psi_{\alpha}\bar{g}^{\alpha\gamma}g_{\gamma(i}g_{j)k} + \varphi_{\alpha}g_{\gamma(i}F_{j)k}\right)$$

لنفترض أن:

$$e^{2\psi}\bar{g}^{h\alpha}g_{\alpha i} = A_i^h \qquad (15)$$

$$\varphi_{\alpha}A_i^{\alpha} = \varphi_i^1 \qquad (16)$$

حيث إن $\psi_i = \varphi_{\bar{i}}$، فإنه من (9) نجد:

$$e^{2\psi}\psi_{\alpha}\bar{g}^{\alpha\gamma}g_{\gamma i} = e^{2\psi}\varphi_{\bar{\alpha}}\bar{g}^{\alpha\gamma}g_{\gamma i} =$$
$$= e^{2\psi}\varphi_{\alpha}\bar{g}^{\alpha\gamma}g_{\gamma\bar{i}} = \varphi_{\bar{i}}^1$$

و منه نجد :

$$a_{ij,k} = -\varphi_{\bar{i}}^1 g_{jk} - \varphi_{\bar{j}}^1 g_{ik} - \varphi_{(i}^1 F_{j)k} \qquad (17)$$

حيث:

$$F_{jk} = F^{\alpha}{}_{k}g_{\alpha j} = - F_{kj}\,.$$

و يتحقق الشرط (8) من أجل التنسور a_{ij} :

$$a_{j\alpha}F^{\alpha}{}_{i} = - a_{i\alpha}F^{\alpha}{}_{j} \qquad (18)$$

حقيقة لدينا:

$$a_{j\alpha}F^{\alpha}{}_{i} = e^{2\psi}F^{\alpha}{}_{i}\, g_{\alpha\beta}\bar{g}^{\beta\delta}g_{\delta j} =$$

$$= - e^{2\psi}F^{\alpha}{}_{\beta}\, g_{\alpha i}\bar{g}^{\beta\delta}g_{\delta j} = e^{2\psi}F^{\delta}{}_{\beta}\, g_{\alpha i}\bar{g}^{\beta\delta}g_{\delta j} =$$

$$= - e^{2\psi}F^{\delta}{}_{j}\, g_{\alpha i}\bar{g}^{\beta\delta}g_{\delta j} = -a_{i\alpha}F^{\alpha}{}_{j}\,.$$

واستناداً إلى العلاقات (14) و (16) يكون a_{ij} تنسوراً متناظراً غير صفري من النوع $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ و φ_i^1 متجه موافق التغير، و بتقليص (17) بالتنسور g^{ij} نجد :

$$a_{\alpha\beta,k}\, g^{\alpha\beta}= - \varphi_{\underline{\alpha}}{}^1 g_{\beta k}g^{\alpha\beta} -\varphi_{\underline{\beta}}{}^1 g_{\alpha k}g^{\alpha\beta} - \varphi_{\alpha}{}^1 F_{\beta k}g^{\alpha\beta} - \varphi_{j\beta}{}^1 F_{\alpha k}g^{\alpha\beta} =$$

$$= -\varphi_{\underline{k}}{}^1 - \varphi_{\underline{k}}{}^1 - \varphi_{\beta}{}^1 F^{\beta}{}_k - \varphi_{\beta}{}^1 F^{\beta}{}_k = -4\varphi_{\underline{k}}{}^1 .$$

وباعتبار أن المشتق موافق للمتغير g^{ij} مطابقاً الصفر يكون لدينا :

$$(a_{\alpha\beta}g^{\alpha\beta}),_k= -4\varphi_{\underline{k}}{}^1$$

من هنا نجد أن φ_k^1 متجه تدرج ، حيث أنه يتضح من (16) أن$\varphi_k^1\neq 0$ على اعتبار أن $\varphi_k\neq 0$ وبالعكس.

من هنا نجد أنه إذا كان الفضاء S_n منطلقاً لتطبيق F– سوي غير مبتذل فإنه يوجد فيه تنسور a_{ij} يحقق الخواص(17) و (18) حيث: $\varphi_i^1\neq 0$.

و بسهولة نلاحظ أن العكس صحيح أيضاً ، كما هو موضح في [4].

- **مبرهنة (3):**

إن الشرط اللازم والكافي كي يكون الفضاء المتناظر$S_n\,(g_{ij},F_{ij})$ منطلقاً لتطبيق F- سوي هو أن يوجد فيه تنسور متناظر غير صفري من النوع $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ يحقق الخواص (17) و(18) بشرط أن يكون المتجه $\varphi_i^1\neq 0$.

أي أن (17) تمثل الشكل الجديد للمعادلة الأساسية في نظرية التطبيقات المتناظرة F− السوية ، وهي تكافئ العلاقة (13)

خامساً: <u>التحويلات الثابتة في الفضاءات المتناظرة و المتواجد بينها تطبيق F- السوي</u>:

باعتبار أن التنسور a_{ij} المعرف بالعلاقة (14) متناظر غير صفري من النوع $\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}$ يمكننا القول إن للفضاء S^1_n تنسور متري ، لنحدده:

ينتج من (17) أن:

$$-\Gamma^{\alpha}_{ki}\,a_{\alpha j}-\Gamma^{\alpha}_{kj}\,a_{\alpha i}=\frac{\partial a_{ij}}{\partial x^{k}}$$

$$=-\varphi^{1}_{\underline{i}}\,g_{jk}-\varphi^{1}_{\underline{i}}\,g_{jk}-\varphi^{1}{}_{(i}F_{j)k}$$

أي أن :

$$\Gamma^{\alpha}_{ki}\,a_{\alpha j}+\Gamma^{\alpha}_{kj}\,a_{\alpha i}-\varphi^{1}_{\underline{i}}\,g_{jk}-\varphi^{1}{}_{(i}F_{j)k}\,\frac{\partial a_{ij}}{\partial x^{k}}$$

استناداً إلى العلاقة الأخيرة نحصل على رموز كريستوفل من النوع الأول $\Gamma^{1}_{ij,k}$ للفضاء S^1_n .

$$\Gamma^{1}_{ij,k}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial a_{ik}}{\partial\chi^{j}}+\frac{\partial a_{jk}}{\partial\chi^{i}}-\frac{\partial a_{ij}}{\partial\chi^{k}}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\Big(\Gamma^{\alpha}_{ji}\;{}_{i}a_{\alpha k}+\Gamma^{\alpha}_{jk}a_{\alpha i}-\varphi^{1}_{\underline{i}}g_{kj}-\varphi^{1}_{\underline{k}}g_{ij}-\varphi^{1}_{i}F_{kj}-\varphi^{1}_{k}F_{ij}+$$

$$+\Gamma^{\alpha}_{ij}a_{\alpha k}+\Gamma^{\alpha}_{ik}a_{\alpha j}-\varphi^{1}_{\underline{j}}g_{ki}-\varphi^{1}_{\underline{k}}g_{ji}-\varphi^{1}_{i}F_{ki}-\varphi^{1}_{k}F_{ji}-$$

$$-\Gamma^{\alpha}_{ki}a_{\alpha j}-\Gamma^{\alpha}_{kj}a_{\alpha i}+\varphi^{1}_{\underline{i}}g_{jk}+\varphi^{1}_{\underline{j}}g_{ik}+\varphi^{1}_{i}F_{jk}+\varphi^{1}_{j}F_{ik}\Big)=$$

$$= \Gamma^{\alpha}_{ji} a_{\alpha k} - \varphi^{1}_{\underline{k}} g_{ij} - \varphi^{1}_{i} F_{kj} - \varphi^{1}_{j} F_{ki}$$

برفع الدليل k مستخدمين التنسور a^{kh} في S^1_n نجد :

$$\Gamma^{1}_{ij,\beta} a^{\beta h} = \Gamma^{\alpha}_{ji}\, a_{\alpha\beta} a^{\beta h} - \varphi^{1}_{\underline{\beta}} g_{ij} a^{\beta h} - \varphi^{1}_{i} F_{\beta j} a^{\beta h} - \varphi^{1}_{j} F_{\beta i} a^{\beta h} =$$

$$= \Gamma^{h}_{ji} - \varphi^{1}_{\underline{\beta}} a^{\beta h} g_{ij} - \varphi^{1}_{i} F_{\beta j} a^{\beta h} - \varphi^{1}_{j} F_{\beta i} a^{\beta h}.$$

أو :

$$= \Gamma^{\ k}_{ij} - \varphi^{1}_{\underline{\alpha}} a^{\alpha k} g_{ij} - \varphi^{1}_{i} F_{\alpha j} a^{\alpha k} - \varphi^{1}_{j} F_{\alpha i} a^{\alpha k}, \Gamma^{1k}_{ij}$$

حيث Γ^{1k}_{ij} – رموز كريستوفل للفضاء S^1_n.

ينتج من (14) و (15) :

$$\varphi^{1}_{\underline{\alpha}} a^{\alpha k} = (e^{2\psi} \varphi_{\underline{\beta}} \bar{\underline{g}}^{\beta\gamma} g_{\gamma\alpha})\,(e^{-2\psi} g^{\alpha\sigma} \bar{\underline{g}}_{\sigma\mu} g^{\mu k}) =$$

$$= \varphi_{\underline{\beta}} g^{\beta k} = \psi_{\beta} g^{\beta k} = \psi^{k}.$$

نرمز بـ :

$$F_{\alpha j} a^{\alpha k} = e^{-2\psi} F_{\alpha j} g^{\alpha\beta} \underline{g}_{\beta\gamma} g^{\gamma k} = F_{j}^{\ \beta} \tilde{A}^{K}_{\beta} \overset{def}{=} F^{1\,k}_{\ \ j}, \qquad (20)$$

حيث : $(\tilde{A}^{K}_{i}) = (\tilde{A}^{K}_{i})^{-1}$.

من الواضح أن :

$$F^{1\,k}_{\ \ j} = F_{j}^{\ \beta} \tilde{A}^{K}_{\beta} = F_{\beta}^{\ k} \tilde{A}^{\beta}_{j} \qquad .(21)$$

حقيقةً من العلاقة (8) نجد:

$$\tilde{A}^{K}{}_{\beta} = e\text{-}^{2\psi}F^{\beta}{}_{j}\bar{g}_{\beta\alpha}\bar{g}^{\alpha k} = -\, e\text{-}^{2\psi}F^{\beta}{}_{\alpha}\bar{g}_{\beta j}g^{\alpha k} = F_{j}^{\ \beta}$$

$$= e\text{-}^{2\psi}F^{k}{}_{\alpha}\bar{g}_{\beta j}g^{\alpha\beta} = F_{a}^{\ k}\,\tilde{A}^{a}{}_{j}\,.$$

إن العلاقة (18) تأخذ الشكل :

$$\Gamma^{1k}_{ij} = \Gamma^{\ k}_{ij} - \psi^{k}g_{ij} - \varphi^{1}{}_{(i}F^{1}{}_{j)}{}^{k} \qquad (22)$$

ليكن S^1_n فضاء ريمان ذا التنسور المتري :

$$a_{ij} = e^{2\psi}g_{ij}\,. \qquad (23)$$

وكما هو معلوم أن الأخيرة (23) تعني وجود تطبيق توافقي من الفضاء S_n إلى الفضاءS^1_n ، لذلك فإن مركبات كريستوفل تأخذ الشكل :

$$\Gamma^{1h}{}_{ij} = \Gamma^{h}{}_{ij} + \psi_{(i}\delta^{h}{}_{j)} - \psi^{h}g_{ij} \qquad (24)$$

و استناداً إلى (22) نجد :

$$\underline{\Gamma}^{1h}{}_{ij} = \Gamma^{1h}{}_{ij} + \psi^{h}g_{ij} + \varphi^{1}{}_{(i}F^{1h}{}_{j)} + \psi_{(i}\delta^{h}{}_{j)} - \psi^{h}g_{ij} =$$

$$= \Gamma^{1h}{}_{ij} + \psi_{(i}\delta^{h}{}_{j)} + \varphi^{1}{}_{(i}F^{1h}{}_{j)}$$

أي أن:

$$\underline{\Gamma}^{1h}{}_{ij} = \Gamma^{1h}{}_{ij} + \psi_{(i}\delta^{h}{}_{j)} + \varphi^{1}{}_{(i}F^{1h}{}_{j)} \qquad .(25)$$

حيث:

$$F^{1h}{}_{j} = F^{h}{}_{\alpha}\tilde{A}^{\alpha}{}_{j}\,.$$

يتضح من (10) و (16) أن :

$$\psi_i = \varphi_{\underline{i}} = \varphi_\alpha{}^1 \tilde{A}^\alpha{}_\beta F^\beta{}_i = \varphi_\alpha{}^1 F^{1\alpha}{}_i \qquad (26)$$

و استناداً إلى (20) و (23) نجد أنه في S_n و $S^1{}_n$:

$$F^1{}_{ij} \overset{def}{=} F^{1\alpha}{}_j a_{\alpha i} = F_{\beta j} a^{\beta\alpha} a_{\alpha i} = F_{ij}\,; \qquad (27)$$

$$F^1{}_{ij} \overset{def}{=} F^{1\alpha}{}_j a_{ai} = F_{\beta j} a^{\beta\alpha} a_{\alpha i} = \qquad (28)$$

$$= F_{\beta j}\,(\,e^{-2\psi} g^{\beta\gamma} g_{\gamma\delta} g^{\delta\alpha}\,)\,(e^{2\psi} g_{\alpha i}\,) = \quad F_{ij}\,;$$

هذا يعني استناداً إلى (8) أن :

$$F^1{}_{(ij)} = \underline{F}^1{}_{(ij)} = 0$$

و باعتبار أن $\left|F_i^h\right| \neq 0$ و $\left|A_i^h\right| \neq 0$ نجد :

$$\left|F_a^h \tilde{A}_i^\alpha\right| = \left|F^{1h}_{\;i}\right| \neq 0 \qquad (29)$$

أخيراً من (27) و (28) و (29) نجد :

$$F^1{}_{(ij1k)} \equiv \frac{\partial F^1_{ij}}{\partial x^k} + \frac{\partial F^1_{jk}}{\partial x^i} + \frac{\partial F^1_{ki}}{\partial x^j} = \qquad (30)$$

$$= \frac{\partial F_{ij}}{\partial x^k} + \frac{\partial F_{jk}}{\partial x^i} + \frac{\partial F_{ki}}{\partial x^j} = F_{(ij,k)} = 0\,;$$

$$\underline{F}^1{}_{(ij1\text{-}k)} \equiv \frac{\partial F^1_{ij}}{\partial x^k} + \frac{\partial F^1_{jk}}{\partial x^i} + \frac{\partial F^1_{ki}}{\partial x^j} = \qquad (31)$$

$$= \frac{\partial F_{ij}}{\partial x^k} + \frac{\partial F_{jk}}{\partial x^i} + \frac{\partial F_{ki}}{\partial x^j} = \underline{F}^1{}_{(ij\backslash k)} = 0\,;$$

حيث "1" و"$\underline{1}$" تعني المشتق موافق التغير في الفضاء S^1_n و $\underline{S}^1_n$ على الترتيب.

تعني العلاقات (31) و (27) أن F^1_{ij}و $\underline{F}^1_{ij}$ هي تركيب متناظر والفضائين $S^1_n(a_{ij}, F^1_{ij})$، $\underline{S}^1_n(a_{ij}, F^1_{ij})$ متناظران.

بمقارنة العلاقات (25) و (32) مع العلاقات (7) و (10) نصل إلى المبرهنة الآتية:

- **مبرهنة (4) :**

إذا وجد تطبيق F- سوي غير مبتذل بين فضائين متناظرين:

$$F : S_n(g_{ij}, F_{ij}) \longrightarrow \bar{S}_n(\bar{g}_{ij}, \bar{F}_{ij})$$

الموافقة للاتصال الآفيني (F^h_i) والمتجه (φ_i) على الترتيب ، فإنه يتولد تطبيق F- سوي غير مبتذل جديد من الفضاءين المتناظرين S^1_n إلى $\bar{S}^1_n$:

$$F_1 : S^1_n(a_{ij}, F^1_{ij}) \longrightarrow \bar{S}^1_n(\bar{a}_{ij}, \bar{F}^1_{ij})$$

الموافقة للتركيب F^{1h}_i و المتجه $(\varphi^1$:$)$ حيث التنسورات:

$$F^1_{ij}, \bar{F}^1_{ij}, F^{1h}_i, \varphi^1_i, a_{ij}, \bar{a}_{ij}$$

موضحة بالعلاقات (14)،(18), (26)، (17)، (28) ، (20) ، (21)

نكون بذلك استناداً إلى العلاقات (14) و (16) و (20) و (23) قد توصلنا إلى قاعدة انشاء زوج من الفضاءات $\left(S_n\right)$ و $\left(\bar{S}_n\right)$ الموجود بينها تطبيق F- سوي $F: S_n^1 \longrightarrow \bar{S}_n^1$ والزوج الجديد من الفضاءات المتناظرة $\left(S_n^1\right)$ و $\left(\bar{S}_n^1\right)$ المتواجد بينها $F_1: S_n^1 \longrightarrow \bar{S}_n^1$

تطبيق F- سوي .

التحويل الثابت F- السوي الموافق لها و نرمز له بالشكل:

$$\Gamma (g , g , \varphi , F) \equiv (a^1 , \bar{a}^1 , \varphi^1 , F^1)$$

حيث رمزنا لـ $a^1{}_{ij} = a_{ij} , \bar{a}^1{}_{ij} = \bar{a}_{ij}$

بذلك يمكننا القول إن التحويلات الثابتة هي تطابق بين الفضاءات المتناظرة التي يوجد بينها تطبيقات F- سوية.

Литература

1-Домашев В.В. , Микеш й . К теории ***голоморфно-проективных отображений келеровых пространств*** // Мат . заметки , 1978 , 28 , №2 . С.297, 303.

2-Курбатова И.Н. ***HP-отображения H-пространств***//Укр геom.сб. , 1984 . вып.24 . С.75-82 .

3-Микеш й . , Синюков Н.С. О ***квазипланарныхотображениях пространств аффинной связности***// Изв вузов , Матем . 1983. -№3 . С.55-61 .

4- Синюков Н.С. Геодезические ***отображения римановых пространств***// М .: Наука , 1979. 275с .

5- Ishihara S. ***Holomorphically projective changes and their groups in an almost complex manifold***// Tohoku Math . J. , 1957.9 . №3 . p.273-294 .

6- Jano K. ***Differential Geometry of Complex and Almost Complex Spaces*** / Pergamon Press , 1965 .

7- , Mikes J. , Vanzurova A. , ***Hinterleitner I. Geodesic Mappings and Some Generalizations***// Palacky University . Olomouc , Faculty of Science . Olomouc ,2009

8- Otsuki T. , Tashiro J. ***On curves in Kahlerian spaces***// Math.J.Okayama Univ . , 1954 , 4. №1 . p.57-78 .

9- Tashiro J. ***On holomorphically projective correspondences in an almost complex spaces***// Math.J.Okayama Univ . , 1957 , 6 , №2 . p.142-152 .

10 -Курбатова Т.Н., . ***Добик М.В. Особенности F-планарных отображений квазисимплектических пространств*** .Тез.докл . Международной конференции "Геометрия в Одессе - 2014 - Одесса . 2014 .

11.Фоменко А.Т.***Дифференциальная геометрия и топология . Дополнительные главы*** . Изд-во МГУ , 1983 .