التحويلات الثابتة بين فضاءات كيلير المكافئية

د. ميشيل حداد[1]

ملخص البحث

نذكر بالتعاريف والمبرهنات الأساسية للعمل ثم نعرف التحويل الثابت بين فضاءات كيلير ونثبت المبرهنات التي تنتج عن هذا التحويل.

نعرف فضاء كيلير – التطبيق الهولومورفي الإسقاطي ، ونكر في المبرهنات ,(2) ,(3) (1) ، ومن ثم نعرف التحويل الثابت بين فضاءات كيلير . نوجد في المبرهنة (4) التحويلات التي تنتج عن التطبيقات الهولومورفية الإسقاطية.

وأخيراً نثبت في المبرهنة (5) إذا وجد تطبيق هولومورفي إسقاطي غير مبتذل من الفضاء K_n الموافق للمتجه v_i إلى الفضاء $\overline{K}_n$ الموافق للمتجه $\bar{v}_i$ فإن التحويل $\Gamma(g,\bar{g},\bar{v}_i)$ يولد متتالية غير منتهية من الفضاءات الهولومورفية المحققة للعلاقات (24) و (16).

كلمات مفتاحية: تحويل خطي – فضاء كيلير – تطبيق هولومورفي إسقاطي.

[1] – أستاذ في جامعة الوادي الدولية الخاصة

The Constant mapping

between Parabolic Kahlerian Spaces

Dr. Micheal Haddad[1]

Abstract

In this research defined Khlerian space, and parobolically, projective mapping in the theorem (1-3) premise the necessary and sufficient , conditions, to be exist parobolically projective mapping.

The team, define constant trans formation between Khlerian space.

In theorem (4) fined the transformations that produces at Holomorphically projective mappings.

Finally , theorem (5) proved that if exist Holomorphically projective mappings from K_n space corresponding to vector v_i to $\overline{K}_n$ space corresponding to vector $\bar{v}_i$, then the transformation $\Gamma(g, \bar{g}, \bar{v}_i)$, generates an infinite sequence of Holomorphically space, check relationships (24) , (16).

- **Key word**:Constant transformation Khlerian space, Holomorphically projective mappings.

1 - **Docent at Wadi International University**

- **هدف البحث وفكرته العلمية :**

يهدف البحث لدراسة التحويلات بين فضاءات كيلير المكافئية وتحديد علاقات الانتقالات بين التنسورات المترية للفضاءات التي يوجد بينها تحويلات خطية وتحديد التطبيقات الهولومورفية الإسقاطية بين فضاءات كيلير التي يوجد بينها تحويلات خطية.

- **المقدمة** :

تمت دراسة التطبيقات الهولومورفية الاسقاطية بين فضاءات كيلير المكافئية من قبل عدد من الباحثين [1-5] ودرس كل من [6-16] التحويلات الثابتة بين فضاءات ريمان.

نتابع في هذا البحث دراسة التحويلات الثابتة بين فضاءات كيلير المكافئية.

<u>المناقشة والنتائج</u> :

<u>تعاريف أساسية :</u>

- **تعريف (1) :**

فضاء كيلير المكافئي $K_n^{o(m)}$ هو فضاء ريمان المتواجد فيه إضافة إلى التنسور المتري $\overline{g_{ij}}(x)$ تركيب تآلفي (تنسور من النوع $\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$ $F_i^h(x)$) يحقق الشروط الآتية:

a) $F_\propto^h F_i^\propto = 0$

b) $F_i^\propto + F_j^\propto F_{\propto i} = 0$

c) $F_{i,j}^h = \partial_j F_i^h + F_i^\propto \Gamma_{\propto j}^h - F_\propto^h \Gamma_{ij}^\propto = 0$ (1)

d) Rang $(F_i^h) = m \,;\, n \geq m \geq 2$

- **تعريف (2):**

نسمي المنحني $L: x^h \equiv x^h(t)$ في الفضاء $K_n^{o(m)}$ منحنياً هولومورفياً إذا بقي المماس $Z^h(t) \equiv \frac{\partial x^h(t)}{\partial t}$ للمنحني وفق أي انسحاب له على طول المنحني ذاته واقعاً في المنطقة E_2 حيث $E_2 = \{Z; \bar{Z}\}$ المحدودة بالمتجهتين$Z^h(t)$, $Z^h = Z^\propto F_\propto^h$ ، أي أنه تحقق المعادلة:

$$Z^h_{\propto}Z^{\propto} = \frac{\partial Z^h}{\partial t} + \Gamma^h_{\propto B}Z^{\propto}Z^B = a(t)Z^h + b(t)Z^{\bar{h}} \qquad (2)$$

حيث Γ^h_{ij} رموز كريستوفل للفضاء و $a(t)$, $b(t)$ دوال تابعة لـ t.

- **تعريف (3):**

نسمي التطبيق $f: K_n^{o(m)} \to \overline{K}_n^{o(m)}$ تطبيقاً هولومورفياً إسقاطياً إذا كانت صورة أي منحني هولومورفي K_n هو منحني هولومورفي في $\overline{K}_n$.

كما وجدنا [ ] الشروط اللازمة والكافية كي يكون التطبيق f هولومورفياً اسقاطياً نعرضها من خلال المبرهنات التالية:

- **مبرهنة (1) :**

إن الشرط اللازم والكافي كي يوجد تطبيق هولومورفي إسقاطي من الفضاء $K_n^{o(m)}$ إلى الفضاء $\overline{K}_n^{o(\bar{m})}$ هو أن تحقق الشروط الآتية في أي نظام إحداثي مشترك x.

$$\bar{\Gamma}^h_{ij}(x) = \Gamma^h_{ij}(x) + \delta^h(i\bar{\vartheta}j) + F^h(i\vartheta j)$$

$$\bar{F}^h_i(x) = \propto F^h_i(x) \qquad (3)$$

حيث $\overline{\vartheta_J} = \vartheta_{\bar{I}} = \vartheta_{\propto}F^{\propto}_i$ متجه غير صفري و $\propto$ ثابت غير صفري.

Γ^h_{ij} , $\bar{\Gamma}^h_{ij}$ رموز كريستوفل للفضائين $K_n^{o(m)}$, $\overline{K}_n^{o(m)}$على الترتيب.

- **مبرهنة (2):**

إن الشرط اللازم والكافي كي يوجد تطبيق هولومورفي إسقاطي:

$f: K_n^{o(m)} \to \overline{K}_n^{o(m)}$ بين الفضائين $K_n^{o(m)}$, $\overline{K}_n^{o(m)}$ هو أن تتحقق العلاقة الآتية في $K_n^{o(m)}$.

$$\overline{g_{\imath\jmath,k}} = 2\,\bar{\vartheta}_k\overline{g_{\imath\jmath}} + \overline{\varphi_{(\imath g_\imath)k}} + \bar{\vartheta}_{(i\bar{F}_j)k} \qquad (4)$$

حيث $\bar{F}_{ij} = \bar{g}_{i\propto}F^{\propto}_J$, $\bar{F}_{ij} + \bar{F}_{ji} = 0$

$\det//\bar{g}_{ij}// \neq 0$, $\bar{g}_{ij}$التنسور المتري في $\overline{K}_n^{o(m)}$.

مبرهنة (3) :

إن الشرط اللازم والكافي كي يوجد تطبيق هولومورفي اسقاطي $f: K_n^{o(m)} \rightarrow \overline{K}_n^{o(m)}$ بين الفضائين $K_n^{o(m)}, \overline{K}_n^{o(m)}$ هو أن تحقق العلاقة الآتية:

$$a_{ij,k} = \lambda_{(\bar{i}g_j)k} - \lambda_{(ig_{\bar{j}})k} \qquad (5)$$

حيث: $a_{\bar{i}j} + a_{i\bar{j}} = 0$.

a) $a_{ij} \equiv \exp(2\bar{\vartheta})\, \bar{g}^{\propto B} g_{\propto i} g_{Bj}$

b) $Z_i \equiv \exp(2\bar{\vartheta})\, \bar{g}^{\propto B} g_{\propto i} \vartheta_B$ (6)

الآن بفرض $a_{ij} = a_{ij}^1$ التنسور المتري في فضاء كيلر K_n^1 و رموز كريستوفل في الفضاء K_n^1 نرمز له بـ Γ_{ij}^1 وباعتبار أن:

$$\Gamma_{ij,k}^1 = \frac{1}{2}\left(\partial_i g_{jk}^1 + \partial_j g_{ik}^1 - \partial_k g_{ij}^1\right) = \frac{1}{2}\left(\partial_i a_{jk}^1 + \partial_j a_{ik}^1 - \partial_k a_{ij}^1\right)$$

وأن:

$$a_{ij,k}^1 = \partial_k a_{ij}^1 = a_{\propto j}^1 \Gamma_{ik}^{\propto} + a_{i\propto}^1 \Gamma_{jk}^{\propto} \rightarrow$$

ومنه:

$$\partial_k a_{ij}^1 = \partial_k g_{ij}^1 = a_{ij,k}^1 + a_{ik}^1 \Gamma_{jk}^{\propto} + a_{\propto j}^1 \Gamma_{ik}^{\propto}$$

واستناداً إلى أن: $a_{ij} = a_{ij}^1$ وإلى (5) نجد:

$$a_{ij,k}^1 = \lambda_{\bar{i}} g_{jk} + \lambda_{\bar{j}} g_{ik} + \lambda_i F_{kj} + \lambda_j g_{ki}$$

أي أن:

$$\Gamma_{ij,k}^1 = \overset{\propto}{\Gamma}{}_{ij}^{\propto} a_{k\propto}^1 + \lambda_i F_{jk} + \lambda_j F_{ik}$$

و برفع الدليل k في الأخيرة بواسطة التنسور المتري $a_1^{\propto k}$ حيث a_1^{ik}//// هي المصفوفة العكسية للمصفوفة $/a_{ik}^1/$ نجد:

$$\overset{1}{\Gamma}{}_{ij}^{k} = \Gamma_{ij}^k + \vartheta^{\bar{k}} g_{ij} - \lambda_i F_j^k - \lambda_j F_i^k$$

حيث: $\vartheta^k = \lambda_{\propto} a_1^{\propto k}$.

واستناداً إلى أن:

$$g_{ij,k} = \partial_k g_{ij} - g_{i\propto} \overset{1}{\Gamma}{}^{\propto}_{jk} - g_{j\propto} \overset{1}{\Gamma}{}^{\propto}_{ik}$$

وإلى (7) نجد أن:

$$g_{ij,k} = (\vartheta_{\bar{\imath}} g_{kj} + \vartheta_{\bar{\imath}} g_{ki} + \lambda_j F_{ki} + \lambda_i F_{kj}$$

حيث: $\vartheta_i = \vartheta^{\propto} g_{\propto i} = \lambda_B a_1^{B\propto} g_{\propto i}$.

و λ_i , a_{ij} موضحة في (6) ، نصل إلى أن:

$$Z_i = -\vartheta_i \qquad (9)$$

بالتعويض في (8) نجد أن:

$$g_{ij,k} = -\vartheta_{\bar{\imath}} g_{ki} - \vartheta_{\bar{\jmath}} g_{ki} + \varphi_i F_{ki} + \varphi_j F_{kj} \qquad (10)$$

وبالتالي من أجل التنسور:

$$\frac{1}{a_{ij}} = \overset{2\bar{\emptyset}}{e} g_{ij} \qquad (11)$$

نجد أن:

$$\frac{1}{a_{ij,k}} = 2\bar{\vartheta}_k \overset{1}{a}_{ij} + \vartheta_{(i\bar{g}_j)k} + \vartheta_{(i\bar{F}_j)k} \qquad (12)$$

مما سبق نصل إلى صحة المبرهنة التالية:

- **مبرهنة (4):**

إذا وجد تطبيق هولومورفي إسقاطي غير مبتذل من فضاء كيلير المكافئي K_n ذي التنسور المتري g_{ij} إلى فضاء كيلر الفضائي $\bar{K}_n$ ذي التنسور المتري $\bar{g}_{ij}$ موافقاً للمتجه $\bar{\vartheta}_i$، فإنه يوجد تطبيق هولومورفي إسقاطي غير مبتذل من فضاء كيلر $\bar{K}_n$ ذي التنسور المتري $\overset{1}{a}_{ij}$ المحقق للعلاقة (8) إلى فضاء كيلير المكافئي $\bar{K}_n$ ذي التنسور المتري $\overset{1}{\bar{a}}_{ij}$ المحقق للعلاقة (11) موافقاً للمتجه $\bar{\vartheta}_i$ ذاته.

نسمي التحويل الذي ينقلنا من تطبيق هولومورفي اسقاطي:

$$\partial: K_n \xrightarrow{\vartheta_{\bar{\imath}}} \bar{K}_n$$

إلى تطبيق هولومورفي إسقاطي:

$$\partial: \overset{1}{K}_n \xrightarrow{\vartheta_{\bar{\imath}}} \overset{1}{\bar{K}}_n$$

تحويلاً ثابتاً لفضاء كيلر المتواجد بينهما تطبيق هولومورفي ونرمز لهذا التحويل

$$\Gamma(g, \bar{g}, \vartheta_{\bar{\mathrm{I}}}) = (\bar{a}, \ \overset{1}{\bar{a}}, \bar{\vartheta}\ ) \qquad (13)$$

لنجد الآن علاقة الانتقال من (6a) إلى (11) أن $\Gamma(g, \bar{g}, \bar{\vartheta})$ تقابل، ومن العلاقات:

$$\widetilde{\overline{g_{ıȷ}}} = \exp(-2\bar{\vartheta})\overline{g_{ıȷ}}$$

$$\widetilde{\overline{g_{ıȷ}}} = e^{-2\bar{\vartheta}} g_{ij}$$

(14)

$$\bar{\vartheta}_i = \frac{1}{n+2}\partial_i \lim \sqrt{|\bar{g}/g|}$$

نجد أن:

$$\bar{g}_{ij} = e^{-2\bar{\vartheta}} \ \underset{1}{a}^{\propto B} \ \bar{a}_{\propto i} \ \overset{1}{\bar{a}}_{Bj}$$

(15)

بمقارنة (15) مع (a , 6) و (11) نجد:

$$\Gamma(\ \overset{1}{\bar{a}},\ \overset{1}{a}, -\bar{\vartheta}\ ) = (\bar{g}, g_1, -\bar{\vartheta}\ )$$

نجد أن خاصة Γ – تحويل حقيقي يدعى تحويل هولومورفي ثابتاً.

<u>ثانياً</u>: لنأخذ التنسور:

$$A_i^j = e^{2\bar{\vartheta}} g^{-j\propto} g_{\propto i} \qquad (16)$$

عندئذ فإن تنسورات المترية $\overset{1}{a}_{ij}$, $\overset{1}{\bar{a}}_{ij}$ الناتجين عن التنسورات المترية $\bar{g}_{ij}, g_{ij}$ للفضائين $\bar{K}_n, K_n$ بنتيجة Γ – تحويل وبنتيجة العلاقات (1) و (2) بأخذه العلاقات

$$\overset{1}{a}_{ij} = A_i^{\propto} g_{\propto i} \ \text{و} \quad \overset{1}{\bar{a}}_{ij} = e^{2\Psi}\ g_{ij} \qquad (17)$$

واستناداً إلى المبرهنة (1) فإن الفضاء $\overset{1}{K}_n$ يسمح بتطبيق هولومورفي Γ – اسقاطي على $\overset{1}{\bar{K}}_n$ الموافق للمتجه $\bar{\vartheta}_i$ ، وبالتالي يوجد $\Gamma(\ \overset{1}{\bar{a}}\ ,\ \overset{1}{a}, \bar{\vartheta})$ تحويل هولومورفي وبالتالي نحصل على الفضائين $\overset{2}{K}_n$, $\overset{2}{\bar{K}}_n$ ذي التنسورينالمتريين $\overset{2}{a}_{ij}$, $\overset{2}{\bar{a}}_{ij}$:

$$\overset{2}{a}_{ij} = \overset{2}{A}_i^{\propto}\ \overset{1}{a}_{\propto j} \quad , \quad \overset{2}{\bar{a}}_{ij} = e^{2\Psi}\ \overset{1}{a}_{\propto j} \qquad (18)$$

حيث $\overset{1}{A}_i$ موضح بالعلاقة (5)، أي:

$$\overset{1}{A}{}_i^j = e^{2\bar{\vartheta}} \ \overset{1}{a}{}^{j\propto} \ \overset{1}{a}{}_{\propto i} \qquad (19)$$

ينتج من (15) أن:

$$\overset{1}{A}{}_i^j = g^{j\propto} \ \overset{1}{a}{}_{\propto i} = A_i^B g_{B\propto} g^{\propto i} = A_i^j \qquad (20)$$

تعني (20) أن التنسور (16) ثابت بالنسبة لـ Γ– تحويل، عندئذ تأخذ العلاقة (9) الشكل:

$$\overset{2}{a}_{ij} = A_i^{\propto} A_{\propto}^B g_{Bi} \ , \ \overset{2}{\bar{a}}_{ij} = e^{2\bar{\vartheta}} A_i^{\propto} g_{\propto i} \qquad (21)$$

بصورة مشابهة نجد أن التحويل $\Gamma = (\overset{2}{a}, \overset{2}{\bar{a}}, \bar{\vartheta})$ إلى الثلاثية $(\overset{3}{a}, \overset{3}{\bar{a}}, \bar{\vartheta})$ حيث

$$\overset{3}{a}_{ij} = A_i^{\propto} A_{\propto}^B A_B^{\propto} g_{Bi} \ , \ \overset{3}{\bar{a}}_{ij} = e^{2\bar{\vartheta}} A_i^{\propto} A_{\propto}^B g_{Bi} \qquad (22)$$

وبصورة عامة إذا فرضنا Γ^m تحويل من المرتبة m المعرف بالشكل:

$$\Gamma^m(g, \bar{g}, \bar{\varphi}) = (a^m, \bar{a}^m, \bar{\vartheta}) \qquad (23)$$

عندئذ نجد أنه يمكن التعبير عن التنسورات المترية $a_{ij}^m, \bar{a}_{ij}^m$ للفضائين $\overset{m}{V}_n, \ \overset{m}{\bar{V}}_n$ بالشكل:

$$a_{ij}^m = \overset{m}{A}{}_i^{\propto} g_{Bi} \ , \ \bar{a}_{ij}^m = e^{2\bar{\vartheta}} \ \overset{m-1}{A}{}_i^{\propto} A_{\propto}^B g_{\propto i} \qquad (24)$$

حيث $\overset{m}{A}{}_i^{\propto}$ التنسور A_i^j من المرتبة m على أن تعتبر $\overset{0}{A}{}_j^i = \partial_i^j$.

- **الآن يتبادر إلى الذهن السؤال الآتي:**

هل يوجد فضاءات بحيث من أجل عدد ما من m وبحيث

$$\Gamma^m(g, \bar{g}, -\bar{\vartheta}) = (g, \bar{g}, \bar{\vartheta}) \qquad (25)$$

وبفرض (25) محققة أي يكون: $a_{ij}^m = g_{ij}, \bar{a}_{ij}^m = \bar{g}_{ij}$ ، واستناداً إلى (24) نجد أن:

$$\overset{m-1}{A}{}_j^i = \partial_j^i$$

من هنا نجد أن التنسور A_j^i صامد (ثابت موضعياً).

لكن (16) و (14) و (12) نجد:

$$\det ||A_j^i|| = Ce^{-2\bar{\vartheta}}$$

لذلك نجد أن $\bar{\vartheta}$ثابت، وأن تطبيق من $\bar{K}_n s' K_n$ مبتذل وهذا مخالف للفرض، من هنا إلى المبرهن التالية:

- **مبرهنة (5):**

إذا وجد تطبيق هولومورفي إسقاطي غير مبتذل من K_n إلى $\bar{K}_n$ الموافق للمتجه $\bar{\vartheta}_i$ فإن التحويل $\Gamma\left(\mathrm{g}, \bar{g}, \bar{\vartheta}_i\right)$ يولد متتالية غير متنهية من التطبيقات الهولومورفية$\bar{\mathrm{K}}_\mathrm{n} \xrightarrow{\vartheta_\mathrm{i}}$ K_m^n ذوات الفضاءات المترية المحققة بالعلاقات (24) و (16) من أجل $m = 1, 2, 3, \ldots$.

REFERENCES

1- T. Otsuki and Y. Tashiro, on curves in Kahlerian spaces, Math. J.Okayama Univ. 4(1954), 57-78.

2- D.V.Beklemishev, differential geometry of spaces with an almost complex structure, (Russian), in: ltoge Nauki, Geometric, 1963. All-union institute for Scientific and technical information Moscow, (1965), 165-212.

3-K.Yano, Differential Geometry on Complex and Almost Spaces (Pergamum Press, Oxford, 1965).

4-A.Z.Petrov, New Method in General Relativity Theory (Navka, Moscow, 1966).

5- V.V. Domashev and J. Mikes on the theory of holomorphially projective mappings of Kahlerian Spaces, mat.Zametki 23 (1978) (2) 297-304.

6- Sinyukov. N. S. Geodesic Mappings of Riemannian Space, Hauka Moscow, 1979 P.255.

7-M. Prvanovic, a note in holomorphically projective transformations of the Kahler spaces, Tensor New Ser. 35

(1981), 99-104.

1- V.V. Vishnevsky, A.P. Shirokov, V.V. Shurigin, Spaces over Algebra, Kazan Univ. Press, Kazan, (1985).

2-

9- J. Mikes and N. S. Sinyukov, On qusi Planar Mappings for affine- connected spaces, Sov. Math , 27, 1(1983), 63-70.

10- Mikes, J. Holomorphically Projective Mappings and their generalizations. J Math , Sci., New York , 89, 3, 1334-1352-1998.

11- J. Mikes F Planar Transformations of affine-connected spaces arch, Math, Bron 27A, 53-56 – 1991.

12- J. Mikes, On Special F- Planar Mappings of affine-connected spaces, Vestn, Mosk, Univ, 3(1994) 18-24.

13- Shiha, M., On the Theory of Holomorphically Projective Mappings Parabolically- Kahlerian spaces. Diff. Geometry and its App. Conf. Opava, 157-160, 1993.

14- Shiha, M., the Holomorphically Projective Mappings of Parabolically- Kahlerrian Spaces (Russian). Moscow 1994.

15- Shiha, M., Mikes, J., On Parabolically- Sasakian and Equidistant Parabolically- Kahlerian spaces. (Russian) Dvizh. V, Penza, 1999.

16- Shiha, M., Mikes. J., On holomorphically Projective flat Parabolically- Kahlerian spaces Grant No.201/05/2707 Czech Science Foundation and Council of Czech Government MSN No. 6198959214 (2005).