تطابقات الامتصاص

طالبة الدراسات العليا : بشرى جاد الله كلية العلوم / جامعة دمشق

الدكتور المشرف : شوقي الراشد

ملخَّص:

نقوم في هذه الورقة بنقل مفهوم الـ n_امتصاص (وبشكل خاص ثنائية الامتصاص) إلى تطابقات أنصاف الحلقات، حيثُ نُعرِّف التَّطابق ثنائي الامتصاص وتعميمهُ (n_ تطابق امتصاص) ونُعرِّف التَّطابق ثنائي الامتصاص الإبتدائي في نصف الحلقة، وندرس بعض القضايا المُتعلقة بتلك المفاهيم.

الكلمات المفتاحية : أنصاف الحلقات، التَّطابقات، المثالي ثنائي الامتصاص .

Absorbing Congruences

Abstract:

In this paper we convey a concept of n_absorbing (particularly 2_absorbing) to semiring congruences. We define 2_absorbing congruence and it's Generalization (n_absorbing congruence), we define Primary 2_absorbing congruence. Then we study some issues related to these concepts.

Key Words: Semirings, Congruences, Absorbing Ideals.

1 . مُقدِّمة:

تلعب التَّطابقات دوراً هامَّاً في أنصاف الحلقات بشكل عام وفي نصف الحلقة المداريَّة بشكلٍ خاص، لايوجد تقابل بين المثاليَّات والتَّطابقات كما في نظرية الحلقات، ويتناسب مفهوم التَّطابقات مع أنصاف الحلقات بشكل أفضل من المثاليات (تتحدَّد بنية حلقة خارج القسمة بواسطة المثاليَّات، وهذا غير ممكن في أنصاف الحلقات، وفقاً للعلاقة التَّالية: $[\, a+I=b+I \iff a-b\in I \,]$ حيثُ a,b عناصر من الحلقة، و I مثالي. المُشكلة في أنصاف الحلقات هي عدم وجود العنصر $-b$ بالضرورة).

فقد تمَّ تعريف الطيف الأوَّلي لأنصاف الحلقات من خلال علاقات التَّطابق وذلك لكون المثاليات لاتحتفظ بدورها المُميَّز في أنصاف الحلقات. في عام 2016 قامت Kalina mincheva بتعريف التَّطابق الأولي وتحديد بُعد krull بشكل مشابه لنظرية الحلقات "هو طول أطول سلسلة من التَّطابقات الأوَّلية في الجداء الديكارتي لنصف الحلقة $R\times R$"([1], p.18). أيضاً قامت بتعريف جذر التَّطابق بأنَّه "تقاطع جميع التَّطابقات الأوَّلية التي تحوي التَّطابق"([1], p.22)، وذلك بهدف دراسة أصفار هلبرت لكثيرات الحُدود المداريَّة. ولإثبات عدم وجود تقابل بين التَّطابقات والمثاليَّات في أنصاف الحلقات كما هو الحال في الحلقات، قامت بتعريف القوى المُعمَّمة لعناصر تطابق وإعطاء صيغة جبريَّة من خلالها لجذر التَّطابق.

في عام 2007 قام العالم Badwi بصياغة تعميم للمثالي الأوَّلي في الحلقات التَّبديليَّة[4] ، وذلك نظراً لأهميته، ويدعى $(2-\text{absorbing ideal})$ المثالي ثنائي الامتصاص. حيثُ يكون المثالي الفعليI ثنائي امتصاص إذا وفقط إذا حقَّق الشرط: من أجل $a,b,c\in R$ إذا كان $abc\in I$ فإمَّا $ab\in I$ أو $ac\in I$ أو $bc\in I$. في عام 2011 قام Darni وSoheilnia بتقديم مفهوم المودول الجُزئي ثنائي الامتصاص، أيضاً في عام 2012 قام Tayprakash Ninu chaudhari بتعريف مماثل للمثالي ثنائي الامتصاص في أنصاف الحلقات، وفي عام 2013 قام Darni وPuczylowski بتعريف نصف الزمرة ثنائية الامتصاص، و في 2016 قام كلاً من Hatic Çay، Hojjat Mostafanasab وGulsen ulucak بتعريف المثاليَّات ثنائية الامتصاص في أنصاف الزمر التَّبديليَّة.

ونظراً لأهمية التَّطابقات والدور الهام الذي تلعبه في الهندسة المداريَّة، قمنا بنقل مفهوم ثنائية الامتصاص وتعميمهُ n–امتصاص إلى التَّطابقات بهدف دراسة خواص جبريَّة إضافيَّة للتَّطابقات.

2 .هدف البحث: نقوم في هذا البحث بدراسة تعميم مفهوم التَّطابق الأوَّلي، وهو مفهوم الـ n_امتصاص (والحالة الخاصَّة منه ثنائية الامتصاص) وإثبات بعض القضايا المُتعلِّقة به. كما نهدف إلى إثبات أنَّ تطابق نصف الحلقة المداريَّة $\Omega(\mathbb{T}^{n})$ هو تطابق ثنائي الامتصاص.

3 . تعاريف ومُبرهنات:

1.3 نصف الحلقة ([1], p.14) ([2], p.4) ([3], p.4) ([8], p.12): تدعى الثلاثية $(R,+,\cdot)$، حيثُ $+$ جمع و . ضرب، نصف حلقة إذا تحققت الشُّروط الآتية:

1) الثنائية $(R,+)$ هي مونوئيد تبديلي(الصفر 0 هو عنصر حيادي).

2) الثنائية $(R,\cdot)$ هي مونوئيد (الواحد 1 هو عنصر حيادي).

3) الضرب توزيعي على الجمع.

4) العنصر الحيادي الجمعي ماص $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$ من أجل $a \in R$.

إذا كانت R نصف حلقة بحيث $(R,\cdot)$ تبديليَّة، عندئذٍ يُقال عن R إنَّها تبديليَّة. وإذا كانت R نصف حلقة بحيث يوجد لكل عنصر غير صفري في R معاكس ضربي، عندئذٍ فإنَّ R تُدعى نصف حقل. في هذه الحالة تكون الثنائية $(R\backslash\{0\},\cdot)$ هي زمرة.

إحدى أهم أنصاف الحلقات هي نصف الحلقة المداريَّة، المُعرَّفة بالشَّكل الآتي:

2.3 تعريف ([1], p.15)([2], p.5) ([8], p.14): يُقال عن $(R,\oplus,\odot,-\infty,0)$ بأنَّها نصف حلقة مداريَّة إذا حققت الشروط الآتية:

1) $(R,\oplus,-\infty)$ نصف زمرة مداريَّة.

2) $(R,\odot)$ نصف زمرة.

3) $a\odot b = b\odot a$.

4) $a\odot(b \oplus c) = a\odot b \oplus a\odot c$.

5) $a \odot 0 = a$.

6) $a \odot -\infty = -\infty$.

يُدعى العنصر $-\infty$ العنصر الصفري لِ R ، و0 العنصر الواحدي لِ R. ويُعطى جمع عنصرين بالشّكل $(x \oplus y = \max\{x, y\})$، كما يُعطى جداء عنصرين بالشّكل $(x \odot y = x + y)$. حيثُ تُعرَّف نصف الزمرة $(M, \oplus)$ بأنّها مجموعة غير خالية M مُعرَّف عليها العملية التَّجميعية $\oplus$.

ويُقال عن $(M, \oplus, -\infty)$ بأنَّها نصف زمرة مداريَّة إذا حقَّقت الشروط الاتية:

1) $(M, \oplus)$ نصف زمرة.

2) $v \oplus w = w \oplus v$.

3) $v \oplus -\infty = v$.

4) $v \oplus v = v$

بفرض لدينا $\mathbb{T} = (\mathbb{R} \cup \{-\infty\}, \oplus, \odot)$ نصف حلقة مداريَّة حقيقيَّة، تكون المجموعة الأساسيَّة لها $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$. ويُعطى جمع عنصرين بالشّكل $(x \oplus y = \max\{x, y\})$ بالتَّرتيب المُعتاد للأعداد الحقيقيَّة، العنصر الأصغرهو $-\infty$. كما يُعطى جداء عنصرين بالشَّكل $(x \odot y = x + y)$ حيثُ $+$ هو الجمع المُعتاد للأعداد الحقيقيَّة ويتحقَّق: $[(-\infty) \odot a = a \odot (-\infty) = -\infty \ \ \forall a \in \mathbb{R}_{\max}]$

وهي تشكِّل نصف حقل. كما أنَّ كلاً من $\mathbb{Q}_{\max}$ وَ $\mathbb{Z}_{\max}$ هي أنصاف حقول جزئيَّة من $\mathbb{R}_{\max}$ وتملك المجموعات الأساسيَّة $\mathbb{Q} \cup \{-\infty\}$ وَ $\mathbb{Z} \cup \{-\infty\}$ على التَّرتيب.

وبشكل مُناظر يُمكن أن تكون المجموعة الأساسيَّة لِ $\mathbb{T}$ هي $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$. ويُعطى جمع عنصرين بالشَّكل ($x \oplus y = \min\{x, y\}$) بالتَّرتيب المُعتاد للأعداد الحقيقيَّة، العنصر الأكبر هو ∞. وبفرض $\mathbb{B}$ نصف الحقل البولياني $\mathbb{B} = \{0,1\}$ فإنَّ $\mathbb{B} = \{-\infty, 0\} \in \mathbb{T}$ بالنسبة لِ max وَ $\mathbb{B} = \{0, \infty\} \in \mathbb{T}$ بالنسبة لِ min.

3.3 تعريف ([8], p.14) ([2], p.4) ([1], p.15): إذا كانت الثنائية $(R, +, \cdot)$ نصف حلقة تبديليَّة و $S \subset R$. يُقال عن S إنَّها نصف حلقة جزئية من R (Subsemiring) إذا تحقَّق أنَّ:

$$1,0 \in S \quad , \quad a + b, a \cdot b \in S$$

4.3 تعريف ([8], p.19) ([2], p.5) ([1], p.16): بفرض لدينا R_1, R_2 أنصاف حلقات. يُدعى التطبيق $f: R_1 \to R_2$ (Semiring homomorphism) تشاكل نصف حلقي إذا تحقَّق مايلي:

1)− $f(a+b) = f(a) + f(b)$
2)− $f(a \cdot b) = f(a) \cdot f(b)$
3)− $f\left(0_{R_1}\right) = 0_{R_2}$
4)− $f\left(1_{R_1}\right) = 1_{R_2}$

وذلك أيَّاً كان $a, b \in R_1$.

مثال: إنَّ التَّطبيق الآتي هو تشاكل نصف حلقي:

$$f: \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{B}$$
$$a \mapsto \begin{cases} 1 & \text{if } a \neq -\infty \\ 0 & \text{if } a = -\infty \end{cases}$$

أيضاً لدينا التَّطبيق الآتي تشاكل نصف حلقي:

$$g: \mathbb{B} \longrightarrow \mathbb{T} \quad ; \quad (g(0) = -\infty , g(1) = 0)$$

5.3 تعريف ([8], p.22) ([2], p.86) ([1], p.15): بفرض $(R, +, \cdot)$ نصف حلقة تبديليَّة واحدية. يُعرَّف التَّطابق Ω لنصف الحلقة R بأنَّه مجموعة جزئيَّة من الجداء الديكارتي $R \times R$ تُحقِّق الشُّروط الآتية:

1)− $(a, a) \in \Omega,$ for $a \in R$

2)− $(a, b) \in \Omega,$ if and only if $(b, a) \in \Omega$

3)− if $(a, b) \in \Omega,$ and $(b, c) \in \Omega$ then $(a, c) \in \Omega$

4)− if $(a, b) \in \Omega,$ and $(c, d) \in \Omega$ then $(a + c, b + d) \in \Omega$

5)− if $(a, b) \in \Omega,$ and $(c, d) \in \Omega$ then $(a \cdot c, b \cdot d) \in \Omega$

حيثُ يكون التَّطابق الأصغر الوحيد هو القطر لِ $R \times R$ والذي يُرمز له بِ Δ، ويُدعى التَّطابق التَّافه (وهو يُقابل المثالي الصفري).$R \times R$ هو تطابق غير فعلي، أمَّا التَّطابقات المتبقية فتُدعى فعليَّة. إذا كان I مثالي فإنَّنا نرمز إلى التَّطابق المولَّد بالأزواج $(a, 0)$ من أجل كل $a \in I$ بِ Ω_I.

يُرمز لنصف حلقة القسمة لِ R على التَّطابق Ω بِ R/Ω. ونعلم في الجبر التَّبادلي أنَّه من أجل المثالي I يكون $R/I = R/\Omega_I$.

6.3 تعريف ([1], p.16): تُعرَّف نواة التَّطابق بأنَّها صف التَّكافؤ للعنصر الصفري. أي من أجل التَّطابق $\Omega \subseteq R \times R$ لدينا:

$$Ker(\Omega) = \{a \in R \mid (a, 0) \in \Omega\}$$

نواة التَّطابق دوماً مثالي. ويُقال عن نواة تطابق بأنَّها تافهة إذا كانت مساوية للمجموعة الصفرية $\{0\}$.

في نصف الحلقة الجامدة لدينا:

$$(a+b,0) \in \Omega \Longrightarrow (a,0) \in \Omega$$

ومنه أيَّاً كان $(a+b) \in Ker(\Omega)$ فإنَّ $a \in Ker(\Omega)$ و $b \in Ker(\Omega)$، وتُدعى المثاليَّات التي تُحقِّق هذه الخاصَّة (Saturated).

7.3 تعريف ([1], p.16): إذا كان $\varphi: R_1 \to R_2$ شعاع بين أنصاف الحلقات R_1, R_2، و Ω هو تطابق لِ R_2، الصورة العكسية لِ Ω هي التَّطابق:

$$\varphi^{-1}(\Omega\ ) = \{(\alpha_1, \alpha_2) \in R_1 \times R_1\ \mid (\varphi(\alpha_1), \varphi(\alpha_2)) \in \Omega\ \}$$

8.3 تعريف ([1], p.16): نقصد بنواة شعاع الصورة العكسية للتطابق التَّافه $\varphi^{-1}(\Delta\ )$ ونرمز لها بِ $Ker(\varphi)$.

9.3 تعريف ([1], p.16): نقصد بِ(𝔹_algebra) نصف حلقة تبديليَّة جامدة جمعيَّاً أي $(a+a=a\ , \forall a)$ وسنرمز بِ A لِ (𝔹_algebra) اختياري. نُلاحظ أنَّ الجمع الجامد يُعرِّف ترتيب كمايلي:

$$a \geq b \Leftrightarrow a+b=a\ \ ;\ \ a \oplus b = \sup\{a,b\}\ , or\ a \oplus b = \inf\{a,b\}$$

تُدعى عناصر $A \times A$ أزواج، والإحداثيات للزوج α هي (α_1, α_2).

10.3 تعريف ([1], p.17) ([2], p.91) ([3], p.8): يُعرَّف الجداءالمُتشابك (الملفوف) للأزواج $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ و $\beta = (\beta_1, \beta_2)$ بالشكل الآتي:

$$\beta\alpha = (\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 \,, \alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1)$$

نُلاحظ أنَّه تجميعي، وأنَّ مجموعة الأزواج تُشكل مونوئيد بالنسبة لهذه العملية (العنصر الحيادي هو الزوج $(1,0)$).

يُرمز للقوة $n-th$ لِ α وفق الجداء المُتشابك بِα^n. كما يُرمز للزوج $(1,0)$ بِ α^0.

ويُعرَّف جداء عنصر a بزوج (α_1, α_2) بالشكل $a(\alpha_1, \alpha_2) = (a\alpha_1, a\alpha_2)$ وهو الجداء المُتشابك لِ $(a, 0)(\alpha_1, \alpha_2)$.

11.3 تعريف ([1], p.17): يُعرَّف جداء تطابقين $\Omega, \Omega_1 \subseteq A \times A$ بأنَّه التَّطابق المولَّد بالمجموعة

$$\{\beta\alpha \mid \alpha \in \Omega, \beta \in \Omega_1\}$$

12.3 تعريف ([1], p.18): من أجل الحلقات التبديليَّة، يكون المثالي أوَّلي إذا وفقط إذا كان التَّطابق المُقابل لايحوي جداءات مُتشابكة لأزواج تتوضَّع خارج التَّطابق. أي بفرض P مثالي لحلقة تبديليَّة و Ω_P تطابق بالنَّواة P عندئذٍ فإنَّ P أوَّلي إذا وفقط إذا تحقَّق مايلي:

إذا كان $\beta\alpha \in \Omega_P$ فإنَّهُ إمَّا $\alpha \in \Omega_P$ أو $\beta \in \Omega_P$.ويُمكن التحقق من ذلك بالشَّكل:

$$\begin{aligned} \beta\alpha \in \Omega_P &\Leftrightarrow \big((\alpha_1 - \alpha_2)(\beta_1 - \beta_2), 0\big) \in \Omega_P \\ &\Leftrightarrow (\alpha_1 - \alpha_2)(\beta_1 - \beta_2) \in P \end{aligned}$$

13.3 تعريف ([3], p.5) ([1], p.18)): يُقال عن التَّطابق Ω لِـA (𝔹_algebra) بأنَّه أوَّلي (Prime Congruences) إذا كان فعلي وتحقَّق مايلي:
إذا كان $\beta\alpha \in \Omega$، عندئذٍ $\alpha \in \Omega$ أو $\beta \in \Omega$ وذلك من أجل $\alpha, \beta \in A \times A$.

وندعو (𝔹_algebra) منطقة إذا كان التَّطابق التَّافه له أوَّلي.

مثال: بفرض لدينا $\mathbb{B}[x]$ مُرتَّبة كليَّاً وفقاً لدرجات x (بالنسبة لِـ max) (وذلك كون الجمع يُعطي ترتيب كلي). وبفرض لدينا $\beta = (\beta_1, \beta_2)$ و $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$، بفرض أنَّ $\beta_1 \geq \beta_2$ و $\alpha_1 \geq \alpha_2$ و $\alpha_1\beta_2 \geq \alpha_2\beta_1$ عندئذٍ:

$$\beta\alpha = (\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 \,, \alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1) = (\alpha_1\beta_1, \alpha_1\beta_2) \in \Delta$$

إذا كان $\beta \notin \Delta$ عندئذٍ فإنَّ $\alpha_1 = 0$ (وذلك حيثُ $\mathbb{B}[x]$ تُحقِّق الشَّرط التَّالي: إذا كان $ab = ac$ فإمَّا $a = 0$ أو $b = c$ (Cancellative)) ومنهُ $\alpha_2 = 0$ وَ $\alpha \in \Delta$ ومنهُ $\mathbb{B}[x]$ هي منطقة.

14.3 تعريف ([1], p.23)): بفرض I مثالي في الحلقة R جذرهُ $Rad(I)$، وبفرض Ω_I وَ $\Omega_{Rad(I)}$ هي التَّطابقات المُقابلة (حيثُ I وَ $Rad(I)$ هي النواة لكل منهما على التَّرتيب). عندئذٍ لدينا:

$$(a, b) \in \Omega_{Rad(I)} \Leftrightarrow (a, b)^n \in \Omega_I \text{ for a large enough } n$$

وذلك وفقاً لِـ:
$$(a, b)^n \in \Omega_I \Leftrightarrow ((a - b)^n, 0) \in \Omega_I$$

حيثُ $(a, b)^n$ ترمز إلى القوة $n - th$ بالنسبة للجداء المُتشابك.

أمَّا بالنسبة لأنصاف الحلقات فإنَّ الأمر معقد أكثر، كما هو موضَّح فيمايلي.

15.3 تعريف([3], p.10) ([1], p.22): بفرض Ω تطابق لِـ A يُعرَّف جذر Ω ويُرمز لهُ بِـ $Rad(\Omega)$، بأنَّهُ تقاطع جميع التَّطابقات الأوَّليَّة الَّتي تحوي Ω. يُدعى Ω بالتَّطابق الجذري إذا تحقَّق أنَّ $Rad\big(\Omega\big) = \Omega$. وهو يُعطى بالصِّيغة الآتية:

$$Rad(\Omega) = \{\alpha \mid GP(\alpha) \cap \Omega \neq \emptyset \}$$

حيثُ:

$$GP(\alpha) = \left(\alpha^{*^{k}} + (c, 0)\right)\alpha^{l}; \alpha^{*} = (\alpha_1 + \alpha_2, 0), \left(\left(\beta\alpha\right)^{*} = \alpha^{*}\beta^{*}\right)$$

$$\text{where } k, l \text{ are non} - \text{negative integers, and } c \in A$$

هي مجموعة القوى المُعمَّمة للزوج α.

ومنهُ $Rad(\Delta) = \{\alpha \mid GP(\alpha) \cap \Delta \neq \emptyset\}$ وهي مجموعة الأزواج عديمة القوى Nilpotent. حيثُ يكون الزوج α عديم القوى إذا تحقَّق أنَّ $GP(\alpha) \cap \Delta \neq \emptyset$

16.3 تعريف ([1], p.27): يُدعى التَّطابق لِـ A ابتدائي إذا تحقَّق الشَّرط الآتي:

$$\{\alpha \mid \exists \beta \notin \Omega : \alpha\beta \in \Omega\} \subseteq Rad(\Omega)$$

17.3 مُبرهنة ([1], p.27): إنَّ جذر التَّطابق الابتدائي هو تطابق أوَّلي.

نورد فيما يلي من خلال المُبرهنة الآتية بعض الخواص الجبريَّة لتطابقات أنصاف الحلقات:

18.3 مُبرهنة ([2], p.87, p.94): بفرض R نصف حلقة تبديليَّة، وبفرض $\Omega, \Omega_1 \subseteq R \times R$ تطابقات لنصف الحلقة R. عندئذٍ تتحقَّق القضايا الآتية:

1- إنَّ $\Omega\cap\Omega_1$ هو تطابق. ومنه فإنَّ تقاطع أُسرة من التَّطابقات لنصف حلقة تبديليَّة هو أيضاً تطابق.

2- من أجل الزوج $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \in \Omega$ والزوج الإختياري $\beta = (\beta_1, \beta_2)$ يتحقَّق مايلي: $\beta\alpha \in \Omega$، ومنهُ $\Omega\Omega_1 \subseteq \Omega$.

4 . تطابقات الامتصاص: (Absorbing Congruence)

1.4 تعريف التَّطابق ثنائي الامتصاص: نقول عن التَّطابق Ω لِ ($\mathbb{B}$_algebra) A بأنَّه ثنائي الامتصاص إذا كان فعلي وتحقَّق مايلي:

إذا كان $\gamma\beta\alpha \in \Omega$ فإنَّهُ إمَّا $\alpha\beta \in \Omega$ أو $\beta\gamma \in \Omega$ أو $\alpha\gamma \in \Omega$ ،من أجل كل $\alpha, \beta, \gamma \in A \times A$.

وبحيثُ يكون $\gamma\beta\alpha$ هو الجداء المُتشابك للأزواج الثلاث α, β, γ:

$$\gamma\beta\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)(\beta_1, \beta_2)(\gamma_1, \gamma_2)$$
$$= (\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2\,, \alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1)(\gamma_1, \gamma_2)$$
$$= ((\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2\,)\gamma_1 + (\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1)\gamma_2 \;\;,\;\; (\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2\,)\gamma_2 + (\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1)\gamma_1)$$

$$\gamma\beta\alpha = (\alpha_1\beta_1\gamma_1 + \alpha_2\beta_2\,\gamma_1 + \alpha_1\beta_2\gamma_2 + \alpha_2\beta_1\gamma_2\,, \alpha_1\beta_1\gamma_2 + \alpha_2\beta_2\,\gamma_2 + \alpha_1\beta_2\gamma_1 + \alpha_2\beta_1\gamma_1) \;\; (*)$$

أي يكون Ω ثنائي الامتصاص إذا كانت الثنائية $(*)$ تنتمي إلى Ω عندئذٍ:

إمَّا $(\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2\,, \alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1) \in \Omega$

أو $(\alpha_1\gamma_1 + \alpha_2\gamma_2\,, \alpha_1\gamma_2 + \alpha_2\gamma_1) \in \Omega$

أو $(\beta_1\gamma_1+\beta_2\gamma_2\,,\beta_1\gamma_2+\beta_2\gamma_1)\in\Omega$.

مثال: بفرض لدينا التَّطابق $\Omega=<(x^2,y^2)>$.

إنَّ $\Omega\ni(x^2,x^2y^2)=(x,0)(x,xy^2)$ ولكنَّ أيّاً من $(x,0),(x,xy^2)$ لاينتمي إلى Ω. أيضاً:

$$(x,xy^2)^2=(x,xy^2)(x,xy^2)=(x^2+x^2y^4,x^2y^2+x^2y^2)\in\Omega$$

ولكنَّ أيّاً من $(x,xy^2),(x,xy^2)$ لاينتمي إلى Ω.

ومنهُ Ω هو تطابق ثنائي الامتصاص وليس أوَّلي.

من أجل الحلقات التبديليَّة، يكون المثالي ثنائي الامتصاص إذا وفقط إذا كان التَّطابق المُقابل لايحوي جداءات مُتشابكة لأزواج تتوضَّع خارج التَّطابق. أي بفرض I مثالي لحلقة تبديليَّة و Ω_I تطابق بالنَّواة I عندئذٍ فإنَّ I ثنائي الامتصاص إذا وفقط إذا تحقَّق:

إذا كان $\gamma\beta\alpha\in\Omega_I$ فإنَّهُ إمَّا $\alpha\beta\in\Omega_I$ أو $\beta\gamma\in\Omega_I$ أو $\alpha\gamma\in\Omega_I$.

للتحقق من ذلك: لدينا α في Ω_I إذا وفقط إذا تحقَّق $\alpha_1-\alpha_2\in I$. ومنه يكون $\alpha\beta$ في Ω_I إذا وفقط إذا تحقَّق $(\alpha_1-\alpha_2)(\beta_1-\beta_2)\in I$.

I مثالي أوَّلي إذا وفقط إذا تحقَّق مايلي:

$$(\alpha_1-\alpha_2)(\beta_1-\beta_2)\in I \text{ implies either } (\alpha_1-\alpha_2)\in I \text{ or } (\beta_1-\beta_2)\in I$$

I مثالي ثنائي الامتصاص إذا وفقط إذا تحقَّق مايلي:

$$(\alpha_1-\alpha_2)(\beta_1-\beta_2)(\gamma_1-\gamma_2)\in I\ implies\ either\ (\alpha_1-\alpha_2)\in I\ or\ (\beta_1-\beta_2)\in I\ or\ (\gamma_1-\gamma_2)\in I$$

ويُمكن التحقق من ذلك بالشَّكل:

$$\beta\alpha\gamma \in \Omega_I \Leftrightarrow \big((\alpha_1-\alpha_2)(\beta_1-\beta_2)(\gamma_1-\gamma_2),0\big) \in \Omega_I$$
$$\Leftrightarrow (\alpha_1-\alpha_2)(\beta_1-\beta_2)(\gamma_1-\gamma_2) \in I$$

اثبات التكافؤ الثَّاني يكون حسب التعريف. أمَّا من أجل التكافؤ الأوَّل:

$$\beta\alpha\gamma \in \Omega_I \Leftrightarrow \ \alpha_1\beta_1\gamma_2+\alpha_2\beta_2\,\gamma_2+\alpha_1\beta_2\gamma_1+\alpha_2\beta_1\gamma_1=0$$
$$\Leftrightarrow \ \alpha_1\beta_1\gamma_2+\alpha_1\beta_2\gamma_1=-\alpha_2\beta_2\,\gamma_2-\alpha_2\beta_1\gamma_1$$
$$\big((\alpha_1-\alpha_2)(\beta_1-\beta_2)(\gamma_1-\gamma_2),0\big) \in \Omega_I$$
$$\Leftrightarrow ((\alpha_1\beta_1-\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1+\alpha_2\beta_2\,)(\gamma_1-\gamma_2),0) \in \Omega_I$$
$$\Leftrightarrow (\alpha_1\beta_1\gamma_1-\alpha_1\beta_2\gamma_1-\alpha_2\beta_1\gamma_1+\alpha_2\beta_2\,\gamma_1-\alpha_1\beta_1\gamma_2$$
$$+\alpha_1\beta_2\gamma_2+\alpha_2\beta_1\gamma_2-\alpha_2\beta_2\,\gamma_2,0) \in \Omega_I$$

وتعميم ماسبق من أجل $n-$ تطابق امتصاص يكون بالشَّكل الآتي:

2.4 تعريف: نقول عن التَّطابق الفعلي Ω لـ ِ(𝔹_algebra) A بأنَّه $n-$ امتصاص إذا كان $\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n+1} \in \Omega$ يعني أنَّ الجداء المُتشابك لِ n زوج منها ينتمي لِ Ω. حيثُ $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_{n+1} \in A$.

3.4 مُبرهنة: إذا كان $Q\,,P$ تطابقين أوَّليين غير تافهين لِ A عندئذٍ فإنَّ $Q\cap P$ هو تطابق ثنائي الامتصاص.

الإثبات: حسب القضيَّة (1) من المُبرهنة (18.3) فإنَّ التَّقاطع $Q\cap P$ هو تطابق. نفرض الآن أنَّ $(\alpha\beta)\gamma \in Q\cap P$ من أجل $\alpha,\beta,\gamma \in A\times A$، عندئذٍ يتحقَّق: $(\alpha\beta)\gamma \in P$ و $(\alpha\beta)\gamma \in Q$. وبما أنَّ P هو تطابق أوَّلي عندئذٍ إمَّا $(\alpha\beta) \in P)$ أو $\gamma \in P$. إذا كان $(\alpha\beta) \in P$ فإمَّا $\alpha \in P$ أو $\beta \in P$، وبشكل مُشابه $\alpha \in Q$ أو $\beta \in Q$ أو $\gamma \in Q$.

بفرض $\alpha \in Q \cap P$ عندئذٍ وبالإعتماد على القضيَّة (2) من المُبرهنة (18.3) إمَّا $\alpha\beta \in Q \cap P$ أو $\beta\gamma \in Q \cap P$ أو $\alpha\gamma \in Q \cap P$ ومنه فإنَّ $Q \cap P$ هو تطابق ثنائي الامتصاص.

$$\alpha(\beta\gamma) \in I(JK) = \{\alpha(\beta\gamma) \mid \alpha \in I, \beta\gamma \in JK\} \in PQ \subseteq P \cap Q \qquad \square$$

4.4 : بفرض لدينا $\varphi: R_1 \to R_2$ شعاع بين أنصاف الحلقات التبديليَّة R_1, R_2. إذا كان Ω_2 هو تطابق ثنائي الامتصاص في R_2، فإنَّ $\varphi^{-1}(\Omega_2)$ هو تطابق ثنائي الامتصاص في R_1.

الإثبات: إنَّ φ هو تشاكل نصف حلقي، وبحسب التَّعريف (7.3) يكون $\varphi^{-1}(\Omega_2)$ تطابق. ليكن $\alpha\beta\gamma \in \varphi^{-1}(\Omega_2)$ بحيث $\alpha, \beta, \gamma \in R_1$. عندئذٍ:

$$\varphi(\alpha\beta\gamma) = \varphi(\alpha)\varphi(\beta)\varphi(\gamma) \in \Omega_2$$

وبما أنَّ Ω_2 هو تطابق ثنائي الامتصاص عندئذٍ:

إمَّا $\varphi(\alpha)\varphi(\beta) \in \Omega_2$ أو $\varphi(\beta)\varphi(\gamma) \in \Omega_2$ أو $\varphi(\alpha)\varphi(\gamma) \in \Omega_2$ ومنه:

إمَّا $\alpha\beta \in \varphi^{-1}(\Omega_2)$ أو $\beta\gamma \in \varphi^{-1}(\Omega_2)$ أو $\alpha\gamma \in \varphi^{-1}(\Omega_2)$ ومنهُ $\varphi^{-1}(\Omega_2)$ هو تطابق ثنائي الامتصاص في R_1. $\square$

5.4 مُبرهنة: في الجبر التَّبادلي، إذا كانت R حلقة و Ω هو تطابق ثنائي الامتصاص. عندئذٍ فإنَّ الجذر لهُ هو تطابق ثنائي الامتصاص.

الإثبات: بفرض I مثالي في الحلقة R جذرهُ $Rad(I)$، وبفرض Ω_I وَ $\Omega_{Rad(I)}$ هي التَّطابقات المُقابلة (حيثُ I وَ $Rad(I)$ هي النواة لكل منهما على التَّرتيب). نعلم أنَّ:

$$(a,b) \in \Omega_{Rad(I)} \Leftrightarrow (a,b)^n \in \Omega_I \text{ for a large enough } n$$
$$\Leftrightarrow ((a-b)^n, 0) \in \Omega_I$$

ومنهُ: $\alpha\beta\gamma \in \Omega_{Rad(I)} \Leftrightarrow (\alpha\beta\gamma)^n \in \Omega_I \Leftrightarrow \alpha^n\beta^n\gamma^n \in \Omega_I$

بما أنَّ Ω_I هو تطابق ثنائي الامتصاص، عندئذٍ:

إمَّا $(\alpha\beta)^n \in \Omega_I = \alpha^n\beta^n \in \Omega_I \Leftrightarrow \alpha\beta \in \Omega_{Rad(I)}$

أو $(\beta\gamma)^n \in \Omega_I = \beta^n\gamma^n \in \Omega_I \Leftrightarrow \beta\gamma \in \Omega_{Rad(I)}$

أو $(\alpha\gamma)^n \in \Omega_I = \alpha^n\gamma^n \in \Omega_I \Leftrightarrow \alpha\gamma \in \Omega_{Rad(I)}$

ومنهُ $\Omega_{Rad(I)}$ هو تطابق ثنائي الامتصاص. □

6.4 مُبرهنة: بفرض لدينا Ω هو تطابق ثنائي الامتصاص في نصف الحلقة A. عندئذٍ $Rad(\Omega)$ هو تطابق ثنائي الامتصاص في نصف الحلقة A، ومن أجل كل $\alpha \in Rad(\Omega)$ يكون:

$$({\alpha_1}^2 + \alpha_1\alpha_2, \alpha_1\alpha_2 + {\alpha_2}^2) = (\alpha_1 + \alpha_2, 0)(\alpha_1, \alpha_2) \in \Omega$$

الإثبات: لدينا من أجل كل $\alpha \in Rad(\Omega)$ لدينا، $GP(\alpha) \cap \Omega \neq \emptyset$ أي $\left(\alpha^{*^k} + \alpha^l \in \Omega\right)(c,0)$، وبما أنَّ Ω هو تطابق ثنائي الامتصاص في نصف الحلقة A، نُلاحظ أنَّ:

$$({\alpha_1}^2 + \alpha_1\alpha_2, \alpha_1\alpha_2 + {\alpha_2}^2) = (\alpha_1 + \alpha_2, 0)(\alpha_1, \alpha_2) \in \Omega$$

بفرض لدينا $\alpha, \beta, \gamma \in A$ بحيث $\gamma\beta\alpha \in Rad(\Omega)$ عنئذٍ لدينا:

$$((\gamma\beta\alpha)^*, 0)(\gamma\beta\alpha) \in \Omega$$

ونعلم حسب مُبرهنة أنَّ $[(\alpha\beta)^* = \alpha^*\beta^*]$، ومنهُ:

$$(\alpha^*\beta^*\gamma^*, 0)(\gamma\beta\alpha) = ((\alpha^*, 0)(\alpha))((\beta^*, 0)(\beta))((\gamma^*, 0)(\gamma)) \in \Omega$$

وكون Ω ثنائي الامتصاص فإنَّ: (الجداء المُتشابك تبديلي)

$$(\alpha^*\beta^*,0)(\beta\alpha) = ((\alpha^*,0)(\alpha))((\beta^*,0)(\beta)) \in \Omega$$

ومنهُ $\beta\alpha \in Rad(\Omega)$.

7.4 : إنَّ جذر التَّطابق الابتدائي في A هو تطابق ثنائي الامتصاص.

الإثبات: إنَّ $Rad(\Omega)$ هو تطابق لأنَّ $Rad(\Omega) = \bigcap_{\Omega \subseteq \Omega'} Primes\ \Omega'$ وتقاطع عدة تطابقات هو تطابق. نفرض الآن أنَّ $(\alpha\beta)\gamma \in Rad(\Omega)$ وحسب المُبرهنة (17.3) فإنَّ $Rad(\Omega)$ هو تطابق أوَّلي أي $\alpha\beta \in Rad(\Omega)$ أو $\gamma \in Rad(\Omega)$. إذا كان $\gamma \in Rad(\Omega)$ وكون $Rad(\Omega)$ هو تطابق يُحقِّق الخاصَّة (2) من المُبرهنة (18.3) فإنَّ $\alpha\gamma \in Rad(\Omega)$ أو $\beta\gamma \in Rad(\Omega)$. ومنه $Rad(\Omega)$ هو تطابق ثنائي الامتصاص. □

8.4 نتيجة: كل تطابق أوَّلي هو تطابق ثنائي الامتصاص.

9.4 تعريف: نقول عن التَّطابق الفعلي Ω لِـ A ($\mathbb{B}$_algebra) بأنَّه ثنائي الامتصاص ابتدائي إذا تحقَّق الشَّرط الآتي:

$$\{\alpha\gamma \mid \exists\beta \notin \Omega : \alpha\beta\gamma \in \Omega\} \cup \{\beta\gamma \mid \exists\alpha \notin \Omega : \alpha\beta\gamma \in \Omega\} \subseteq Rad(\Omega)$$

10.4 مُبرهنة: بفرض لدينا $\varphi: R_1 \to R_2$ شعاع بين أنصاف الحلقات التبديليَّة R_1, R_2. إذا كان Ω_2 هو تطابق ثنائي الامتصاص ابتدائي في R_2، فإنَّ $\varphi^{-1}(\Omega_2)$ هو تطابق ثنائي الامتصاص ابتدائي في R_1.

الإثبات: إنَّ φ هو تشاكل نصف حلقي، وبحسب التَّعريف (7.3) يكون $\varphi^{-1}(\Omega_2)$

تطابق، وَ $\varphi^{-1}(\sqrt{\Omega_2})$ تطابق. ليكن $\alpha\beta\gamma \in \varphi^{-1}(\Omega_2)$ بحيث $\alpha, \beta, \gamma \in R_1$.

عندئذٍ:
$$\varphi(\alpha\beta\gamma) = \varphi(\alpha)\varphi(\beta)\varphi(\gamma) \in \Omega_2$$

وبما أنَّ Ω_2 هو تطابق ثنائي الامتصاص ابتدائي عندئذٍ:

$$\varphi(\alpha)\varphi(\gamma) \in \sqrt{\Omega_2} \text{ أو } \varphi(\beta)\varphi(\gamma) \in \sqrt{\Omega_2}$$

إذا كان $\varphi(\beta)\varphi(\gamma) \in \sqrt{\Omega_2}$ فإنَّ: $\beta\gamma \in \varphi^{-1}(\sqrt{\Omega_2})$

أمَّا إذا كان $\varphi(\alpha)\varphi(\gamma) \in \sqrt{\Omega_2}$ فإنَّ $\alpha\gamma \in \varphi^{-1}(\sqrt{\Omega_2})$ ومنهُ:

$$\{\alpha\gamma \mid \exists\beta \notin \Omega_2 : \alpha\beta\gamma \in \Omega_2\} \cup \{\beta\gamma \mid \exists\alpha \notin \Omega_2 : \alpha\beta\gamma \in \Omega_2\}$$
$$\subseteq \varphi^{-1}(Rad(\Omega_2)) = Rad(\varphi^{-1}(\Omega_2))$$

ومنهُ $\varphi^{-1}(\Omega_2)$ هو تطابق ثنائي الامتصاص ابتدائي في R_1. □

11.4 مُبرهنة: كل تطابق ابتدائي هو تطابق ثنائي الامتصاص ابتدائي.

الإثبات: بفرض لدينا $\Omega \in A$ تطابق ابتدائي، و $(\alpha\beta)\gamma \in \Omega$ (حيثُ $\alpha,\beta \in A$)، عندئذٍ:

$$\{\gamma : \alpha\beta\gamma \in \Omega\} \subseteq Rad(\Omega)$$

بما أنَّ $Rad(\Omega)$ هو تطابق وَ $\alpha,\beta \in A$ عندئذٍ لدينا $\alpha\gamma \in Rad(\Omega)$ أو $\beta\gamma \in Rad(\Omega)$ ومنهُ:

$$\{\alpha\gamma \mid \exists\beta \notin \Omega : \alpha\beta\gamma \in \Omega\} \cup \{\beta\gamma \mid \exists\alpha \notin \Omega : \alpha\beta\gamma \in \Omega\}$$
$$\subseteq Rad(\Omega)$$
□

5 . تطابقات الامتصاص المداريَّة:(Tropical Absorbing Congruence)

1.5 نصف حلقة كثيرات الحُدود المداريَّة ([6],P.50)([5],P.3): بفرض لدينا نصف حلقة كثيرات الحدود المداريَّة $S = \mathbb{T}[x_1, \dots, x_n]$ بالمُتغيِّرات $x = (x_1, \dots, x_n)$. عناصر S هي كثيرات حدود بمُعاملات في $\mathbb{T}$ حيثُ تكون جميع العمليات مداريَّة أي عناصر S لها الشَّكل:

$$(F(x) = \oplus_{u\in\mathbb{Z}^n} a_u \odot x^u = max_{u\in\mathbb{Z}^n} a_u + x.u)$$

حيثُ $a_u \in \mathbb{T}$ وجميع a_u مساوِية لِ $-\infty$ باستثناء عدد منتهٍ. التَّطابقات على S هي علاقات تكافؤ على S مُغلقة تحت الضَّرب المداري والجمع المداري، أي إذا كان $F_1 \sim G_1$ و $F_2 \sim G_2$ عندئذٍ يتحقَّق أنَّ: $F_1 \oplus F_2 \sim G_1 \oplus G_2$ وَ $F_1 \odot F_2 \sim G_1 \odot G_2$.

وإذا كان $\phi: S \longrightarrow R$ تشاكل نصف حلقي، عندئذٍ $\{F \sim G \ : \ \phi(F) = \phi(G)\}$ هو تطابق، وجميع التَّطابقات على S تنشأ على هذا النَّحو. وهذا هو السَّبب الرَّئيسي لإعتبار التَّطابقات بدلاً من المثاليَّات فقط في أنصاف الحلقات. من أجل المجموعة الجُزئيَّة $\{(F_\alpha, G_\alpha): \alpha \in A\}$ من $S \times S$ يوجد تطابق أصغر على S يحوي $F_\alpha \sim G_\alpha$ من أجل جميع $\alpha \in A$، وَ يُرمز لهُ $< F_\alpha \sim G_\alpha >_{\alpha\in A}$.

ومنهُ، من أجل أي مجموعة جزئيَّة $S \subseteq \mathbb{T}^n$ يُعرَّف التَّطابق $\Omega(S)$ بالشَّكل الآتي:

$$\Omega(S) = \{(f, g) | \ f(a) = g(a), \forall a \in S \} \subseteq \mathbb{T}[X] \times \mathbb{T}[X]$$

وبالمقابل تُعرَّف مُتنوعة التَّطابق Ω بالشَّكل:

$$V(\Omega) = \{a \in \mathbb{T}^n \ | \ \ f(a) = g(a), \forall (f, g) \in \Omega\} \subseteq \mathbb{T}^n$$

ومن أجل أي تطابق Ω لِ $\mathbb{T}[X]$ يتحقَّق مايلي:

$$V(\Omega(V(\Omega))) = V(\Omega)\ , \Omega \subseteq \Omega(V(\Omega))$$

2.5 مُبرهنة ([6], p.50): من أجل $(f,g),(f',g') \in \mathbb{T}[X] \times \mathbb{T}[X]$ أيَّ عنصرين يتحقَّق مايلي:

$$V\big((f,g) \times (f',g')\big) = V(f,g) \cup V(f',g')$$

3.5 مُبرهنة: إنَّ $\Omega(\mathbb{T}^n)$ هو تطابق ثنائي الامتصاص.

الإثبات:

الحالة الأولى: بفرض لدينا إحدى الثنائيات لها الشكل $(h, 0_{\mathbb{T}})$، وبفرض لدينا:

$$(h, 0_{\mathbb{T}}) \times (f,g) \times (k,l) \in \Omega(\mathbb{T}^n)$$

أي $$(h \odot (f \odot k \oplus g \odot l), h \odot (f \odot l \oplus g \odot k)) \in \Omega(\mathbb{T}^n)$$

وذلك من أجل $f,g,h,k,l \in \mathbb{T}[X]$.

إذا كان h هو كثير الحُدود الصفري، فإنَّ h هو الدَّالة الصفريَّة على $\mathbb{T}^n$ ومنهُ فإنَّ $(h, 0_{\mathbb{T}}) \in \Omega(\mathbb{T}^n)$، وحسب الخاصَّة (2) من المُبرهنة (18.3) يكون:

$$(h, 0_{\mathbb{T}}) \times (f,g) \in \Omega(\mathbb{T}^n) \quad \text{أو} \quad (h, 0_{\mathbb{T}}) \times (k,l) \in \Omega(\mathbb{T}^n)$$

نفرض الآن أنَّ h كثير حُدود غير صفري، أي $(h(a) > 0_{\mathbb{T}}\ , \forall a \in \mathbb{T}^n)$، عندئذٍ فإنَّ $h(a)$ يملك مقلوب ضربي مداري، ومنه إذا كان:

$$(h \odot (f \odot k \oplus g \odot l))(a) = (h \odot (f \odot l \oplus g \odot k))(a)$$

فإنَّ $$(f \odot k \oplus g \odot l)(a) = (f \odot l \oplus g \odot k)(a)$$

وذلك أيَّاً كانت $a \in \mathbb{T}^n$ ومنهُ $(f,g) \times (k,l) \in \Omega(\mathbb{T}^n)$.

الحالة الثَّانية: بفرض لدينا إثنان من الثنائيات لها الشكل $(h, 0_{\mathbb{T}}), (k, 0_{\mathbb{T}})$، وبفرض لدينا

$$(h, 0_{\mathbb{T}}) \times (k, 0_{\mathbb{T}}) \times (f,g) \in \Omega(\mathbb{T}^n)$$

أي $(h\odot k\odot f, h\odot k\odot g) \in \Omega(\mathbb{T}^n)$

وذلك من أجل $f, g, h, k \in \mathbb{T}[X]$.

إذا كان $h\odot k$ هو كثير الحُدود الصفري، فإنَّ $h\odot k$ هو الدَّالة الصفريَّة على $\mathbb{T}^n$ ومنهُ فإنَّ $(h, 0_{\mathbb{T}}) \times (k, 0_{\mathbb{T}}) = (h\odot k, 0_{\mathbb{T}}) \in \Omega(\mathbb{T}^n)$.

نفرض الآن أنَّ $h\odot k$ كثير حُدود غير صفري، $(h\odot k(a) > 0_{\mathbb{T}}\ , \forall a \in \mathbb{T}^n)$، عندئذٍ فإنَّ $h\odot k(a)$ يملك مقلوب ضربي مداري، ومنه إذا كان:

$$(h\odot k\odot f)(a) = (h\odot k\odot g)(a)$$

فإنَّ:

$$f(a) = g(a)$$

وذلك أيَّاً كانت $a \in \mathbb{T}^n$ ومنهُ $(f, g) \in \Omega(\mathbb{T}^n)$. وحسب الخاصَّة (2) من المُبرهنة (18.3) يكون:

$$(h, 0_{\mathbb{T}}) \times (f, g) \in \Omega(\mathbb{T}^n) \quad \text{أو} \quad (k, 0_{\mathbb{T}}) \times (f, g) \in \Omega(\mathbb{T}^n)$$

الحالة الثَّالثة: بفرض لدينا $(f_1, f_2) \times (g_1, g_2) \times (h_1, h_2) \in \Omega(\mathbb{T}^n)$

أي: $(f_1\odot g_1 \oplus f_2\odot g_2\ , f_1\odot g_2 \oplus f_2\odot g_1) \times (h_1, h_2) \in \Omega(\mathbb{T}^n)$

$$(((f_1\odot g_1 \oplus f_2\odot g_2)\odot h_1)\oplus((f_1\odot g_2 \oplus f_2\odot g_1)\odot h_2),$$
$$((f_1\odot g_1 \oplus f_2\odot g_2)\odot h_2))\oplus((f_1\odot g_2 \oplus f_2\odot g_1)\odot h_1) \in \Omega(\mathbb{T}^n)$$

نعلم أنَّ الضرب المداري توزيعي على الجمع المداري، ومنهُ فإنَّ:

$$(f_1\odot g_1\odot h_1 \oplus f_2\odot g_2\odot h_1 \oplus f_1\odot g_2\odot h_2 \oplus f_2\odot g_1\odot h_2)(a)$$
$$= (f_1\odot g_1\odot h_2 \oplus f_2\odot g_2\odot h_2 \oplus f_1\odot g_2\odot h_1 \odot \oplus f_2\odot g_1\odot h_1)(a)$$

وذلك أيَّاً كانت $a \in \mathbb{T}^n$.

ونريد إثبات أنَّ إحدى الجداءات الآتية تنتمي إلى $\Omega(\mathbb{T}^n)$.

1. $(f_1,f_2)\times(g_1,g_2)\in\Omega(\mathbb{T}^n)$، أي:

$$(f_1\odot g_1\oplus f_2\odot g_2)(a)=(f_1\odot g_2\oplus f_2\odot g_1)(a)$$

2. $(f_1,f_2)\times(h_1,h_2)\in\Omega(\mathbb{T}^n)$، أي:

$$(f_1\odot h_1\oplus f_2\odot h_2)(a)=(f_1\odot h_2\oplus f_2\odot h_1)(a)$$

3. $(g_1,g_2)\times(h_1,h_2)\in\Omega(\mathbb{T}^n)$، أي:

$$(g_1\odot h_1\oplus g_2\odot h_2)(a)=(g_1\odot h_2\oplus g_2\odot h_1)(a)$$

وذلك أيَّاً كانت $a\in\mathbb{T}^n$.

من أجل 1: نريد إثبات أنَّ $(f_1,f_2)\times(g_1,g_2)\in\Omega(\mathbb{T}^n)$، نريد إثبات أنَّ:

$$a\in V\big((f_1,f_2)\times(g_1,g_2)\big)\,,\forall a\in\mathbb{T}^n$$

$$a\in V\big((f_1,f_2)\times(g_1,g_2)\times(h_1,h_2)\big)\,,\forall a\in\mathbb{T}^n \quad \text{(فرضاً)}$$

ونعلم أنَّ الجداء المُختلط تجميعي، ومنهُ فإنَّ:

$$a\in V(((f_1,f_2)\times(g_1,g_2))\times(h_1,h_2))\,,\forall a\in\mathbb{T}^n$$

وحسب المُبرهنة (2.5) فإنَّ:

$$a\in[V\big((f_1,f_2)\times(g_1,g_2)\big)]\cup[V(h_1,h_2)]\,,\forall a\in\mathbb{T}^n$$

إذا كانت $a\in V\big((f_1,f_2)\times(g_1,g_2)\big)$ فإنَّ 1 مُحقَّقة.

نفرض الآن أنَّ $a\in V(h_1,h_2)$، ومنهُ $h_1(a)=h_2(a)$.

وبماأنَّ الجمع الجامديُعرِّف ترتيب كلي، نفرض $(f_1\geq f_2\ \ ,g_1\geq g_2\,,h_1\geq h_2)$

نُلاحظ الآن أنَّ العلاقة 2 تقابل العلاقة الآتية:

$$\max\{f_1(a)+h_1(a),f_2(a)+h_2(a)\}$$
$$=\max\{f_1(a)+h_2(a),f_2(a)+h_1(a)\}$$

$$\max\{f_1(a)+h_1(a),f_2(a)+h_2(a)\}=f_1(a)+h_1(a) \quad \text{(فرضاً)}$$

$$\max\{f_1(a)+h_2(a),f_2(a)+h_1(a)\}=f_1(a)+h_1(a)$$

ومنهُ فإنَّ العلاقة 2 مُحققَّة. يتم إثبات العلاقة 3 بنفس الاسلوب، ومنهُ يتم المطلوب.□

6 . المراجع:

[1]. MINCHEVA.K,. 2016. - Semiring Congruences and Tropical Geometry. PhD Thesis. Baltimore (Maryland), Johns Hopkins University,81P.

[2]. HARSU.M,. 2016. - Layered Tropical commutative Algebra. Licentiate thesis. Finland, University Of Tampere,149P.

[3].QIU.D,.2017. -- On Algebraic Congruences, arXiv: 1512.08088.

[4].BADAWI.A,. 2007. - On 2-absorbing ideals of commutative rings. Bulletin of the Australian Mathematical Society , Volume 75(Issue 3),. Pages. 417 – 429.

[5]. MACLCGAN.D,. 2017.- Tropical Schemes, Tropical Cycles, and Valuated Matroid, arXiv: 1401.4654.

[6]. ESTORM.R,. 2017. - The Tropical Nullstelensats for Congruences, Advances in Mathematics [Internet], Volume 308,. Pages.36-82.

[7]. Mousa M. a Study in Absorbing Ideals. Master Thesis. Damascus: Damascus University; 2019.(In Arabic)

[8].ROBERT.HSC,. 2016.- On the Etale Fundamental Group of Schemes over the Natural Numbers. PhD Thesis. Canberra, Australian National University,124P.