توسيع حل جملة معادلات خطية ضبابية إلى حل جملة خطية ضبابية عقدية

الباحث: ورد ابراهيم فرج

قسم الرياضيات – كلية العلوم – جامعة البعث

ملخص البحث:

في هذا البحث قدّمنا دراسة لقابلية حل جملة معادلات خطية ضبابية بمتغيرات وثوابت (الطرف الأيمن) ضبابية عقدية أما المعاملات فأعداد حقيقية، حيث تم توسيع مجال الدراسة من متغيرات وثوابت ضبابية حقيقية إلى ضبابية عقدية باستخدام طرائق تحليلية معروفة وهي: طريقة فريدمان، طريقة سعيد عباس بندي وماجد علوي، مقاربة حسابية، وناقشنا مدى فعاليتها في حل جملة المعادلات الخطية الضبابية العقدية بحل أمثلة عددية لكل طريقة. لتكون خطوة في إيجاد طرائق مطورة عن الطرائق المعروفة لحل هذا النوع الجديد من الجمل.

الكلمات المفتاحية: أعداد ضبابية عقدية – جمل معادلات خطية ضبابية عقدية – طرائق تحليلية لحل جمل معادلات خطية.

Expanding the solution of the system of fuzzy linear equations to the solution of the system of linear fuzzy complex equations

ABSTRUCT:

In this paper, we presented a study of the ability to solve a system of fuzzy linear equations with complex fuzzy variables and constants As for the coefficients, they are real numbers, as the field of study was expanded from real fuzzy variables and constants to fuzzy complex using known analytical methods: Friedman's proposal, S. Abbas Bandy and M. Alavi method and an Algorithmic Approach, and we discussed its effectiveness in solving the fuzzy complex linear system by solving numerical examples for each method. To be a step in finding methods developed for the known methods to solve this new type of systems.

Keywords: complex fuzzy numbers − complex fuzzy linear systems – analytical methods for solving linear systems.

1- مقدمة:

تلعب نظرية وحساب الجمل الخطية المرتبطة بالأعداد الضبابية دوراً مهماً في الرياضيات الضبابية، في العقود الماضية كان هناك اهتمام كبير في دراسة الرياضيات الضبابية وتطبيقاتها حيث تم تقديم تعريف الأعداد الضبابية والعمليات عليها لأول مرة من قبل زاده [1]،[2]،[3].

بالنسبة للجمل الخطية الضبابية، طور عدد قليل من الباحثين طرقاً لإيجاد حلول لها حيث تم دراستها كجمل ضبابية بمتغيرات ضبابية حقيقية وثوابت(الطرف الأيمن) وأمثال حقيقية. في هذا البحث سوف نوسع مجال الدراسة إلى جمل ضبابية بمتغيرات وثوابت ضبابية عقدية ونختبر قابلية حلها باستخدام طرائق تحليلية معروفة.

2- أهمية البحث:

تكمن أهمية البحث في إثبات قابلية حل هذا النوع من الجمل عند توسيع مجال دراسة المتغيرات والثوابت من مجموعة الاعداد الحقيقية إلى مجموعة الأعداد العقدية بطرائق تحليلية معروفة ليكون خطوة محفزة للدراسات المستقبلية في تطوير هذه الطرائق، إضافة الى تعميم هذا النوع بمتغيرات وثوابت وأمثال عقدية لتصبح جملة ضبابية عقدية كاملة.

3- مشكلة البحث:

قابلية حل هذا النوع من الجمل بحيث تكون المتغيرات والثوابت(الطرف الأيمن) أعداد ضبابية عقدية بطرائق تحليلية معروفة ودراسة مدى فعاليتها في إيجاد حلول هذه الجمل.

4- مواد البحث:

تعريف (1):

العدد الضبابي u بالصيغة البارامترية يمثل بزوج من الدوال المرتبة $(\underline{u_r}, \overline{u_r})$ التي تحقق ما يلي:

1. $\underline{u_r}$ دالة محدودة من اليسار ومستمرة وغير متناقصة على المجال $[0.1]$.
2. $\overline{u_r}$ دالة محدودة من اليمين ومستمرة وغير متزايدة على المجال $[0.1]$.
3. $\underline{u_r} \leq \overline{u_r} \qquad ; \quad 0 \leq r \leq 1$

العمليات على الأعداد الضبابية: [2]

1. الجمع:

$$u + v = \left(\underline{u_r} + \underline{v_r}, \overline{u_r} + \overline{v_r}\right)$$

2. الطرح:

$$u - v = \left(\underline{u_r} - \overline{v_r}\,, \overline{u_r} - \underline{v_r}\right)$$

3. الضرب بعدد: $\forall k \in R :$

$$k = \begin{cases} \left(k\underline{u_r}, k\overline{u_r}\right) & ; \quad k \geq 0 \\ \left(k\overline{u_r}\,, k\underline{u_r}\right) & ; \quad k < 0 \end{cases}$$

4. الضرب:

$$uv = ((\underline{uv_r}), (\overline{uv_r}))$$

5. القسمة:

$$\frac{u}{v} = \left(\underline{\left(\frac{u}{v}\right)_r}, \overline{\left(\frac{u}{v}\right)_r}\right)$$

تعريف (2):

الجملة الخطية الضبابية العقدية $n \times n$:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = y_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = y_2 \\ \quad\quad\quad\quad . \\ \quad\quad\quad\quad . \\ \quad\quad\quad\quad . \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = y_n \end{cases} \quad (1)$$

حيث أن مصفوفة الأمثال $1 \le i, j \le n \;\; ; \;\; A = (a_{ij})$ صارمة (ليست ضبابية)، و $y_i \; ; 1 \le i \le n$ أعداد ضبابية عقدية و $x_j \; ; 1 \le j \le n$ مجاهيل ضبابية عقدية.

الطريقة الأولى: **(Friedman's Proposal)**

فكرة هذه الطريقة هي استبدال مصفوفة الأمثال $A_{n\times n}$ بمصفوفة موسعة $S_{2n\times 2n}$

لحل الجملة (1) نفرض:

$$x_j = \left(\underline{x}_{jr}, \overline{x}_{jr}\right) = \left(\underline{e}_{jr} + i\underline{f}_{jr}, \overline{e}_{jr} + i\overline{f}_{jr}\right)$$

$$y_i = \left(\underline{y}_{ir}, \overline{y}_{ir}\right) = \left(\underline{d}_{ir} + i\underline{l}_{ir}, \overline{d}_{ir} + i\overline{l}_{ir}\right)$$

لدينا من الجملة (1) :

$$a_{i1}\left(\underline{x}_1, \overline{x}_1\right) + \cdots + a_{ii}\left(\underline{x}_i, \overline{x}_i\right) + \cdots + a_{in}\left(\underline{x}_n, \overline{x}_n\right) = \left(\underline{y}_{ir}, \overline{y}_{ir}\right)$$

وبالتالي يصبح لدينا:

$$\begin{cases} a_{i1}\underline{x}_1 + \cdots + a_{ii}\underline{x}_i + \cdots + a_{in}\underline{x}_n = \underline{y}_{ir} \\ a_{i1}\overline{x}_1 + \cdots + a_{ii}\overline{x}_i + \cdots + a_{in}\overline{x}_n = \overline{y}_{ir} \end{cases} \qquad (2)$$

$; 1 \le i \le n, 0 \le r \le 1$

الآن بتحويل الجملة الى الصيغة $2n \times 2n$ يصبح لدينا:

SX=Y (3)

حيث:

$$S_{ij} = S_{i+n,j+n} = a_{ij} \quad if\ a_{ij} \ge 0$$
$$S_{i,j+n} = S_{i+n,j} = -a_{ij} \quad if\ a_{ij} < 0$$

بينما قيم S_{ij} المتبقية تكون أصفار.

أي أن: $S = \begin{bmatrix} B & C \\ C & B \end{bmatrix}$

حيث أن B تحوي عناصر A الموجبة و C تحوي القيمة المطلقة لعناصر Aالسالبة

و: $A = B - C$

يمكننا الآن كتابة (3) بالشكل:

$$\begin{bmatrix} B & C \\ C & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{X} \\ -\overline{X} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{Y} \\ -\overline{Y} \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} B & C \\ C & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{e} \\ -\overline{e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{d} \\ -\overline{d} \end{bmatrix} \quad , \quad \begin{bmatrix} B & C \\ C & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{f} \\ -\overline{f} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{l} \\ -\overline{l} \end{bmatrix}$$

مثال(1):

لتكن لدينا الجملة الخطية 2×2 التالية:

$$\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 &= y_1 \\ 6x_1 + 3x_2 &= y_2 \end{aligned}$$

حيث أن:

$$x_j = \left(\underline{x}_{jr}, \overline{x}_{jr}\right) = (\underline{e}_{jr} + i\underline{f}_{jr}, \overline{e}_{jr} + i\overline{f}_{jr})$$

$$y_i = \left(\underline{y}_{ir}, \overline{y}_{ir}\right) = (\underline{d}_{ir} + i\underline{l}_{ir}, \overline{d}_{ir} + i\overline{l}_{ir})$$

فتكون الجملة 4×4 :

$$\begin{aligned} 2\underline{e}_1 \qquad\qquad\qquad\qquad + 3(-\overline{e}_2) &= \underline{d}_1 \\ 6\underline{e}_1 + 3\underline{e}_2 \qquad\qquad\qquad\qquad &= \underline{d}_2 \\ 3\underline{e}_2 + 2(-\overline{e}_1) \qquad\qquad &= -\overline{d}_1 \\ 6(-\overline{e}_1) + 3(-\overline{e}_2) &= -\overline{d}_2 \end{aligned}$$

و:

$$\begin{aligned} 2\underline{f}_1 \qquad\qquad\qquad\qquad + 3\left(-\overline{f}_2\right) &= \underline{l}_1 \\ 6\underline{f}_1 + 3\underline{f}_2 \qquad\qquad\qquad\qquad &= \underline{l}_2 \\ 3\underline{f}_2 + 2\left(-\overline{f}_1\right) \qquad\qquad &= -\overline{l}_1 \\ 6\left(-\overline{f}_1\right) + 3\left(-\overline{f}_2\right) &= -\overline{l}_2 \end{aligned}$$

ومنه:

$$S=\begin{bmatrix}2&0&0&3\\6&3&0&0\\0&3&2&0\\0&0&6&3\end{bmatrix}$$

نلاحظ أنه يمكن أن يكون للجملة حل وحيد إذا وفقط إذا كانت المصفوفة S غير شاذة، أما إذا كانت شاذة يمكن أن تكون الجملة مستحيلة الحل أو تملك عدد لانهائي من الحلول.

أما الشرط اللازم والكافي ليكون الحل الوحيد ضبابياً يتمثل في المبرهنة التالية:

مبرهنة(1): [4]
الحل الوحيد للمعادلة $X=S^{-1}Y$ يكون ضبابياً إذا وفقط إذا كانت عناصر S^{-1} غير سالبة.

مثال(2):

لتكن الجملة الضبابية 2×2 التالية:

$$\begin{aligned}2x_1+3x_2&=[(2+2r)+(1+r)i,(8-4r)+(2+r)i]\\5x_1-x_2&=[4r+(3+r)i,(6-2r)+(6-r)i]\end{aligned}$$

فتكون المصفوفة الموسعة:

$$S=\begin{bmatrix}2&3&0&0\\5&0&0&1\\0&0&2&3\\0&1&5&0\end{bmatrix}$$

فيكون الحل:

$$x_1 = \left\{ \frac{(80 + 164r) + (127 + 64r)i}{221}, \frac{(284 - 76r) + (263 - 38r)i}{221} \right\}$$

$$x_2 = \left\{ \frac{(94 + 62r) + (-11 + 31r)i}{221}, \frac{(400 - 244r) + (332 + 99r)i}{221} \right\}$$

نلاحظ أن $\underline{x}_1 \leq \overline{x}_1, \underline{x}_2 \leq \overline{x}_2$ حيث أن $\underline{x}_1, \underline{x}_2$ دوال متناقصة مرتبة وبالتالي فإن الحل x_1, x_2 هو حل ضبابي عقدي قوي، أما غير ذلك فيكون الحل ضعيف.

الطريقة الثانية: (S. Abbasbandy and M. Alavi Method)

إن هذه الطريقة فعالة لحل جملة معادلات خطية ضبابية $n \times n$ حيث يتم استبدال مصفوفة الأمثال بجملتين من الدوال الخطية والحل سوف يكون متناظر إذا كان الطرف الأيمن متناظر.

الآن سوف نوضح الطريقة من أجل جملة معادلات خطية ضبابية عقدية:

يمكن كتابة المعادلة i^{th} من الجملة (1) بالصيغة:

$$\sum_{a_{ij}\geq 0} a_{ij}\underline{e}_j + \sum_{a_{ij}<0} a_{ij}\overline{e}_j = \underline{d}_i \ , \sum_{a_{ij}\geq 0} a_{ij}\underline{f}_j + \sum_{a_{ij}<0} a_{ij}\overline{f}_j = \underline{l}_i$$

$$\sum_{a_{ij}\geq 0} a_{ij}\overline{e}_j + \sum_{a_{ij}<0} a_{ij}\underline{e}_j = \overline{d}_i \ , \sum_{a_{ij}\geq 0} a_{ij}\overline{f}_j + \sum_{a_{ij}<0} a_{ij}\underline{f}_j = \overline{l}_i$$

وبالتالي:

$$\sum_{a_{ij}\geq 0} a_{ij}(\overline{e}_j - \underline{e}_j) - \sum_{a_{ij}<0} a_{ij}(\overline{e}_j - \underline{e}_j) = \overline{d}_i - \underline{d}_i,$$
$$\sum_{a_{ij}\geq 0} a_{ij}(\overline{f}_j - \underline{f_j}) - \sum_{a_{ij}<0} a_{ij}(\overline{f}_j - \underline{f_j}) = \overline{l}_i - \underline{l}_i$$

بفرض أن:

$$w_j = \overline{e}_j - \underline{e}_j \quad , \quad v_i = \overline{d}_i - \underline{d}_i$$
$$m_j = \overline{f}_j - \underline{f_j} \quad , \quad u_i = \overline{l}_i - \underline{l}_i$$

يصبح لدينا:

$$\sum_{a_{ij}\geq 0} a_{ij}w_j - \sum_{a_{ij}<0} a_{ij}w_j = v_i,$$
$$\sum_{a_{ij}\geq 0} a_{ij}m_j - \sum_{a_{ij}<0} a_{ij}m_j = u_i$$

بلغة المصفوفات: $(B+C)W = V,\ (B+C)M = U$

حيث أن: $V = (v_1, v_2, \dots, v_n)^t$, $W = (w_1, w_2, \dots, w_n)^t$ و $A = B - C$

الآن ليكن: $Y^c = (y_1^c, y_2^c, \dots, y_n^c)$, $X^c = (x_1^c, x_2^c, \dots, x_n^c)$ حيث أن:

$$x_i^c = \frac{(\underline{x}_i + \overline{x}_i)}{2} \quad , \quad y_i^c = \frac{(\underline{y}_i + \overline{y}_i)}{2}; \quad 1 \leq i \leq n$$

مبرهنة(2): [5]

ليكن X حل ضبابي للجملة(1) حيث مصفوفة الأمثال A غير شاذة و Y أعداد ضبابية، عندئذ: $AX^c = Y^c$.

نتيجة مباشرة(1):

إذا كان Y في المبرهنة السابقة متناظر، عندئذ X متناظر.

نتيجة مباشرة(2):

لإيجاد حل الجملة(1)، يجب حل الجملة التالية:

$$\begin{cases}(B+C)W=V\\(B-C)X^c=Y^c\end{cases}$$

وبعد حلها يكفي أخذ:

$$\underline{x}_i=x_i^c-0.5w_i$$
$$\overline{x}_i=x_i^c+0.5w_i \quad ; \quad 1\le i\le n$$

من أجل جملة ضبابية عقدية يصبح لدينا:

$$\begin{cases}(B+C)W=V \quad , \quad (B+C)M=U\\(B-C)X^c=Y^c \quad , \quad (B-C)X^c=Y^c\end{cases}$$

وبعد حلها يكفي أخذ:

$$\underline{e}_i=e_i^c-0.5w_i \quad , \quad \underline{f}_i=f_i^c-0.5m_i$$
$$\overline{e}_i=e_i^c+0.5w_i \quad , \quad \overline{f}_i=f_i^c+0.5m_i \;;\; 1\le i\le n$$

مثال(3):

لتكن الجملة المتناظرة التالية:

$$x_1-x_2=\{2r+(1+r)i\,,(4-2r)+(6-r)i\}$$
$$x_1+2x_2=\{(6+3r)+(1+2r)i\,,(12-3r)+(9-2r)i\}$$

لدينا:

$$\begin{cases}\underline{e}_1-\overline{e}_2=2r \quad , \quad \underline{e}_1+2\underline{e}_2=6+3r\\\overline{e}_1-\underline{e}_2=4-2r \quad , \quad \overline{e}_1+2\overline{e}_2=12-3r\end{cases}$$

و:

$$\begin{cases}\underline{f_1}-\overline{f}_2=1+r \quad , \quad \underline{f_1}+2\underline{f_2}=1+2r\\ \overline{f}_1-\underline{f_2}=6-r \quad , \quad \overline{f}_1+2\overline{f}_2=9-2r\end{cases}$$

ومنه:

$$\begin{cases}(\overline{e}_1-\underline{e_1})+(\overline{e}_2-\underline{e_2})=4-4r\,,\left(\overline{f}_1-\underline{f_1}\right)+\left(\overline{f}_2-\underline{f_2}\right)=5-2r\\ (\overline{e}_1-\underline{e_1})+2(\overline{e}_2-\underline{e_2})=6-6r\,,\left(\overline{f}_1-\underline{f_1}\right)+2\left(\overline{f}_2-\underline{f_2}\right)=8-4r\end{cases}$$

والذي يكافئ:

$$\begin{cases}w_1+w_2=v_1 \quad , \qquad m_1+m_2=u_1\\ w_1+2w_2=v_1 \quad , \qquad m_1+2m_2=u_1\end{cases} \qquad (i)$$

أيضاً:

$$\begin{cases}e_1^c-e_2^c=2=d_1^c \;,\; f_1^c-f_2^c=\dfrac{7}{2}=l_1^c\\ e_1^c+2e_2^c=9=d_2^c \;,\; f_1^c+2f_2^c=5=l_2^c\end{cases} \qquad (ii)$$

بحل (i) و (ii) نجد أن:

$$w_1=2-2r\,,w_2=2-2r\,,m_1=2-4r\,,m_2=3+2r$$
$$e_1^c=\frac{13}{3}\,,e_2^c=\frac{7}{3},f_1^c=4\,,f_2^c=\frac{1}{2}$$

ومنه:

$$\underline{e_1}=\frac{13}{3}-\frac{1}{2}(2-2r) \quad , \quad \underline{f_1}=4-\frac{1}{2}(2-4r)$$
$$\overline{e}_1=\frac{13}{3}+\frac{1}{2}(2-2r) \quad , \quad \overline{f}_1=4+\frac{1}{2}(2-4r)$$

$$\underline{e}_2 = \frac{7}{3} - \frac{1}{2}(2-2r) \quad , \quad \underline{f}_2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(3+2r)$$
$$\overline{e}_2 = \frac{7}{3} + \frac{1}{2}(2-2r) \quad , \quad \overline{f}_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(3+2r)$$

أي أن:

$$x_1 = \left\{\left[\frac{13}{3} - \frac{1}{2}(2-2r)\right] + \left[4 - \frac{1}{2}(2-4r)\right]i, \left[\frac{13}{3} + \frac{1}{2}(2-2r)\right] + \left[4 + \frac{1}{2}(2-4r)\right]i\right\}$$

$$x_2 = \left\{\left[\frac{7}{3} - \frac{1}{2}(2-2r)\right] + \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2}(3+2r)\right]i, \left[\frac{7}{3} + \frac{1}{2}(2-2r)\right] + \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2}(3+2r)\right]i\right\}$$

نلاحظ أن: $\underline{x}_1 \le \overline{x}_1, \underline{x}_2 \le \overline{x}_2$ و $\underline{x}_1, \underline{x}_2$ دوال غير متناقصة مرتبة و $\overline{x}_1, \overline{x}_2$ دوال غير متزايدة مرتبة. وبالتالي الحل x_1, x_2 هو حل ضبابي عقدي قوي.

الطريقة الثالثة: مقاربة حسابية (Algorithmic Approach)

في هذه الطريقة سوف يتم تصغير الجملة الأساسية الى جملتين خطيتين والتي يمكن حلها كل منها بهذه الطريقة.

هذه الطريقة فعالة للجمل المتناظرة وغير المتناظرة، وأيضاً سوف نبين أنها مناسبة لحل جمل المعادلات الخطية الضبابية العقدية عندما يكون عدد المتغيرات كبير.

لتكن المعادلة i^{th} من الجملة (1):

$$a_{i1}(\underline{x}_1, \overline{x}_1) + \cdots + a_{ii}(\underline{x}_i, \overline{x}_i) + \cdots + a_{in}(\underline{x}_n, \overline{x}_n) = (\underline{y}_i, \overline{y}_i)$$

ومن أجل جملة ضبابية عقدية يصبح لدينا:

$$a_{i1}(\underline{e}_1, \overline{e}_1) + \cdots + a_{ii}(\underline{e}_i, \overline{x}_i) + \cdots + a_{in}(\underline{e}_n, \overline{x}_n) = (\underline{d}_i, \overline{d}_i)$$

$$a_{i1}(\underline{f}_1, \overline{f}_1) + \cdots + a_{ii}(\underline{f}_i, \overline{f}_i) + \cdots + a_{in}(\underline{f}_n, \overline{f}_n) = (\underline{l}_i, \overline{l}_i)$$

ومنه:

$$a_{i1}\underline{e}_1+\cdots+a_{ii}\underline{e}_i+\cdots+a_{in}\underline{e}_n=\underline{d}_i$$

$$a_{i1}\underline{f}_1+\cdots+a_{ii}\underline{f}_i+\cdots+a_{in}\underline{f}_n=\underline{l}_i$$

$$a_{i1}\overline{e}_1+\cdots+a_{ii}\overline{e}_i+\cdots+a_{in}\overline{e}_n=\overline{d}_i$$

$$a_{i1}\overline{f}_1+\cdots+a_{ii}\overline{f}_i+\cdots+a_{in}\overline{f}_n=\overline{l}_i$$

الآن لدينا جملتين خطيتين ضبابيتين من المرتبة $n\times n$:

$$\mathrm{A}\underline{\mathrm{X}}=\underline{\mathrm{y}}\,,\mathrm{A}\overline{\mathrm{X}}=\overline{\mathrm{Y}}$$

ومن أجل جملة ضبابية عقدية تصبح:

$$\mathrm{A}\underline{\mathrm{E}}=\underline{\mathrm{D}}\quad,\quad\mathrm{A}\overline{\mathrm{E}}=\overline{\mathrm{D}}$$
$$\mathrm{A}\underline{\mathrm{F}}=\underline{\mathrm{L}}\quad,\quad\mathrm{A}\overline{\mathrm{F}}=\overline{\mathrm{L}}$$

الآن يمكننا توسيع الجمل بحيث أن:

$$\begin{cases}\mathrm{A}\underline{\mathrm{E}^0}=\underline{\mathrm{D}^0}\;,\;\mathrm{A}\overline{\mathrm{E}^0}=\overline{\mathrm{D}^0}\\ \mathrm{A}\underline{\mathrm{F}^0}=\underline{\mathrm{L}^0}\;,\;\mathrm{A}\overline{\mathrm{F}^0}=\overline{\mathrm{L}^0}\end{cases}\quad\text{و}\quad\begin{cases}\mathrm{A}\underline{\mathrm{E}^1}=\underline{\mathrm{D}^1}\;,\;\mathrm{A}\overline{\mathrm{E}^1}=\overline{\mathrm{D}^1}\\ \mathrm{A}\underline{\mathrm{F}^1}=\underline{\mathrm{L}^1}\;,\;\mathrm{A}\overline{\mathrm{F}^1}=\overline{\mathrm{L}^1}\end{cases}$$

وذلك باستبدال r=1 و r=0 .

ملاحظة:[6]

إذا كان $a_{ij}<0$ ، عندئذٍ يمكن المتابعة بهذه الطريقة بعد استبدال $\overline{x}_i$ ب $2x^c-\underline{x}_i$ في $\mathrm{A}\underline{\mathrm{X}}=\underline{\mathrm{y}}$ و $\underline{x}_i$ ب $2x^c-\overline{x}_i$ في $\mathrm{A}\overline{\mathrm{X}}=\overline{\mathrm{Y}}$.

فرضية(1): [6]

ليكن $(\underline{x^0},\overline{x^0})$ و $\left(\underline{x^1},\overline{x^1}\right)$ حل صارم حرج عند r=0 , r=1 على الترتيب. عندئذٍ يمكن حل الجملة الضبابية(1) باستخدام الحل الحرج:

$$\underline{x}_i=\left(\underline{x}_i^1-\underline{x}_i^0\right)r+\underline{x}_i^0\,,\overline{x}_i=\left(\overline{x}_i^1-\overline{x}_i^0\right)r+\overline{x}_i^0\quad;n=1,2,\dots,n$$

مثال (4): لتكن الجملة الضبابية العقدية التالية:

$$x_1 - x_2 = \{2r + (1 + r)i, (4 - 2r) + (6 - r)i\}$$
$$x_2 + 2x_2 = \{(6 + 3r) + (1 + 2r)i, (12 - 3r) + (9 - 2r)i\}$$

لدينا:

$$SX = Y \Rightarrow SE = D, SF = L$$

حيث أن:

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}, E = \begin{bmatrix} \underline{e}_1 \\ \underline{e}_2 \\ -\overline{e}_1 \\ -\overline{e}_2 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 2r \\ 6 + 3r \\ 2r - 4 \\ 3r - 12 \end{bmatrix},$$

$$F = \begin{bmatrix} \underline{f}_1 \\ \underline{f}_2 \\ -\overline{f}_1 \\ -\overline{f}_2 \end{bmatrix}, L = \begin{bmatrix} 1 + r \\ 1 + 2r \\ r - 6 \\ 2r - 9 \end{bmatrix}$$

باستبدال كل r ب 0 :

$$SE^0 = D^0, SF^0 = L^0$$

$$E^0 = \begin{bmatrix} \underline{e}_1^0 \\ \underline{e}_2^0 \\ -\overline{e}_1^0 \\ -e_2^0 \end{bmatrix}, D^0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \\ -4 \\ -12 \end{bmatrix}, F^0 = \begin{bmatrix} \underline{f}_1^0 \\ \underline{f}_2^0 \\ -\overline{f}_1^0 \\ -\overline{f}_2^0 \end{bmatrix}, L^0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -6 \\ -9 \end{bmatrix}$$

$$S^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{4}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{-2}{3}\\ \frac{-2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{1}{3}\\ \frac{2}{3} & \frac{-2}{3} & \frac{4}{3} & \frac{-1}{3}\\ \frac{-1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{-2}{3} & \frac{2}{3}\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \underline{e}_1^0=\frac{10}{3}\,,\overline{e}_1^0=\frac{16}{3},\underline{e}_2^0=\frac{4}{3},\overline{e}_2^0=\frac{10}{3}\ ,$$
$$\underline{f}_1^0=3\,,\overline{f}_1^0=5,\underline{f}_2^0=-1,\overline{f}_2^0=-2$$

$$\Rightarrow \underline{x}_1^0=\frac{10}{3}+3i,\overline{x}_1^0=\frac{16}{3}+5i\ ,\ \ \underline{x}_2^0=\frac{4}{3}-i,\overline{x}_2^0=\frac{10}{3}-2i$$

ومن أجل r=1 بطريقة مماثلة نحصل على:

$$\underline{x}_1^1=\frac{13}{3}+3i,\overline{x}_1^1=\frac{13}{3}+5i\quad ,\quad \underline{x}_2^1=\frac{7}{3}-0i,\overline{x}_2^1=\frac{7}{3}+i$$

فيكون الحل حسب الفرضية(1):

$$\underline{x}_1=r+\frac{10}{3}+3i\,,\overline{x}_1=-r+\frac{16}{3}+5i$$
$$\underline{x}_2=r+\frac{4}{3}+(r-1)i\,,\overline{x}_2=\frac{10}{3}-r-(2+r)i$$

الخلاصة:

من خلال هذا البحث تمكنا من إثبات قابلية حل جمل معادلات خطية بمتغيرات وثوابت عقدية باستخدام طرائق تحليلية معروفة، لاحظنا مدى فعالية طريقة فريدمان في الحل حيث تم استبدال مصفوفة الأمثال بمصفوفة موسعة.

أما في طريقة سعيد بندي وماجد علوي تم استبدال مصفوفة الأمثال بجملتين من الدوال الخطية وكان شرط أن يكون الحل متناظر، أن يكون الطرف الأيمن متناظر.

في المقاربة الحسابية تم تصغير الجملة الأساسية الى جملتين خطيتين والتي يمكن حلها كل منها بهذه الطريقة.

وجدنا أنهذه الطريقة فعالة للجمل المتناظرة وغير المتناظرة، وأيضاً أنها مناسبة لحل جمل المعادلات الخطية الضبابية العقدية عندما يكون عدد المتغيرات كبير.

قائمة المراجع: References

[1]- L. A. Zadeh,1965- Fuzzy sets. Information and Control, vol. 8, no. 3, pp. 338–353.

[2]-D. Dubois and H. Prade,1978- Operations on fuzzy numbers. International Journal of Systems Science, vol. 9, no. 6, pp. 613–626.

[3]-S. Nahmias,1978-Fuzzy variables. Fuzzy Sets and Systems, vol. 1, no. 2, pp. 97–110.

[4]-M. Friedman, M. Ming and A. Kandel,1998-Fuzzy linear systems. Fuzzy Sets and Systems, vol.96, pp 201-209.

[5]-S. Abbasbandy and M. Alavi,2005- A method for solving fuzzy linear systems. Iranian journal of Fuzzy systems, vol.2, pp. 37-43.

[6]-P. Senthilkumar and G. Rajendran,2011- An algorithmic approach to solve fuzzy linear systems. Journal of Information & Computational Science, vol. 8: 3, pp. 503–510.