

## تطابقات الامتصاص

طالب الدراسات العليا : بشرى جاد الله<sup>2</sup>

كلية: العلوم – جامعة: دمشق

الدكتور المشرف: شوقي الراشد<sup>1</sup>

### ملخص:

نقوم في هذه الورقة بنقل مفهوم الـ  $n$ -امتصاص (وبشكل خاص ثنائية الامتصاص) إلى تطابقات أنصاف الحلقات، حيث نُعرِّف التَّطابق ثنائي الامتصاص وتعميمه ( $n$ -تطابق امتصاص) ونُعرِّف التَّطابق ثنائي الامتصاص الإبتدائي في نصف الحلقة، وندرس بعض القضايا المُتعلِّقة بتلك المفاهيم.

الكلمات المفتاحية: أنصاف الحلقات، التَّطابقات، المثالي ثنائي الامتصاص.

<sup>1</sup> أستاذ مساعد قسم الرياضيات جامعة دمشق.

<sup>2</sup> طالبة دراسات عليا جامعة دمشق.

# Absorbing Congruences

Shwki Al-Rashed

Bushra Jad Ala

## Abstract:

In this paper we convey a concept of  $n$ -absorbing (particularly  $2$ -absorbing) to semiring congruences. We define  $2$ -absorbing congruence and its Generalization ( $n$ -absorbing congruence), we define Primary  $2$ -absorbing congruence. Then we study some issues related to these concepts.

Key Words: Semirings, Congruences, Absorbing Ideals.

## 1. مُقَدِّمَةٌ:

تلعب التَّطابِقَاتُ دوراً هاماً في أنصاف الحلقات بشكل عام وفي نصف الحلقة المدارية بشكل خاص، لا يوجد تقابل بين المثاليَّات والتَّطابِقَاتُ كما في نظرية الحلقات، ويتناسب مفهوم التَّطابِقَاتُ مع أنصاف الحلقات بشكل أفضل من المثاليَّات (تتحدَّد بنية حلقة خارج القسمة بواسطة المثاليَّات، وهذا غير ممكن في أنصاف الحلقات، وفقاً للعلاقة التَّالِيَّة:  $[a + I = b + I \Leftrightarrow a - b \in I]$  حيثُ  $a, b$  عناصر من الحلقة، و  $I$  مثالي. المُشكلة في أنصاف الحلقات هي عدم وجود العنصر  $-b$  بالضرورة).

فقد تمَّ تعريف الطيف الأوَّلي لأنصاف الحلقات من خلال علاقات التَّطابق وذلك لكون المثاليَّات لا تحتفظ بدورها المُميِّز في أنصاف الحلقات. في عام 2016 قامت Kalina mincheva بتعريف التَّطابق الأوَّلي وتحديد بُعد krull بشكل مشابه لنظرية الحلقات "هو طول أطول سلسلة من التَّطابِقَاتُ الأوَّلية في الجداء الديكارتي لنصف الحلقة  $R \times R$ " ([1], p.18). أيضاً قامت بتعريف جذر التَّطابق بأنَّه "تقاطع جميع التَّطابِقَاتُ الأوَّلية التي تحوي التَّطابق" ([1], p.22)، وذلك بهدف دراسة أصفار هلبيرت لكثيرات الحُدود المدارية. ولإثبات عدم وجود تقابل بين التَّطابِقَاتُ والمثاليَّات في أنصاف الحلقات كما هو الحال في الحلقات، قامت بتعريف القوى المُعمَّمة لعناصر تطابق وإعطاء صيغة جبرية من خلالها لجذر التَّطابق.

في عام 2007 قام العالم Badwi بصياغة تعميم للمثالي الأولي في الحلقات التبدليّة [4] ، وذلك نظراً لأهميته، ويدعى (2 – absorbing ideal) المثالي ثنائي الامتصاص. حيثُ يكون المثالي الفعلي  $I$  ثنائي امتصاص إذا وفقط إذا حقّق الشرط: من أجل  $a, b, c \in R$  إذا كان  $abc \in I$  فإمّا  $ab \in I$  أو  $ac \in I$  أو  $bc \in I$ . في عام 2011 قام Darni و Soheilnia بتقديم مفهوم المودول الجُرئي ثنائي الامتصاص، أيضاً في عام 2012 قام Tayprakash Ninu chaudhari بتعريف مماثل للمثالي ثنائي الامتصاص في أنصاف الحلقات، وفي عام 2013 قام Darni و Puczyłowski بتعريف نصف الزمرة ثنائية الامتصاص، و في 2016 قام كلاً من Hatic Çay ، Hojjat Mostafanasab و Gulsen ulucak بتعريف المثاليّات ثنائية الامتصاص في أنصاف الزمر التبدليّة.

ونظراً لأهمية التّطابقات والدور الهام الذي تلعبه في الهندسة المداريّة، قمنا بنقل مفهوم ثنائية الامتصاص وتعميمه  $n$ -امتصاص إلى التّطابقات بهدف دراسة خواص جبريّة إضافية للتّطابقات.

**2. هدف البحث:** نقوم في هذا البحث بدراسة تعميم مفهوم التّطابق الأولي، وهو مفهوم الـ  $n$ -امتصاص (والحالة الخاصّة منه ثنائية الامتصاص) وإثبات بعض القضايا المتعلّقة به. كما نهدف إلى إثبات أنّ تطابق نصف الحلقة المداريّة  $\Omega(\mathbb{T}^n)$  هو تطابق ثنائي الامتصاص.

### 3. تعريف ومُبرهنات:

1.3 نصف الحلقة ([8], p.12) ([3], p.4) ([2], p.4) ([1], p.14): تدعى الثلاثية

$(R, +, \cdot)$ ، حيثُ  $+$  جمع و  $\cdot$  ضرب، نصف حلقة إذا تحققت الشروط الآتية:

(1) الثنائية  $(R, +)$  هي مونويد تبديلي (الصفر 0 هو عنصر حيادي).

(2) الثنائية  $(R, \cdot)$  هي مونويد (الواحد 1 هو عنصر حيادي).

(3) الضرب توزيعي على الجمع.

(4) العنصر الحيادي الجمعي ماص  $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$  من أجل  $a \in R$ .

إذا كانت  $R$  نصف حلقة بحيث  $(R, \cdot)$  تبديلية، عندئذ يُقال عن  $R$  إنها تبديلية. وإذا

كانت  $R$  نصف حلقة بحيث يوجد لكل عنصر غير صفري في  $R$  معاكس ضربي،

عندئذ فإن  $R$  تُدعى نصف حقل. في هذه الحالة تكون الثنائية  $(R \setminus \{0\}, \cdot)$  هي زمرة.

إحدى أهم أنصاف الحلقات هي نصف الحلقة المدارية، المُعرّفة بالشكل الآتي:

2.3 تعريف ([8], p.14) ([2], p.5) ([1], p.15): يُقال عن  $(R, \oplus, \odot, -\infty, 0)$

بأنها نصف حلقة مدارية إذا حقت الشروط الآتية:

(1)  $(R, \oplus, -\infty)$  نصف زمرة مدارية.

(2)  $(R, \odot)$  نصف زمرة.

(3)  $a \odot b = b \odot a$

(4)  $a \odot (b \oplus c) = a \odot b \oplus a \odot c$

$$.a \odot 0 = a \quad (5)$$

$$.a \odot -\infty = -\infty \quad (6)$$

يُدعى العنصر  $-\infty$  العنصر الصفري لـ  $R$  ، و  $0$  العنصر الواحدي لـ  $R$ . ويُعطى جمع عنصرين بالشكل  $(x \oplus y = \max\{x, y\})$ ، كما يُعطى جداء عنصرين بالشكل  $(x \odot y = x + y)$ . حيثُ تُعرَّف نصف الزمرة  $(M, \oplus)$  بأنّها مجموعة غير خالية  $M$  مُعرَّف عليها العملية التجميعية  $\oplus$ .

ويُقال عن  $(M, \oplus, -\infty)$  بأنّها نصف زمرة مداريّة إذا حَقَّت الشروط الآتية:

$$(M, \oplus) \text{ نصف زمرة.} \quad (1)$$

$$.v \oplus w = w \oplus v \quad (2)$$

$$.v \oplus -\infty = v \quad (3)$$

$$v \oplus v = v \quad (4)$$

بفرض لدينا  $\mathbb{T} = (\mathbb{R} \cup \{-\infty\}, \oplus, \odot)$  نصف حلقة مداريّة حقيقيّة، تكون المجموعة الأساسيّة لها  $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ . ويُعطى جمع عنصرين بالشكل  $(x \oplus y = \max\{x, y\})$  بالترتيب المُعتاد للأعداد الحقيقيّة، العنصر الأصغر هو  $-\infty$ . كما يُعطى جداء عنصرين بالشكل  $(x \odot y = x + y)$  حيثُ  $+$  هو الجمع المُعتاد للأعداد الحقيقيّة

$$\text{وينحَقُّ: } [(-\infty) \odot a = a \odot (-\infty) = -\infty \quad \forall a \in \mathbb{R}_{\max}]$$

وهي تشكّل نصف حقل. كما أنّ كلاً من  $\mathbb{Q}_{\max}$  و  $\mathbb{Z}_{\max}$  هي أنصاف حقول جزئيّة من  $\mathbb{R}_{\max}$  وتملك المجموعات الأساسيّة  $\mathbb{Q} \cup \{-\infty\}$  و  $\mathbb{Z} \cup \{-\infty\}$  على الترتيب.

وبشكل مُناظر يُمكن أن تكون المجموعة الأساسية لـ  $\mathbb{T}$  هي  $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ . ويُعطى جمع

عنصرين بالشكل  $(x \oplus y = \min\{x, y\})$  بالترتيب المُعتاد للأعداد الحقيقية، العنصر

الأكبر هو  $\infty$ . ويفرض  $\mathbb{B}$  نصف الحقل البوليني  $\mathbb{B} = \{0, 1\}$  فإن  $\mathbb{B} =$

$\mathbb{T}$  بالنسبة لـ  $\max$  و  $\mathbb{T} = \{0, \infty\}$  بالنسبة لـ  $\min$ .

3.3 تعريف ([8], p.14) ([2], p.4) ([1], p.15): إذا كانت الثنائية  $(R, +, \cdot)$

نصف حلقة تبديلية و  $S \subset R$ . يُقال عن  $S$  إنَّها نصف حلقة جزئية من  $R$

(Subsemiring) إذا تحقَّق أنَّ:

$$1, 0 \in S, \quad a + b, a \cdot b \in S$$

4.3 تعريف ([8], p.19) ([2], p.5) ([1], p.16): بفرض لدينا  $R_1, R_2$  أنصاف

حلقات. يُدعى التطبيق  $f: R_1 \rightarrow R_2$  (Semiring homomorphism) تشاكل

نصف حلقي إذا تحقَّق مايلي:

$$1)- f(a + b) = f(a) + f(b)$$

$$2)- f(a \cdot b) = f(a) \cdot f(b)$$

$$3)- f(0_{R_1}) = 0_{R_2}$$

$$4)- f(1_{R_1}) = 1_{R_2}$$

وذلك أيًّا كان  $a, b \in R_1$ .

مثال: إنَّ التَّطبيق الآتي هو تشاكل نصف حلقي:

$$f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{B}$$

$$a \mapsto \begin{cases} 1 & \text{if } a \neq -\infty \\ 0 & \text{if } a = -\infty \end{cases}$$

أيضاً لدينا التَّطبيق الآتي تشاكل نصف حلقي:

$$g: \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{T} \quad ; \quad (g(0) = -\infty, g(1) = 0)$$

5.3 تعريف ([8], p.22) ([2], p.86) ([1], p.15): بفرض  $(R, +, \cdot)$  نصف حلقة

تبدليّة واحدية. يُعرّف التّطابق  $\Omega$  لنصف الحلقة  $R$  بأنّه مجموعة جزئية من الجداء الديكارتي  $R \times R$  تُحقّق الشروط الآتية:

- 1)-  $(a, a) \in \Omega$ , for  $a \in R$
- 2)-  $(a, b) \in \Omega$ , if and only if  $(b, a) \in \Omega$
- 3)- if  $(a, b) \in \Omega$ , and  $(b, c) \in \Omega$  then  $(a, c) \in \Omega$
- 4)- if  $(a, b) \in \Omega$ , and  $(c, d) \in \Omega$  then  $(a + c, b + d) \in \Omega$
- 5)- if  $(a, b) \in \Omega$ , and  $(c, d) \in \Omega$  then  $(a \cdot c, b \cdot d) \in \Omega$

حيثُ يكون التّطابق الأصغر الوحيد هو القطر لـ  $R \times R$  والذي يُرمز له بـ  $\Delta$ ، ويُدعى التّطابق التّافه (وهو يُقابل المثالي الصفري).  $R \times R$  هو تطابق غير فعلي، أمّا التّطابقات المتبقية فنُدعى فعليّة. إذا كان  $I$  مثالي فإتّنا نرّمز إلى التّطابق المولّد بالأزواج  $(a, 0)$  من أجل كل  $a \in I$  بـ  $\Omega_I$ .

يُرمز لنصف حلقة القسمة لـ  $R$  على التّطابق  $\Omega$  بـ  $R/\Omega$ . ونعلم في الجبر التّبادلي أنّه من أجل المثالي  $I$  يكون  $R/I = R/\Omega_I$ .

6.3 تعريف ([1], p.16): تُعرّف نواة التّطابق بأنّها صف التّكافؤ للعنصر الصفري.

أي من أجل التّطابق  $\Omega \subseteq R \times R$  لدينا:

$$\text{Ker}(\Omega) = \{a \in R \mid (a, 0) \in \Omega\}$$

نواة التّطابق دوماً مثالي. ويُقال عن نواة تطابق بأنّها تافهة إذا كانت مساوية للمجموعة الصفرية  $\{0\}$ .

في نصف الحلقة الجامدة لدينا:

$$(a + b, 0) \in \Omega \implies (a, 0) \in \Omega$$

ومنه أيّاً كان  $(a + b) \in Ker(\Omega)$  فإنّ  $a \in Ker(\Omega)$  و  $b \in Ker(\Omega)$ ، وتُدعى المثاليّات التي تُحقّق هذه الخاصّة (Saturated).

7.3 تعريف ([1], p.16): إذا كان  $\varphi: R_1 \rightarrow R_2$  شعاع بين أنصاف الحلقات

$R_1, R_2$ ، و  $\Omega$  هو تطابق لـ  $R_2$ ، الصورة العكسية لـ  $\Omega$  هي التّطابق:

$$\varphi^{-1}(\Omega) = \{(\alpha_1, \alpha_2) \in R_1 \times R_1 \mid (\varphi(\alpha_1), \varphi(\alpha_2)) \in \Omega\}$$

8.3 تعريف ([1], p.16): نقصد بنواة شعاع الصورة العكسية للتّطابق التّافه

$$Ker(\varphi) \text{ ونرمز لها بـ } \Delta$$

9.3 تعريف ([1], p.16): نقصد بـ (IB\_algebra) نصف حلقة تبديليّة جامدة جمعياً

أي  $(a + a = a, \forall a)$  وسنرمز بـ  $A$  لـ (IB\_algebra) اختياري. نلاحظ أنّ الجمع الجامد يُعرّف ترتيب كمايلي:

$$a \geq b \iff a + b = a ; a \oplus b = \sup\{a, b\} , \text{ or } a \oplus b = \inf\{a, b\}$$

تُدعى عناصر  $A \times A$  أزواج، والإحداثيات للزوج  $\alpha$  هي  $(\alpha_1, \alpha_2)$ .

10.3 تعريف ([3], p.8) ([2], p.91) ([1], p.17): يُعرّف الجداء المُتشابك

(الملفوف) للأزواج  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$  و  $\beta = (\beta_1, \beta_2)$  بالشكل الآتي:

$$\beta\alpha = (\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2, \alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1)$$

نلاحظ أنه تجميعي، وأن مجموعة الأزواج تُشكل مونويد بالنسبة لهذه العملية (العنصر الحيادي هو الزوج  $(1,0)$ ).

يُرمز للقوة  $n - th$  لـ  $\alpha$  وفق الجداء المُتشابك بـ  $\alpha^n$ . كما يُرمز للزوج  $(1,0)$  بـ  $\alpha^0$ . ويُعرّف جداء عنصر  $a$  بزوج  $(\alpha_1, \alpha_2)$  بالشكل  $a(\alpha_1, \alpha_2) = (a\alpha_1, a\alpha_2)$  وهو الجداء المُتشابك لـ  $(a, 0)(\alpha_1, \alpha_2)$ .

11.3 تعريف ([1], p.17): يُعرّف جداء تطابقين  $\Omega, \Omega_1 \subseteq A \times A$  بأنه التّطابق المولّد بالمجموعة

$$\{\beta\alpha \mid \alpha \in \Omega, \beta \in \Omega_1\}$$

12.3 تعريف ([1], p.18): من أجل الحلقات التبدليّة، يكون المثالي أوّلي إذا فقط إذا كان التّطابق المُقابل لايحوي جداءات مُتشابكة لأزواج تتوضّع خارج التّطابق. أي بفرض  $P$  مثالي لحلقة تبدليّة و  $\Omega_P$  تطابق بالنّواة  $P$  عندئذٍ فإنّ  $P$  أوّلي إذا فقط إذا تحقّق مايلي:

إذا كان  $\beta\alpha \in \Omega_P$  فإنّه إمّا  $\alpha \in \Omega_P$  أو  $\beta \in \Omega_P$ . ويُمكن التحقق من ذلك

بالشّكل:

$$\begin{aligned} \beta\alpha \in \Omega_P &\Leftrightarrow ((\alpha_1 - \alpha_2)(\beta_1 - \beta_2), 0) \in \Omega_P \\ &\Leftrightarrow (\alpha_1 - \alpha_2)(\beta_1 - \beta_2) \in P \end{aligned}$$

13.3 تعريف ([3], p.5) ([1], p.18): يُقال عن التَّطابق  $\Omega$  لـ  $(\mathbb{B\_algebra}) A$  بأنه أولي (Prime Congruences) إذا كان فعلي وتحقق مايلي:  
 إذا كان  $\beta\alpha \in \Omega$ ، عندئذٍ  $\alpha \in \Omega$  أو  $\beta \in \Omega$  وذلك من أجل  $\alpha, \beta \in A \times A$ .  
 وندعو  $(\mathbb{B\_algebra})$  منطقة إذا كان التَّطابق التَّافه له أولي.

مثال: بفرض لدينا  $\mathbb{B}[x]$  مُرتَّبة كلياً وفقاً لدرجات  $x$  (بالنسبة لـ  $\max$ ) وذلك كون الجمع يُعطي ترتيب كلي). وبفرض لدينا  $\beta = (\beta_1, \beta_2)$  و  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ ، بفرض  
 أن  $\beta_1 \geq \beta_2$  و  $\alpha_1 \geq \alpha_2$  و  $\alpha_1\beta_2 \geq \alpha_2\beta_1$  عندئذٍ:

$$\beta\alpha = (\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2, \alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1) = (\alpha_1\beta_1, \alpha_1\beta_2) \in \Delta$$

إذا كان  $\beta \notin \Delta$  عندئذٍ فإن  $\alpha_1 = 0$  (وذلك حيث  $\mathbb{B}[x]$  تُحقق الشرط التالي: إذا كان  
 $ab = ac$  فإمّا  $a = 0$  أو  $b = c$  ((Cancellative)) ومنه  $\alpha_2 = 0$  و  $\alpha \in \Delta$   
 ومنه  $\mathbb{B}[x]$  هي منطقة.

14.3 تعريف ([1], p.23): بفرض  $I$  مثالي في الحلقة  $R$  جذره  $Rad(I)$ ، وبفرض  
 $\Omega_I$  و  $\Omega_{Rad(I)}$  هي التَّطابقات المُقابلة (حيث  $I$  و  $Rad(I)$  هي النواة لكل منهما على  
 التَّرتيب). عندئذٍ لدينا:

$$(a, b) \in \Omega_{Rad(I)} \Leftrightarrow (a, b)^n \in \Omega_I \text{ for a large enough } n$$

$$(a, b)^n \in \Omega_I \Leftrightarrow ((a - b)^n, 0) \in \Omega_I \quad \text{وذلك وفقاً لـ:}$$

حيث  $(a, b)^n$  ترمز إلى القوة  $n - th$  بالنسبة للجاء المُتشابك.

أمّا بالنسبة لأنصاف الحلقات فإنَّ الأمر معقد أكثر، كما هو موضَّح فيمايلي.

15.3 تعريف ([3], p.10) ([1], p.22): بفرض  $\Omega$  تطابق لـ  $A$  يُعرّف جذر  $\Omega$  ويُرْمز له بـ  $Rad(\Omega)$ ، بأنه تقاطع جميع التّطابقات الأُوليّة التي تحوي  $\Omega$ . يُدعى  $\Omega$  بالتّطابق الجذري إذا تحقّق أنّ  $Rad(\Omega) = \Omega$  وهو يُعطى بالصّيغة الآتية:

$$Rad(\Omega) = \{ \alpha \mid GP(\alpha) \cap \Omega \neq \emptyset \}$$

حيثُ:

$$GP(\alpha) = (\alpha^{*k} + (c, 0)) \alpha^l; \alpha^* = (\alpha_1 + \alpha_2, 0), ((\beta\alpha)^* = \alpha^* \beta^*)$$

where  $k, l$  are non – negative integers, and  $c \in A$

هي مجموعة القوى المُعمّمة للزوج  $\alpha$ .

ومنه  $Rad(\Delta) = \{ \alpha \mid GP(\alpha) \cap \Delta \neq \emptyset \}$  وهي مجموعة الأزواج عديمة القوى

Nilpotent. حيثُ يكون الزوج  $\alpha$  عديم القوى إذا تحقّق أنّ  $GP(\alpha) \cap \Delta \neq \emptyset$

16.3 تعريف ([1], p.27): يُدعى التّطابق لـ  $A$  ابتدائي إذا تحقّق الشرط الآتي:

$$\{ \alpha \mid \exists \beta \notin \Omega : \alpha\beta \in \Omega \} \subseteq Rad(\Omega)$$

17.3 مُبرهنة ([1], p.27): إنّ جذر التّطابق الابتدائي هو تطابق أولي.

نورد فيما يلي من خلال المُبرهنة الآتية بعض الخواص الجبريّة لتطابقات أنصاف

الحلقات:

18.3 مُبرهنة ([2], p.87, p.94): بفرض  $R$  نصف حلقة تبديليّة، وبفرض

$\Omega, \Omega_1 \subseteq R \times R$  تطابقات لنصف الحلقة  $R$ . عندئذٍ تتحقّق القضايا الآتية:

1- إن  $\Omega \cap \Omega_1$  هو تطابق. ومنه فإن تقاطع أسرة من التتابقات لنصف حلقة تبديلية هو أيضاً تطابق.

2- من أجل الزوج  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \in \Omega$  والزوج الإختياري  $\beta = (\beta_1, \beta_2)$  يتحقق مايلي:  $\beta\alpha \in \Omega$ ، ومنه  $\Omega \subseteq \Omega\Omega_1$ .

#### 4. تطابقات الامتصاص: (Absorbing Congruence)

1.4 تعريف التتابق ثنائي الامتصاص: نقول عن التتابق  $\Omega$  لـ  $(\mathbb{B}_algebra) A$  بأنه ثنائي الامتصاص إذا كان فعلي وتحقق مايلي:

إذا كان  $\gamma\beta\alpha \in \Omega$  فإنه إما  $\alpha\beta \in \Omega$  أو  $\beta\gamma \in \Omega$  أو  $\alpha\gamma \in \Omega$ ، من أجل كل  $\alpha, \beta, \gamma \in A \times A$ .

وبحيث يكون  $\gamma\beta\alpha$  هو الجداء المتشابه للأزواج الثلاث  $\alpha, \beta, \gamma$ :

$$\begin{aligned} \gamma\beta\alpha &= (\alpha_1, \alpha_2)(\beta_1, \beta_2)(\gamma_1, \gamma_2) \\ &= (\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2, \alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1)(\gamma_1, \gamma_2) \\ &= ((\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2)\gamma_1 + (\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1)\gamma_2, (\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2)\gamma_2 + (\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1)\gamma_1) \\ \gamma\beta\alpha &= (\alpha_1\beta_1\gamma_1 + \alpha_2\beta_2\gamma_1 + \alpha_1\beta_2\gamma_2 + \alpha_2\beta_1\gamma_2, \alpha_1\beta_1\gamma_2 + \alpha_2\beta_2\gamma_2 \\ &\quad + \alpha_1\beta_2\gamma_1 + \alpha_2\beta_1\gamma_1) (*) \end{aligned}$$

أي يكون  $\Omega$  ثنائي الامتصاص إذا كانت الثنائية (\*) تنتمي إلى  $\Omega$  عندئذ:

$$(\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2, \alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1) \in \Omega \quad \text{إمّا}$$

$$(\alpha_1\gamma_1 + \alpha_2\gamma_2, \alpha_1\gamma_2 + \alpha_2\gamma_1) \in \Omega \quad \text{أو}$$

$$\text{أو } (\beta_1\gamma_1 + \beta_2\gamma_2, \beta_1\gamma_2 + \beta_2\gamma_1) \in \Omega$$

مثال: بفرض لدينا التَّطابق  $\Omega = \langle (x^2, y^2) \rangle$ .

إنَّ  $\Omega = \langle (x^2, y^2) \rangle = (x^2, x^2y^2) \in \Omega$  ولكنَّ أيًّا من  $(x, 0)$ ,  $(x, xy^2)$  لا ينتمي إلى  $\Omega$ . أيضاً:

$$(x, xy^2)^2 = (x, xy^2)(x, xy^2) = (x^2 + x^2y^4, x^2y^2 + x^2y^2) \in \Omega$$

ولكنَّ أيًّا من  $(x, xy^2)$ ,  $(x, xy^2)$  لا ينتمي إلى  $\Omega$ .

ومنه  $\Omega$  هو تطابق ثنائي الامتصاص وليس أولي.

من أجل الحلقات التبديليَّة، يكون المثالي ثنائي الامتصاص إذا وفقط إذا كان التَّطابق

المقابل لايحوي جداءات مُتشابهة لأزواج تتوضَّع خارج التَّطابق. أي بفرض  $I$  مثالي

لحقة تبديليَّة و  $\Omega_I$  تطابق بالنَّوَة  $I$  عندئذٍ فإنَّ  $I$  ثنائي الامتصاص إذا وفقط إذا تحقَّق:

$$\text{إذا كان } \gamma\beta\alpha \in \Omega_I \text{ فإنَّه إما } \alpha\beta \in \Omega_I \text{ أو } \beta\gamma \in \Omega_I \text{ أو } \alpha\gamma \in \Omega_I$$

للتحقَّق من ذلك: لدينا  $\alpha$  في  $\Omega_I$  إذا وفقط إذا تحقَّق  $\alpha_1 - \alpha_2 \in I$ . ومنه يكون  $\alpha\beta$

$$\text{في } \Omega_I \text{ إذا وفقط إذا تحقَّق } (\alpha_1 - \alpha_2)(\beta_1 - \beta_2) \in I.$$

$I$  مثالي أولي إذا وفقط إذا تحقَّق مايلي:

$$(\alpha_1 - \alpha_2)(\beta_1 - \beta_2) \in I \text{ implies either } (\alpha_1 - \alpha_2) \in I$$

$$\text{or } (\beta_1 - \beta_2) \in I$$

$I$  مثالي ثنائي الامتصاص إذا وفقط إذا تحقَّق مايلي:

$$(\alpha_1 - \alpha_2)(\beta_1 - \beta_2)(\gamma_1 - \gamma_2) \in I \text{ implies either } (\alpha_1 - \alpha_2) \in I$$

$$\text{or } (\beta_1 - \beta_2) \in I \text{ or } (\gamma_1 - \gamma_2) \in I$$

ويُمكن التَّحَقُّق من ذلك بالشَّكل:

$$\begin{aligned} \beta\alpha\gamma \in \Omega_I &\Leftrightarrow ((\alpha_1 - \alpha_2)(\beta_1 - \beta_2)(\gamma_1 - \gamma_2), 0) \in \Omega_I \\ &\Leftrightarrow (\alpha_1 - \alpha_2)(\beta_1 - \beta_2)(\gamma_1 - \gamma_2) \in I \end{aligned}$$

اثبات التكافؤ الثنائي يكون حسب التعريف. أمّا من أجل التكافؤ الأوّل:

$$\begin{aligned} \beta\alpha\gamma \in \Omega_I &\Leftrightarrow \alpha_1\beta_1\gamma_2 + \alpha_2\beta_2\gamma_2 + \alpha_1\beta_2\gamma_1 + \alpha_2\beta_1\gamma_1 = 0 \\ &\Leftrightarrow \alpha_1\beta_1\gamma_2 + \alpha_1\beta_2\gamma_1 = -\alpha_2\beta_2\gamma_2 - \alpha_2\beta_1\gamma_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ((\alpha_1 - \alpha_2)(\beta_1 - \beta_2)(\gamma_1 - \gamma_2), 0) &\in \Omega_I \\ &\Leftrightarrow ((\alpha_1\beta_1 - \alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 + \alpha_2\beta_2)(\gamma_1 - \gamma_2), 0) \in \Omega_I \\ &\Leftrightarrow (\alpha_1\beta_1\gamma_1 - \alpha_1\beta_2\gamma_1 - \alpha_2\beta_1\gamma_1 + \alpha_2\beta_2\gamma_1 - \alpha_1\beta_1\gamma_2 \\ &\quad + \alpha_1\beta_2\gamma_2 + \alpha_2\beta_1\gamma_2 - \alpha_2\beta_2\gamma_2, 0) \in \Omega_I \end{aligned}$$

وتعميم ماسبق من أجل  $n$  - تطابق امتصاص يكون بالشكل الآتي:

2.4 تعريف: نقول عن التّطابق الفعلي  $\Omega$  لـ  $(\mathbb{B}_n\text{-algebra})$   $A$  بأنّه  $n$  - امتصاص

إذا كان  $\alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_{n+1} \in \Omega$  يعني أنّ الجداء المُتشابك لـ  $n$  زوج منها ينتمي لـ  $\Omega$ .

حيثُ  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n+1} \in A$ .

3.4 مبرهنة: إذا كان  $Q, P$  تطابقين أوّلين غير تافهين لـ  $A$  عندئذٍ فإنّ  $Q \cap P$  هو

تطابق ثنائي الامتصاص.

الإثبات: حسب القضية (1) من المبرهنة (18.3) فإنّ النّقاطع  $Q \cap P$  هو تطابق.

نفرض الآن أنّ  $(\alpha\beta)\gamma \in Q \cap P$  من أجل  $\alpha, \beta, \gamma \in A \times A$  عندئذٍ يتحقّق:

$(\alpha\beta)\gamma \in P$  و  $(\alpha\beta)\gamma \in Q$ . وبما أنّ  $P$  هو تطابق أوّلي عندئذٍ إمّا  $(\alpha\beta) \in P$

أو  $\gamma \in P$ . إذا كان  $(\alpha\beta) \in P$  فإنّ  $\alpha \in P$  أو  $\beta \in P$  وبشكل مُشابه  $\alpha \in Q$  أو

$\beta \in Q$  أو  $\gamma \in Q$ .

بفرض  $\alpha \in Q \cap P$  عندئذٍ وبالاعتماد على القضية (2) من المبرهنة (18.3) إمّا  
 $\alpha\beta \in Q \cap P$  أو  $\beta\gamma \in Q \cap P$  أو  $\alpha\gamma \in Q \cap P$  ومنه فإنّ  $Q \cap P$  هو تطابق ثنائي  
 الامتصاص.

$$\alpha(\beta\gamma) \in I(JK) = \{\alpha(\beta\gamma) \mid \alpha \in I, \beta\gamma \in JK\} \in PQ \subseteq P \cap Q \quad \square$$

4.4 : بفرض لدينا  $\varphi: R_1 \rightarrow R_2$  شعاع بين أنصاف الحلقات التبادليّة  $R_1, R_2$ . إذا  
 كان  $\Omega_2$  هو تطابق ثنائي الامتصاص في  $R_2$ ، فإنّ  $\varphi^{-1}(\Omega_2)$  هو تطابق ثنائي  
 الامتصاص في  $R_1$ .

الإثبات: إنّ  $\varphi$  هو تشاكل نصف حلقي، وبحسب التعريف (7.3) يكون  $\varphi^{-1}(\Omega_2)$   
 تطابق. ليكن  $\alpha\beta\gamma \in \varphi^{-1}(\Omega_2)$  بحيث  $\alpha, \beta, \gamma \in R_1$ . عندئذٍ:

$$\varphi(\alpha\beta\gamma) = \varphi(\alpha)\varphi(\beta)\varphi(\gamma) \in \Omega_2$$

وبما أنّ  $\Omega_2$  هو تطابق ثنائي الامتصاص عندئذٍ:

$$\text{إمّا } \varphi(\alpha)\varphi(\beta) \in \Omega_2 \text{ أو } \varphi(\beta)\varphi(\gamma) \in \Omega_2 \text{ أو } \varphi(\alpha)\varphi(\gamma) \in \Omega_2 \text{ ومنه:}$$

$$\text{إمّا } \alpha\beta \in \varphi^{-1}(\Omega_2) \text{ أو } \beta\gamma \in \varphi^{-1}(\Omega_2) \text{ أو } \alpha\gamma \in \varphi^{-1}(\Omega_2) \text{ ومنه}$$

$$\square \quad \varphi^{-1}(\Omega_2) \text{ هو تطابق ثنائي الامتصاص في } R_1.$$

5.4 مبرهنة: في الجبر التبادلي، إذا كانت  $R$  حلقة و  $\Omega$  هو تطابق ثنائي الامتصاص.  
 عندئذٍ فإنّ الجذر له هو تطابق ثنائي الامتصاص.

الإثبات: بفرض  $I$  مثالي في الحلقة  $R$  جذره  $Rad(I)$ ، وبفرض  $\Omega_I$  و  $\Omega_{Rad(I)}$  هي  
 التّطابقات المُقابلة (حيثُ  $I$  و  $Rad(I)$  هي النواة لكل منهما على التّرتيب). نعلم أنّ:

$$(a, b) \in \Omega_{Rad(I)} \Leftrightarrow (a, b)^n \in \Omega_I \text{ for a large enough } n$$

$$\Leftrightarrow ((a - b)^n, 0) \in \Omega_I$$

$$\alpha\beta\gamma \in \Omega_{Rad(I)} \Leftrightarrow (\alpha\beta\gamma)^n \in \Omega_I \Leftrightarrow \alpha^n\beta^n\gamma^n \in \Omega_I \quad \text{ومنهُ:}$$

بما أن  $\Omega_I$  هو تطابق ثنائي الامتصاص، عندئذٍ:

$$(\alpha\beta)^n \in \Omega_I = \alpha^n\beta^n \in \Omega_I \Leftrightarrow \alpha\beta \in \Omega_{Rad(I)} \quad \text{إمّا}$$

$$(\beta\gamma)^n \in \Omega_I = \beta^n\gamma^n \in \Omega_I \Leftrightarrow \beta\gamma \in \Omega_{Rad(I)} \quad \text{أو}$$

$$(\alpha\gamma)^n \in \Omega_I = \alpha^n\gamma^n \in \Omega_I \Leftrightarrow \alpha\gamma \in \Omega_{Rad(I)} \quad \text{أو}$$

□ ومنهُ  $\Omega_{Rad(I)}$  هو تطابق ثنائي الامتصاص.

6.4 مبرهنة: بفرض لدينا  $\Omega$  هو تطابق ثنائي الامتصاص في نصف الحلقة  $A$ . عندئذٍ

$Rad(\Omega)$  هو تطابق ثنائي الامتصاص في نصف الحلقة  $A$ ، ومن أجل كل

$\alpha \in Rad(\Omega)$  يكون:

$$(\alpha_1^2 + \alpha_1\alpha_2, \alpha_1\alpha_2 + \alpha_2^2) = (\alpha_1 + \alpha_2, 0)(\alpha_1, \alpha_2) \in \Omega$$

الإثبات: لدينا من أجل كل  $\alpha \in Rad(\Omega)$  لدينا،  $GP(\alpha) \cap \Omega \neq \emptyset$  أي  $\alpha^{*k} +$

$\alpha^l \in \Omega$ ، وبما أن  $\Omega$  هو تطابق ثنائي الامتصاص في نصف الحلقة  $A$ ،

نلاحظ أنَّ:

$$(\alpha_1^2 + \alpha_1\alpha_2, \alpha_1\alpha_2 + \alpha_2^2) = (\alpha_1 + \alpha_2, 0)(\alpha_1, \alpha_2) \in \Omega$$

بفرض لدينا  $\alpha, \beta, \gamma \in A$  بحيث  $\gamma\beta\alpha \in Rad(\Omega)$  عندئذٍ لدينا:

$$((\gamma\beta\alpha)^*, 0)(\gamma\beta\alpha) \in \Omega$$

ونعلم حسب مبرهنة أنَّ  $[(\beta\alpha)^* = \alpha^*\beta^*]$ ، ومنهُ:

$$(\alpha^*\beta^*\gamma^*, 0)(\gamma\beta\alpha) = ((\alpha^*, 0)(\alpha))((\beta^*, 0)(\beta))((\gamma^*, 0)(\gamma)) \in \Omega$$

وكون  $\Omega$  ثنائي الامتصاص فإنَّ: (الجداء المُتشابك تبديلي)

$$(\alpha^* \beta^*, 0)(\beta \alpha) = ((\alpha^*, 0)(\alpha))((\beta^*, 0)(\beta)) \in \Omega$$

ومنهُ  $\beta \alpha \in Rad(\Omega)$ .

7.4: إنَّ جذر التَّطابق الابتدائي في  $A$  هو تطابق ثنائي الامتصاص.

الإثبات: إنَّ  $Rad(\Omega)$  هو تطابق لأنَّ  $Rad(\Omega) = \bigcap_{\Omega \subseteq \Omega'} Primes \Omega'$  وتقاطع

عدة تطابقات هو تطابق. نفرض الآن أنَّ  $(\alpha\beta)\gamma \in Rad(\Omega)$  وحسب المُبرهنة

(17.3) فإنَّ  $Rad(\Omega)$  هو تطابق أولي أي  $\alpha\beta \in Rad(\Omega)$  أو  $\gamma \in Rad(\Omega)$ .

إذا كان  $\gamma \in Rad(\Omega)$  وكون  $Rad(\Omega)$  هو تطابق يُحقِّق الخاصَّة (2) من المُبرهنة

(18.3) فإنَّ  $Rad(\Omega)$  أو  $\alpha\gamma \in Rad(\Omega)$  ومنهُ  $Rad(\Omega)$  هو تطابق

□

ثنائي الامتصاص.

8.4 نتيجة: كل تطابق أولي هو تطابق ثنائي الامتصاص.

9.4 تعريف: نقول عن التَّطابق الفعلي  $\Omega$  لـ  $(\mathbb{B\_algebra}) A$  بأنَّه ثنائي الامتصاص

ابتدائي إذا تحقَّق الشرط الآتي:

$$\{\alpha\gamma \mid \exists \beta \notin \Omega : \alpha\beta\gamma \in \Omega\} \cup \{\beta\gamma \mid \exists \alpha \notin \Omega : \alpha\beta\gamma \in \Omega\} \\ \subseteq Rad(\Omega)$$

10.4 مُبرهنة: بفرض لدينا  $\varphi: R_1 \rightarrow R_2$  شعاع بين أنصاف الحلقات التبديليَّة

$R_1, R_2$ . إذا كان  $\Omega_2$  هو تطابق ثنائي الامتصاص ابتدائي في  $R_2$ ، فإنَّ  $(\Omega_2)^{-1}$

هو تطابق ثنائي الامتصاص ابتدائي في  $R_1$ .

الإثبات: إنَّ  $\varphi$  هو تشاكل نصف حلقي، وبحسب التَّعريف (7.3) يكون  $\varphi^{-1}(\Omega_2)$  تطابق، و  $\varphi^{-1}(\sqrt{\Omega_2})$  تطابق. ليكن  $\alpha\beta\gamma \in \varphi^{-1}(\Omega_2)$  بحيث  $\alpha, \beta, \gamma \in R_1$ .

$$\varphi(\alpha\beta\gamma) = \varphi(\alpha)\varphi(\beta)\varphi(\gamma) \in \Omega_2 \quad \text{عندئذ:}$$

وبما أنَّ  $\Omega_2$  هو تطابق ثنائي الامتصاص ابتدائي عندئذ:

$$\varphi(\alpha)\varphi(\gamma) \in \sqrt{\Omega_2} \text{ أو } \varphi(\beta)\varphi(\gamma) \in \sqrt{\Omega_2}$$

$$\text{إذا كان } \varphi(\beta)\varphi(\gamma) \in \sqrt{\Omega_2} \text{ فإنَّ: } \beta\gamma \in \varphi^{-1}(\sqrt{\Omega_2})$$

$$\text{أمَّا إذا كان } \varphi(\alpha)\varphi(\gamma) \in \sqrt{\Omega_2} \text{ فإنَّ } \alpha\gamma \in \varphi^{-1}(\sqrt{\Omega_2}) \text{ ومنه:}$$

$$\begin{aligned} & \{ \alpha\gamma \mid \exists \beta \notin \Omega_2 : \alpha\beta\gamma \in \Omega_2 \} \cup \{ \beta\gamma \mid \exists \alpha \notin \Omega_2 : \alpha\beta\gamma \in \Omega_2 \} \\ & \subseteq \varphi^{-1}(\text{Rad}(\Omega_2)) = \text{Rad}(\varphi^{-1}(\Omega_2)) \end{aligned}$$

□ ومنه  $\varphi^{-1}(\Omega_2)$  هو تطابق ثنائي الامتصاص ابتدائي في  $R_1$ .

11.4 مبرهنة: كل تطابق ابتدائي هو تطابق ثنائي الامتصاص ابتدائي.

الإثبات: بفرض لدينا  $\Omega \in A$  تطابق ابتدائي، و  $(\alpha\beta)\gamma \in \Omega$  (حيثُ  $\alpha, \beta \in A$ ،

عندئذ:

$$\{ \gamma : \alpha\beta\gamma \in \Omega \} \subseteq \text{Rad}(\Omega)$$

بما أنَّ  $\text{Rad}(\Omega)$  هو تطابق و  $\alpha, \beta \in A$  عندئذٍ لدينا  $\alpha\gamma \in \text{Rad}(\Omega)$  أو

$$\beta\gamma \in \text{Rad}(\Omega) \text{ ومنه:}$$

$$\{ \alpha\gamma \mid \exists \beta \notin \Omega : \alpha\beta\gamma \in \Omega \} \cup \{ \beta\gamma \mid \exists \alpha \notin \Omega : \alpha\beta\gamma \in \Omega \}$$

$$\subseteq \text{Rad}(\Omega) \quad \square$$

5. تطابقات الامتصاص المدارية: (Tropical Absorbing Congruence)

1.5 نصف حلقة كثيرات الحدود المدارية ([6],P.50)([5],P.3): بفرض لدينا نصف حلقة كثيرات الحدود المدارية  $S = \mathbb{T}[x_1, \dots, x_n]$  بالمتغيرات  $x = (x_1, \dots, x_n)$ . عناصر  $S$  هي كثيرات حدود بمعاملات في  $\mathbb{T}$  حيث تكون جميع العمليات مدارية أي عناصر  $S$  لها الشكل:

$$(F(x) = \bigoplus_{u \in \mathbb{Z}^n} a_u \odot x^u = \max_{u \in \mathbb{Z}^n} a_u + x \cdot u)$$

حيث  $a_u \in \mathbb{T}$  وجميع  $a_u$  مساوية لـ  $-\infty$  باستثناء عدد منته. التطابقات على  $S$  هي علاقات تكافؤ على  $S$  مغلقة تحت الضرب المداري والجمع المداري، أي إذا كان

$$F_1 \sim G_1 \text{ و } F_2 \sim G_2 \text{ عندئذٍ يتحقق أن: } F_1 \oplus F_2 \sim G_1 \oplus G_2 \text{ و } F_1 \odot F_2 \sim G_1 \odot G_2.$$

وإذا كان  $\phi: S \rightarrow R$  تشاكل نصف حلقي، عندئذٍ  $\{F \sim G : \phi(F) = \phi(G)\}$  هو تطابق، وجميع التطابقات على  $S$  تنشأ على هذا النحو. وهذا هو السبب الرئيسي لإعتبار التطابقات بدلاً من المثاليات فقط في أنصاف الحلقات. من أجل المجموعة الجزئية  $\{(F_\alpha, G_\alpha) : \alpha \in A\}$  من  $S \times S$  يوجد تطابق أصغر على  $S$  يحوي  $F_\alpha \sim G_\alpha$  من أجل جميع  $\alpha \in A$ ، و يُرمز له  $\langle F_\alpha \sim G_\alpha \rangle_{\alpha \in A}$ .

ومنه، من أجل أي مجموعة جزئية  $S \subseteq \mathbb{T}^n$  يُعرّف التطابق  $\Omega(S)$  بالشكل الآتي:

$$\Omega(S) = \{(f, g) \mid f(a) = g(a), \forall a \in S\} \subseteq \mathbb{T}[X] \times \mathbb{T}[X]$$

وبالمقابل تُعرّف مُتنوعة التطابق  $\Omega$  بالشكل:

$$V(\Omega) = \{a \in \mathbb{T}^n \mid f(a) = g(a), \forall (f, g) \in \Omega\} \subseteq \mathbb{T}^n$$

ومن أجل أي تطابق  $\Omega$  لـ  $\mathbb{T}[X]$  يتحقق مايلي:

$$V(\Omega(V(\Omega))) = V(\Omega), \Omega \subseteq \Omega(V(\Omega))$$

2.5 مبرهنة ([6], p.50): من أجل  $(f, g), (f', g') \in \mathbb{T}[X] \times \mathbb{T}[X]$  أي عنصرين يتحقق مايلي:

$$V((f, g) \times (f', g')) = V(f, g)UV(f', g')$$

3.5 مبرهنة: إن  $\Omega(\mathbb{T}^n)$  هو تطابق ثنائي الامتصاص.

الإثبات:

الحالة الأولى: بفرض لدينا إحدى الثنائيات لها الشكل  $(h, 0_{\mathbb{T}})$ ، وبفرض لدينا:

$$(h, 0_{\mathbb{T}}) \times (f, g) \times (k, l) \in \Omega(\mathbb{T}^n)$$

$$(h \odot (f \odot k \oplus g \odot l), h \odot (f \odot l \oplus g \odot k)) \in \Omega(\mathbb{T}^n) \quad \text{أي}$$

وذلك من أجل  $f, g, h, k, l \in \mathbb{T}[X]$ .

إذا كان  $h$  هو كثير الحدود الصفري، فإن  $h$  هو الدالة الصفرية على  $\mathbb{T}^n$  ومنه فإن

$$(h, 0_{\mathbb{T}}) \in \Omega(\mathbb{T}^n), \text{ وحسب الخاصّة (2) من المبرهنة (18.3) يكون:}$$

$$(h, 0_{\mathbb{T}}) \times (k, l) \in \Omega(\mathbb{T}^n) \quad \text{أو} \quad (h, 0_{\mathbb{T}}) \times (f, g) \in \Omega(\mathbb{T}^n)$$

نفرض الآن أن  $h$  كثير حدود غير صفري، أي  $(h(a) > 0_{\mathbb{T}}, \forall a \in \mathbb{T}^n)$ ، عندئذٍ

فإن  $h(a)$  يملك مقلوب ضربي مداري، ومنه إذا كان:

$$(h \odot (f \odot k \oplus g \odot l))(a) = (h \odot (f \odot l \oplus g \odot k))(a)$$

$$(f \odot k \oplus g \odot l)(a) = (f \odot l \oplus g \odot k)(a) \quad \text{فإن}$$

وذلك أيًا كانت  $a \in \mathbb{T}^n$  ومنه  $(f, g) \times (k, l) \in \Omega(\mathbb{T}^n)$ .

الحالة الثانية: بفرض لدينا إثنان من الثنائيات لها الشكل  $(h, 0_{\mathbb{T}}), (k, 0_{\mathbb{T}})$ ، وبفرض

$$(h, 0_{\mathbb{T}}) \times (k, 0_{\mathbb{T}}) \times (f, g) \in \Omega(\mathbb{T}^n) \quad \text{لدينا}$$

$$(h \odot k \odot f, h \odot k \odot g) \in \Omega(\mathbb{T}^n) \quad \text{أي}$$

وذلك من أجل  $f, g, h, k \in \mathbb{T}[X]$ .

إذا كان  $h \odot k$  هو كثير الحدود الصفري، فإن  $h \odot k$  هو الدالة الصفرية على  $\mathbb{T}^n$  ومنه

$$\text{فإن } (h, 0_{\mathbb{T}}) \times (k, 0_{\mathbb{T}}) = (h \odot k, 0_{\mathbb{T}}) \in \Omega(\mathbb{T}^n)$$

نفرض الآن أن  $h \odot k$  كثير حدود غير صفري،  $(h \odot k(a) > 0_{\mathbb{T}}, \forall a \in \mathbb{T}^n)$ ،

عندئذٍ فإن  $h \odot k(a)$  يملك مقلوب ضربي مداري، ومنه إذا كان:

$$(h \odot k \odot f)(a) = (h \odot k \odot g)(a)$$

فإن:

$$f(a) = g(a)$$

وذلك أيًا كانت  $a \in \mathbb{T}^n$  ومنه  $(f, g) \in \Omega(\mathbb{T}^n)$ . وحسب الخاصّة (2) من المبرهنة

(18.3) يكون:

$$(k, 0_{\mathbb{T}}) \times (f, g) \in \Omega(\mathbb{T}^n) \quad \text{أو} \quad (h, 0_{\mathbb{T}}) \times (f, g) \in \Omega(\mathbb{T}^n)$$

الحالة الثالثة: بفرض لدينا  $(f_1, f_2) \times (g_1, g_2) \times (h_1, h_2) \in \Omega(\mathbb{T}^n)$

أي:  $(f_1 \odot g_1 \oplus f_2 \odot g_2, f_1 \odot g_2 \oplus f_2 \odot g_1) \times (h_1, h_2) \in \Omega(\mathbb{T}^n)$

$$(((f_1 \odot g_1 \oplus f_2 \odot g_2) \odot h_1) \oplus ((f_1 \odot g_2 \oplus f_2 \odot g_1) \odot h_2)),$$

$$((f_1 \odot g_1 \oplus f_2 \odot g_2) \odot h_2) \oplus ((f_1 \odot g_2 \oplus f_2 \odot g_1) \odot h_1) \in \Omega(\mathbb{T}^n)$$

نعلم أن الضرب المداري توزيعي على الجمع المداري، ومنه فإن:

$$(f_1 \odot g_1 \odot h_1 \oplus f_2 \odot g_2 \odot h_1 \oplus f_1 \odot g_2 \odot h_2 \oplus f_2 \odot g_1 \odot h_2)(a)$$

$$= (f_1 \odot g_1 \odot h_2 \oplus f_2 \odot g_2 \odot h_2 \oplus f_1 \odot g_2 \odot h_1 \oplus f_2 \odot g_1 \odot h_1)(a)$$

وذلك أيًا كانت  $a \in \mathbb{T}^n$ .

ونريد إثبات أن إحدى الجداءات الآتية تنتمي إلى  $\Omega(\mathbb{T}^n)$ .

$$1. (f_1, f_2) \times (g_1, g_2) \in \Omega(\mathbb{T}^n), \text{ أي:}$$

$$(f_1 \odot g_1 \oplus f_2 \odot g_2)(a) = (f_1 \odot g_2 \oplus f_2 \odot g_1)(a)$$

$$2. (f_1, f_2) \times (h_1, h_2) \in \Omega(\mathbb{T}^n), \text{ أي:}$$

$$(f_1 \odot h_1 \oplus f_2 \odot h_2)(a) = (f_1 \odot h_2 \oplus f_2 \odot h_1)(a)$$

$$3. (g_1, g_2) \times (h_1, h_2) \in \Omega(\mathbb{T}^n), \text{ أي:}$$

$$(g_1 \odot h_1 \oplus g_2 \odot h_2)(a) = (g_1 \odot h_2 \oplus g_2 \odot h_1)(a)$$

وذلك أيًا كانت  $a \in \mathbb{T}^n$ .

من أجل 1: نريد إثبات أن  $(f_1, f_2) \times (g_1, g_2) \in \Omega(\mathbb{T}^n)$ ، نريد إثبات أن:

$$a \in V((f_1, f_2) \times (g_1, g_2)), \forall a \in \mathbb{T}^n$$

$$a \in V((f_1, f_2) \times (g_1, g_2) \times (h_1, h_2)), \forall a \in \mathbb{T}^n \text{ (فرضاً)}$$

ونعلم أن الجداء المُختلط تجميعي، ومنه فإن:

$$a \in V(((f_1, f_2) \times (g_1, g_2)) \times (h_1, h_2)), \forall a \in \mathbb{T}^n$$

وحسب المُبرهنة (2.5) فإن:

$$a \in [V((f_1, f_2) \times (g_1, g_2))] \cup [V(h_1, h_2)], \forall a \in \mathbb{T}^n$$

إذا كانت  $a \in V((f_1, f_2) \times (g_1, g_2))$  فإن 1 مُحَقَّقة.

نفرض الآن أن  $a \in V(h_1, h_2)$ ، ومنه  $h_1(a) = h_2(a)$

وبما أن الجمع الجامديعُرف ترتيب كلي، نفرض  $(f_1 \geq f_2, g_1 \geq g_2, h_1 \geq h_2)$

نلاحظ الآن أن العلاقة 2 تقابل العلاقة الآتية:

$$\max\{f_1(a) + h_1(a), f_2(a) + h_2(a)\}$$

$$= \max\{f_1(a) + h_2(a), f_2(a) + h_1(a)\}$$

$$\max\{f_1(a) + h_1(a), f_2(a) + h_2(a)\} = f_1(a) + h_1(a) \text{ (فرضاً)}$$

$$\max\{f_1(a) + h_2(a), f_2(a) + h_1(a)\} = f_1(a) + h_1(a)$$

ومنه فإن العلاقة 2 مُحَقَّقة. يتم إثبات العلاقة 3 بنفس الأسلوب، ومنه يتم المطلوب. □

- [1]. MINCHEVA.K., 2016. - Semiring Congruences and Tropical Geometry. PhD Thesis. Baltimore (Maryland), Johns Hopkins University,81P.
- [2]. HARSU.M., 2016. - Layered Tropical commutative Algebra. Licentiate thesis. Finland, University Of Tampere,149P.
- [3].QIU.D.,2017. -- On Algebraic Congruences, [arXiv: 1512.08088](https://arxiv.org/abs/1512.08088).
- [4].BADAWI.A., 2007. - On 2-absorbing ideals of commutative rings. Bulletin of the Australian Mathematical Society , Volume 75(Issue 3).. Pages. 417 – 429.
- [5]. MACLCGAN.D., 2017.- Tropical Schemes, Tropical Cycles, and Valuated Matroid, [arXiv: 1401.4654](https://arxiv.org/abs/1401.4654).
- [6]. ESTORM.R., 2017. - The Tropical Nullstellensatz for Congruences, [Advances in Mathematics](#) [Internet], Volume 308.,. Pages.36-82.
- [7]. Mousa M. a Study in Absorbing Ideals. Master Thesis. Damascus: Damascus University; 2019.(In Arabic)
- [8].ROBERT.HSC., 2016.- On the Etale Fundamental Group of Schemes over the Natural Numbers. PhD Thesis. Canberra, Australian National University,124P.