الاشتقاق الضبابي العادي والكسري بمفهوم فرق هوكوهارا المعمم للدوال الضبابية المثلثية

إبراهيم الحوراني [1] د. محمد العلي [2] د. عدنان الطيباني [3]

الملخص

نهدف من هذا البحث إلى دراسة العلاقة بين مشتق هوكوهارا المعمم لدالة ضبابية وطول الدالة الضبابية، بالإضافة إلى مفهومي التكامل والاشتقاق الكسريين الضبابيين. كما قمنا في هذا البحث بعرض بعض أنواع المشتقات الكسرية الضبابية للدوال الضبابية المثلثية ودراستها.

الكلمات المفتاحية: دالة ضبابية، فرق هوكوهارا المعمم، طول الدالة الضبابية، تكامل ريمان– ليوفيل الكسري الضبابي المعمم، مشتق كابوتو– كاتاغامبولا الكسري الضبابي

[1] طالب ماجستير في قسم الرياضيات – كلية العلوم – جامعة البعث – سوريا.
[2] أستاذ مساعد في قسم الرياضيات – كلية العلوم – جامعة البعث – سوريا.
[3] مدرس في قسم العلوم الأساسية – كلية الهندسة الميكانيكية والكهربائية – جامعة البعث – سوريا.

Ordinary and Fractional Fuzzy Derivation by Generalized Hukuhara Difference Concept of Triangular Fuzzy Functions

Ibrahem Al-Horany [1] Dr. Muhammad Ali [2] Dr. Adnan Al-Taybani [3]

Abstract

The aim of this paper is to study the relationships between the generalized Hukuhara fuzzy derivation and fuzzy function length, in addition to the concepts of fuzzy fractional integration and derivation. We also study some types of fuzzy fractional derivatives.

Key words: Fuzzy function, Generalized Hukuhara Difference, length of fuzzy function, Fuzzy Riemann-Liouville Generalized Fractional Derivative, Fuzzy Caputo-Katugampola Fractional Derivative.

[1] Master student, Department of Mathematics Al-Baath University.
[2] Assistant Professor, Department of Mathematics Al-Baath University.
[3] Department of Basic Sciences, Faculty of Mechanical and Electrical Engineering Al-Baath University.

المقدمـة

ظهـر مفهـوم المعـادلات التفاضـلية الضـبابية لأول مـرة عـام 1978، وحـاز علـى اهتمـام عـدد مـن البـاحثين، حيـث تـم تطـوير المفـاهيم المتعلقـة بهـذا الموضـوع نظراً لأهميـة تطبيقاتـه. نقـدم فـي هـذا البحـث عرضـاً مـوجزاً عـن المشـتق الضـبابي العـادي والمشـتق الضـبابي الكسـري لدالـة ضـبابية ثلاثيـة، ونظـراً لاخـتلاف الفـروق المسـتخدمة فـي عمليـة الاشـتقاق تـم تعريـف عـدة أنـواع مـن المشـتقات العاديـة والكسـرية الضـبابية، كالمشـتق الضـبابي العـادي باسـتخدام فـرق هوكوهـارا والـذي عـرف مـن قبـل Puri وRalescu عـام1983 والمشـتق الضـبابي العـادي باسـتخدام فـرق هوكوهـارا المعمـم والـذي عُـرِفَ مـن قبـل مـن قبـل Bede عـام 2013، بالإضـافة إلـى مشـتق كـابوتو الكسـري باسـتخدام فـرق هوكوهارا عام 2012 وباستخدام فرق هوكوهارا المعمم عام 2014.

هدف البحث.

التعرف على صيغة المشتق الضبابي من مرتبة صحيحة والمشتق الضبابي من مرتبة كسرية لدالـة ضبابية ثلاثيـة وذلك باستخدام فرق هوكوهارا المعمم، فضـلاً عن توضيح علاقة طول الدالـة الضبابية بمشتقاتها ذات المراتب الصحيحة والكسرية باستخدام فرق هوكوهارا المعمم. كما يهدف هذا البحث إلى تقديم إثبات جديد لبعض المبرهنات مختلف عـن مـا تـم عرضـه فـي معظـم المراجـع العلميـة، بالإضـافة إلـى توضيح صـيغة مشـتق كابوتو- كاتاغامبولا الكسري الضبابي لما ورد في المرجعين [1،3].

1. تعاريف ومبرهنات أساسية:

تعريف.(1). [9].

لتكن X مجموعة غير خالية ولنفرض أنَّ A مجموعة جزئية من X، ولنعرف الدالة μ_A بالشكل:

$$\mu_A : X \to [0,1]$$
$$x \to \mu_A(x)$$

عندئذ ندعو المجموعة A المزودة بالدالة μ_A مجموعة جزئية ضبابية من X، وندعو الدالة μ_A بدالة العضوية، فإذا كان $x \in X$ فإننا ندعو القيمة $\mu_A(x)$ بدرجة انتماء العنصر x إلى المجموعة A. يتم التعبير عن المجموعة الجزئية الضبابية A من X بالشكل (A, μ_A)، وأحياناً بالشكل μ_A للاختصار.

تعريف. (2). [9].

لتكن X مجموعة غير خالية ولنفرض أنَّ A مجموعة جزئية ضبابية من X. يعرف حامل المجموعة الجزئية الضبابية A والذي يرمز له بالرمز $supp(A)$ بأنه المجموعة:

$$supp(A) = \{x \in X \ : \ \mu_A(x) > 0\}$$

تعريف. (3). [4].

لتكن X مجموعة غير خالية ولنفرض أنَّ A مجموعة جزئية ضبابية من X وأنَّ X فضاءً طبولوجياً . تعرف مجموعة القطع من المستوى $0 \le r \le 1$ للمجموعة الجزئية الضبابية A والتي يرمز لها بالرمز $A(r)$ بأنها المجموعة:

$$A(r) = \begin{cases} x \in X \quad ; \ \mu_A(x) \ge r & if \ \ r > 0 \\ cl\,(supp\,(A)) & if \ \ r = 0 \end{cases}$$

حيث إنَّ $cl\,(supp\,(A))$ هي لصاقة حامل المجموعة الجزئية الضبابية A.

ملاحظة. (1).

ليس بالضرورة أن تكون المساواة $A(0)=cl(supp(A))=X$ صحيحة.

مثال. 1.

لنفرض أنَّ $X=\mathbf{R}$ وأنَّ A مجموعة جزئية ضبابية في $\mathbf{R}$ مزودة بدالة العضوية:

$$\mu_A(x):\mathbf{R}\to[0,1]$$

حيث إنَّ:

$$\mu_A(x)=\begin{cases} x-1 & ;\ 1\le x\le 2 \\ 3-x & ;\ 2<x<3 \\ 0 & ;\ x\notin[1,3[\end{cases}$$

عندئذ فإنَّ:

$$A(r)=[r+1,3-r]\ \ if\ \ 0<r\le 1$$

ونلاحظ أنَّ $A(0)=\overline{]1,3[}=[1,3]$.

تعريف. (4). [4].

لنفرض أنَّ $X=\mathbf{R}$ وأنَّ A مجموعة جزئية ضبابية في $\mathbf{R}$ مزودة بدالة العضوية:

$$\mu_A:\mathbb{R}\to[0,1]$$

نقول إنَّ A تشكل عدداً حقيقياً ضبابياً إذا تحققت الشروط الآتية:

i. $A(r)\neq\phi$ وذلك أياً كان $0\le r\le 1$.

ii. $A(r)$ مجال مغلق من $\mathbf{R}$ وذلك أياً كان $0\le r\le 1$.

iii. المجموعة $supp(A)=\{x\in\mathbb{R}:\mu_A(x)>0\}$ محدودة.

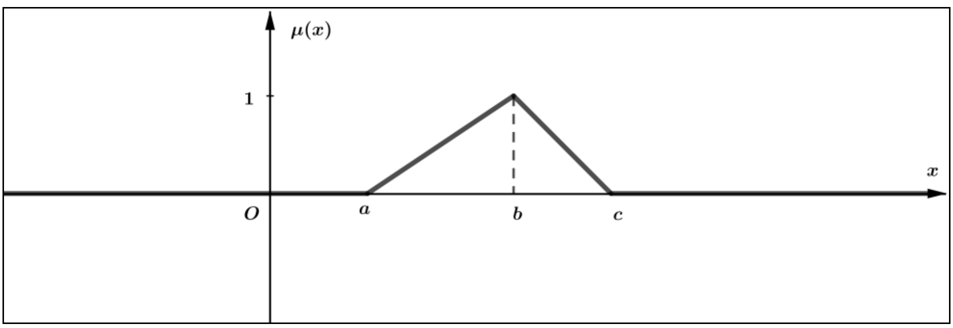
ملاحظة. (2).

إذا كان A عدداً حقيقياً ضبابياً فإنَّ $A(r)=\left[a_1(r),a_2(r)\right]$ ، ونرمز لمجموعة الأعداد الحقيقية الضبابية بالرمز $\mathbf{F_R}$.

تجدر الإشارة إلى أنه يوجد نوعين أساسيين من الأعداد الضبابية الحقيقية وهما الأعداد الضبابية المثلثية والأعداد الضبابية الرباعية. سنقتصر في هذا البحث على الأعداد الضبابية المثلثية وسنستخدم الرمز $\mathbf{F_R}$ للدالة عليها.

تعريف. (5). [4].

ليكن A عدداً حقيقياً ضبابياً، عندئذ نقول عن العدد الحقيقي الضبابي A إنه عدد ضبابي مثلثي إذا كان التمثيل البياني لدالة العضوية μ_A له الشكل:



نلاحظ أنَّ دالة العضوية لعدد ضبابي مثلثي لها قاعدة الربط:

$$\mu_A(x)=\begin{cases} 0 & if\ \ x\le a \\ \dfrac{x-a}{b-a} & if\ \ a<x\le b \\ \dfrac{x-c}{b-c} & if\ \ b<x\le c \\ 0 & if\ \ x\ge c \end{cases}$$

نعبر عن العدد الحقيقي الضبابي المثلثي بالشكل $A=(a,b,c)$ ، ونلاحظ أنَّ:

$$\mu_A(b)=1,\ \mu_A(a)=0,\ \mu_A(c)=0$$

أما مجموعة القطع من المستوى r للعدد الضبابي الثلاثي $A=(a,b,c)$ تأخذ الشكل:

$$A(r)=[a+(b-a)\,r\ ,\ c+(b-c)\,r\ ] \qquad (*)$$

1.1. العمليات الحسابية على الأعداد الحقيقية الضبابية.

ليكن $A,B\in \mathbf{F_R}$ ولنفرض أنَّ $\lambda\in \mathbf{R}$ وأنَّ:

$$A(r)=\left[a_1(r),a_2(r)\right],\ B(r)=\left[\,b_1(r),b_2(r)\right]$$

هي مجموعة القطع من المستوى r لكل منهما على الترتيب، عندئذ تعرف العمليات الحسابية على $\mathbf{F_R}$ بالشكل الآتي:

أولاً. الجمع. [4]. إنَّ ناتج مجموع العددين الحقيقين الضبابيين A,B هو العدد الحقيقي الضبابي $A\oplus B$، والذي مجموعة القطع من المستوى r لهُ هي:

$$(A\oplus B)(r)=A(r)+B(r)=\left[a_1(r)+b_1(r),\ a_2(r)+b_2(r)\,\right]$$

ثانياً. الفرق. [4]. إنَّ ناتج الفرق بين العددين الحقيقين الضبابيين A,B هو العدد الحقيقي الضبابي $A!\ \ B$، والذي مجموعة القطع من المستوى r لهُ هي:

$$(A!\ \ B)(r)=A(r)-B(r)=\left[\,a_1(r)-b_2(r),\ a_2(r)-b_1(r)\,\right]$$

ثالثاً. الضرب بعدد حقيقي. [4]. إنَّ ناتج ضرب العدد الحقيقي الضبابي A بالعدد الحقيقي λ هو العدد الحقيقي الضبابي $\lambda.A$، والذي مجموعة القطع من المستوى r لهُ هي:

$$(\lambda.A)(r)=\lambda.\left(A(r)\right)=\begin{cases}\left[\lambda\,a_1(r),\lambda\,a_2(r)\right] & if\quad \lambda\geq 0\\ \left[\lambda\,a_2(r),\lambda\,a_1(r)\right] & if\quad \lambda<0\end{cases}$$

رابعاً. الجداء. [4]. إنَّ ناتج جداء العددين الحقيقين الضبابيين A,B هو العدد الحقيقي الضبابي $A\square\ B$، والذي مجموعة القطع من المستوى r لهُ هي:

$$(A\square\ B)(r)=A(r)\ B(r)=\left[\ \min P(r),\ \max P(r)\right]$$

حيث $P(r)=\{a_1(r)b_1(r), a_1(r)b_2(r), a_2(r)b_1(r), a_2(r)b_2(r)\}$.

خامساً. القسمة. [4]. إنَّ ناتج قسمة العدد الحقيقي الضبابي A على العدد الحقيقي الضبابي B، حيث إنَّ $0\notin supp(B)$ هو العدد الحقيقي الضبابي (A/B) والذي مجموعة القطع له من المستوى r هي:

$$(A/B)(r)=\frac{A(r)}{B(r)}=\left[a_1(r),a_2(r)\right].\left[\frac{1}{b_2(r)},\frac{1}{b_1(r)}\right]$$

مثال.1.

ليكن لدينا العددين الحقيقيين الضبابيين المثلثيين $A=(1,2,3), B=(3,4,5)$، عندئذٍ وحسب الصيغة $(*)$ نجد مجموعة القطع من المستوى r لكل من العددين A,B هي على الرتيب $A(r)=[1+r,3-r]\ ,\ B(r)=[3+r,5-r]$.

بتطبيق العمليات السابقة على مجموعتي القطع من المستوى r لكل من A و B نحصل على:

- $(A\oplus B)(r)=A(r)+B(r)=[4+2r,8-2r]$، ومنه: $A\oplus B=(4,6,8)$.
- $(A\ominus B)(r)=A(r)-B(r)=[-4+2r,-2r]$، ومنه: $A\ominus B=(-4,-2,0)$.
- $(4.A)(r)=4.(A(r))=[4+4r\ ,12-4r]$، ومنه: $(4.A)=(4,8,12)$.
- $(A\odot B)(r)=A(r)\,B(r)=[(1+r)(3+r),(3-r)(5-r)]$.
- $(A/B)(r)=\dfrac{A(r)}{B(r)}=[(1+r)/(5-r)\ ,(3-r)/(3+r)]$.

ملاحظة. (1).

ليكن $A,B\in \mathbf{F_R}$ عندئذ فإنَّ:

1- إنَّ $(A\odot B)$ و $(A/B); 0\notin supp(B)$ ليسا عددان حقيقيان ضبابيان مثلثيان، وذلك لأن مجموعتي القطع من المستوى r لهما ليستا من الشكل $(*)$.

2- $(A!\ B)\oplus B\neq A$.

3- $A!\ A=A\oplus(-1).A\neq 0$.

4- إنَّ مجموعة الأعداد الحقيقية الضبابية لا تشكل فضاءً متجهياً فوق الحقل .

تعريف. (1). [2،4].

ليكن $A,B\in \mathbf{F_R}$، إذا وجد عدد حقيقي ضبابي C يحقق أنَّ $B=A\oplus C$، عندئذ ندعو C بفرق هوكوهارا للعددين الحقيقيين الضبابيين A,B، ويرمز له بالرمز $B!_H A$.

تعريف. (2). [1،2،4].

ليكن $A,B\in \mathbf{F_R}$، إذا وجد عدد حقيقي ضبابي C، يحقق أنَّ:

$$i.A=B\oplus C \ \ or \ \ ii.B=A\oplus(-1)C$$

عندئذ ندعو C بفرق هوكوهارا المعمم للعددين الحقيقيين الضبابيين A,B، ويرمز له بالرمز $A!_{gH} B$.

في الحالة i نكتب $C=A!_{i-gH} B$ وفي الحالة ii نكتب $C=A!_{ii-gH} B$.

وإذا كان $A=(a_1,a_2,a_3),B=(b_1,b_2,b_3)$ عددان حقيقيان ضبابيان مثلثيان، عندئذٍ فإنَّ فرق هوكوهارا المعمم للعددين A,B موجود دوماً، وهو عدد حقيقي ضبابي مثلثي له الشكل:

$$\begin{aligned} &i.C=(a_1-b_1,a_2-b_2,a_3-b_3) && if\ \ a_1-b_1<a_3-b_3 \\ &ii.C=(a_3-b_3,a_2-b_2,a_1-b_1) && if\ \ a_1-b_1>a_3-b_3 \end{aligned}$$

مبرهنة. (1). [1].

لتكن $M,N,K \in \mathbf{F}_{\mathbf{R}}$، عندئذ القضايا الآتية صحيحة

1- إذا وُجد $M\ !_{gH}\ N$، فهو وحيد.

2- $M\ !_{gH}\ M = 0$.

3- يكون $M\ !_{i-gH}\ N$ موجوداً عندما وفقط عندما يكون $M\ !_{ii-gH}\ N$ موجوداً.

4- $(M \oplus N)\ !_{gH}\ N = M$.

5- إذا كان $M\ !_{gH}\ N$ و $N\ !_{gH}\ M$ موجودان، فإنَّ:

$$0\ !_{gH} \left(M\ !_{gH}\ N\right) = N\ !_{gH}\ M$$

6- $M\ !_{gH}\ N = N\ !_{gH}\ M = K$ إذا وفقط إذا كان $K = -K$ و $M = N$.

2.1. الدوال الضبابية.

تعريف. (1). [1].

تسمى كل دالة x معرفة بالشكل:

$$x : \square \longrightarrow \mathbf{F}_{\mathbf{R}}$$
$$t \longrightarrow x(t)$$

دالة مجموعة قيمها أعداد حقيقية ضبابية.

إذا كانت x دالة مجموعة قيمها إعداد حقيقية ضبابية عندئذ فإنَّ مجموعة القطع من المستوى r لها تأخذ الشكل: $x(t,r) = \left[x_1(t,r), x_2(t,r)\right]$.

سنستخدم في هذه الورقة مصطلح الدالة الضبابية للإشارة إلى الدالة التي مجموعة قيمها أعداد حقيقية ضبابية وذلك للاختصار.

تعريف. (2). [1،2].

لتكن $x(t)$ دالة ضبابية معرفة على المجال $]a,b[$، ولنفرض أنَّ $t_0 \in]a,b[$ وأنَّ h عدداً حقيقياً موجباً يحقق أنَّ $t_0 + h \in]a,b[$. إذا كان $x(t_0+h) \ominus_{gH} x(t_0)$ موجوداً، فإن مشتق هوكوهارا المعمم للدالة الضبابية x عند t_0 والذي يرمز له بالرمز $x'_{gH}(t_0)$ يعطى بالصيغة:

$$x'_{gH}(t_0) = \lim_{h\to 0} \frac{x(t_0+h) \ominus_{gH} x(t_0)}{h} := \lim_{h\to 0} \frac{\Delta_h\, x(t_0)}{h}$$

ملاحظة. (1).

لتكن $x(t)$ دالة ضبابية معرفة على المجال $]a,b[$ عندئذ:

1- إذا كان $t_0 \in]a,b[$ وكان $x'_{gH}(t_0)$ موجوداً فإنَّ $x'_{gH}(t_0) \in \mathbf{F_R}$.

2- إذا كان مشتق هوكوهارا المعمم للدالة الضبابية x موجوداً عند كل $t \in]a,b[$ فإننا ندعو الدالة:

$$x'_{gH} :]a,b[\longrightarrow \mathbf{F_R}$$
$$t \longrightarrow x'_{gH}(t)$$

بمشتق هوكوهارا المعمم للدالة الضبابية x.

3- بما فرق هوكوهارا المعمم يملك إحدى الصيغتين i أو ii فإنَّ مشتق هوكوهارا المعمم يرمز له بالشكل $x'_{i-gH}(t)$ أو $x'_{ii-gH}(t)$ بالترتيب حسب الصيغة المستخدمة.

4- لنفرض أنَّ مجموعة القطع من المستوى r للدالة الضبابية $x(t)$ هي:

$$x(t,r) = \left[x_1(t,r)\ ,\ x_2(t,r)\right]$$

عندئذٍ فإن مجموعة القطع من المستوى r للمشتق $x'_{gH}(t)$ تأخذ أحد الشكلين:

الأول. $x'_{i-gH}(t,r) = \left[x'_1(t,r)\ ,\ x'_2(t,r)\right]$.

الثاني. $x'_{ii-gH}(t,r)=\left[x'_2(t,r)\ ,\ x'_1(t,r)\right]$.

حيث إنَّ $x'_1(t,r)\ ,\ x'_2(t,r)$ دالتان حقيقيتان قابلتان للمفاضلة بالنسبة إلى t، وهنا نلاحظ أنَّ: $x'_{i-gH}(t)=\ominus_H(-1)x'_{ii-gH}(t)$.

تعريف (3). [1].

لتكن $x(t)$ دالة ضبابية معرفة على $D\subseteq\mathbb{R}$ ولنفرض أنَّ $x(t,r)=\left[x_1(t,r)\ ,\ x_2(t,r)\right]$ هي مجموعة القطع من المستوى r لها، إنَّ طول الدالة الضبابية $x(t)$ هو الدالة الحقيقية $l(x)$ والتي تعطى وفق قاعدة الربط:

$$l(x)(t,r)=x_2(t,r)-x_1(t,r)$$

إذا كان h عدداً حقيقياً موجباً يحقق أنَّ $t+h\in D$ وذلك لأجل كل $t\in D$، عندئذ نقول عن الدالة الضبابية $x(t)$ إنها:

- ذات طول متزايد إذا كان: $l(x)(t+h,r)\geq l(x)(t,r);\forall t\in D$.
- ذات طول متناقص إذا كان: $l(x)(t+h,r)\leq l(x)(t,r);\forall t\in D$.
- ذات طول مضطرد إذا كانت ذات طول متزايد أو متناقص.

مبرهنة. (1). [1،8].

ليكن $A,B\in\mathbf{F_R}$ ، عندئذ تكون القضايا الآتية صحيحة:

$(a)\ \ l((-1)A)=l(A)$

$(b)\ \ l(A\oplus B)=l(A)+l(B)$

$(c)\ \ l\left(A\ominus_{gH}B\right)=|\,l(A)-l(B)|$

تعريف. (4). [1،3].

لتكن $x(t)$ دالة ضبابية معرفة على المجال $[t_0,T]$ وبفرض أن $p>0$ ، يُعرف تكامل ريمان− ليوفيل الكسري الضبابي المعمم من النوع p والمرتبة $0<\alpha<1$ بالشكل:

$$\boldsymbol{I}_{\mathbf{RL}}^{\alpha,p}\,x(t)=\frac{p^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\odot\int_{t_0}^{t}s^{p-1}\left(t^p-s^p\right)^{\alpha-1}\odot\;x(s)\,ds$$

ويُعرف بصيغة مجموعة القطع من المستوى r بالشكل:

$$\boldsymbol{I}_{\mathbf{RL}}^{\alpha,p}\,x(t,r)=\left[\boldsymbol{I}_{\mathbf{RL}}^{\alpha,p}\,x_1(t,r)\,,\boldsymbol{I}_{\mathbf{RL}}^{\alpha,p}\,x_2(t,r)\right]$$

حيث إنَّ:

$$\boldsymbol{I}_{\mathbf{RL}}^{\alpha,p}\,x_1(t,r)=\frac{p^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\int_{t_0}^{t}s^{p-1}\left(t^p-s^p\right)^{\alpha-1}x_1(s,r)\,ds$$

$$\boldsymbol{I}_{\mathbf{RL}}^{\alpha,p}\,x_2(t,r)=\frac{p^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\int_{t_0}^{t}s^{p-1}\left(t^p-s^p\right)^{\alpha-1}x_2(s,r)\,ds$$

مبرهنة. (2). [1].

من أجل أي دالتين ضبابيتين $x(t)\,,y(t)$ ومن أجل أي مرتبتين كسريتين $\alpha,\beta\in(0,1)$، تكون القضيتان الآتيتان صحيحتين:

$1-\ \boldsymbol{I}_{\mathbf{RL}}^{\alpha,p}\,(x\oplus y)(t)=\boldsymbol{I}_{\mathbf{RL}}^{\alpha,p}\,x(t)\oplus\boldsymbol{I}_{\mathbf{RL}}^{\alpha,p}\,y(t).$

$2-l\left(\boldsymbol{I}_{\mathbf{RL}}^{\alpha,p}x\right)(t,r)=\boldsymbol{I}_{\mathbf{RL}}^{\alpha,p}\,l\,(x)\left(t,r\right).$

تعريف (5). [1،3].

لتكن $x(t)$ دالة ضبابية معرفة على $[t_0,T]$ وبفرض أن $p>0$ ، يُعرف مشتق ريمان− ليوفيل الكسري الضبابي المعمم باستخدام فرق هوكوهارا المعمم من النوع p والمرتبة $0<\alpha<1$ بالشكل:

$$\boldsymbol{D}^{\alpha,p}_{\mathbf{RL}_{gH}}\,x(t)=t^{1-p}\left(\boldsymbol{I}^{(1-\alpha),p}_{\mathbf{RL}}\,x\right)'_{gH}(t)\ \ ;\ t\in[t_0,T]\ ,\ \ 0<\alpha<1$$

حيث إنَّ:

$$\boldsymbol{I}^{(1-\alpha),p}_{\mathbf{RL}}\,x(t)=\frac{p^{\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}\square\int_{t_0}^{t}s^{p-1}\left(t^{p}-s^{p}\right)^{-\alpha}\square\ x(s)\,ds$$

$$\left(\boldsymbol{I}^{(1-\alpha),p}_{\mathbf{RL}}\,x\right)'_{gH}(t)=\lim_{h\to 0}\frac{\boldsymbol{I}^{(1-\alpha),p}_{\mathbf{RL}}\,x(t+h)\ominus_{gH}\boldsymbol{I}^{(1-\alpha),p}_{\mathbf{RL}}\,x(t)}{h}$$

وهنا نميز الحالتين:

- في حالة الاشتقاق باستخدام فرق هوكوهارا من النوع الأول $(i-gH)$، يكون:

$$\left(\boldsymbol{I}^{(1-\alpha),p}_{\mathbf{RL}}\,x\right)'_{i-gH}(t)=\lim_{h\to 0}\frac{\boldsymbol{I}^{(1-\alpha),p}_{\mathbf{RL}}\,x(t+h)\ominus_{H}\boldsymbol{I}^{(1-\alpha),p}_{\mathbf{RL}}\,x(t)}{h}$$

$$\boldsymbol{D}^{\alpha,p}_{\mathbf{RL}_{gH}}\,x(t)=t^{1-p}\left(\boldsymbol{I}^{(1-\alpha),p}_{\mathbf{RL}}\,x\right)'_{i-gH}(t)\ \ ;\ t\in[t_0,T]\ ,\ \ 0<\alpha<1$$

ومجموعة القطع من المستوى r للمشتق في هذه الحالة هي:

$$\boldsymbol{D}^{\alpha,p}_{\boldsymbol{RL}_{i-gH}}\,x(t,r)=\left[\boldsymbol{D}^{\alpha,p}_{\mathbf{RL}}\,x_1(t,r),\boldsymbol{D}^{\alpha,p}_{\mathbf{RL}}\,x_2(t,r)\right]$$

- في حالة الاشتقاق باستخدام فرق هوكوهارا من النوع الثاني $(ii-gH)$، يكون:

$$\left(\boldsymbol{I}^{(1-\alpha),p}_{\mathbf{RL}}\,x\right)'_{ii-gH}(t)=\lim_{h\to 0}\frac{\boldsymbol{I}^{(1-\alpha),p}_{\mathbf{RL}}\,x(t)\ominus_{H}\boldsymbol{I}^{(1-\alpha),p}_{\mathbf{RL}}\,x(t+h)}{h}$$

$$\boldsymbol{D}^{\alpha,p}_{\mathbf{RL}_{gH}}\,x(t)=t^{1-p}\left(\boldsymbol{I}^{(1-\alpha),p}_{\mathbf{RL}}\,x\right)'_{ii-gH}(t)\ \ ;\ t\in[t_0,T]\ ,\ \ 0<\alpha<1$$

ومجموعة القطع من المستوى r للمشتق في هذه الحالة هي:

$$\boldsymbol{D}^{\alpha,p}_{\boldsymbol{RL}_{ii-gH}}\,x(t,r)=\left[\boldsymbol{D}^{\alpha,p}_{\mathbf{RL}}\,x_2(t,r),\boldsymbol{D}^{\alpha,p}_{\mathbf{RL}}\,x_1(t,r)\right]$$

مبرهنة. (3). [1،3].

لتكن $x(t)$ دالة ضبابية، عندئذ لأجل $0<\alpha<1$ و $p>0$ ، فإنَّ:

$$\left(\boldsymbol{D}_{\mathbf{RL}_{gH}}^{\alpha,p}\ \boldsymbol{I}_{\mathbf{RL}}^{\alpha,p}\ x\right)(t)=x(t)$$

تعريف (6). [1،3].

لتكن $x(t)$ دالة ضبابية وبفرض أنَّ المشتق $\boldsymbol{D}_{\mathbf{RL}_{gH}}^{\alpha,p}\ x(t)$ موجود في الفترة $[t_0,T]$ حيث إنَّ $p>0$ و $0<\alpha<1$، عندئذ يُعرف مشتق كابوتو كاتاغامبولا الكسري الضبابي بالشكل:

$$\boldsymbol{D}_{\mathbf{CK}_{gH}}^{\alpha,p}\ x(t)=\boldsymbol{D}_{\mathbf{RL}_{gH}}^{\alpha,p}\left(x(t)\,!\ _{gH}\ x(t_0)\right)$$

تعريف (7). [1].

لتكن لدينا $x(t)$ دالة ضبابية و $x(t,r)=\left[x_1(t,r),x_2(t,r)\right]$ مجموعة القطع لها من المستوى r. نقول عن الدالة $x(t)$ أنها مستمرة مطلقاً إذا كانت كل من الدالتين $x_1(t,r),\ x_2(t,r)$ مستمرتين مطلقاً.

2. النتائج ومناقشتها:

في هذه الفقرة نعرض أهم النتائج التي توصلنا إليها، فضلاً عن إعادة إثبات بعض المبرهنات بطريقة مختلفة عن الطريقة التي وردت في المراجع العلمية، والبداية مع المبرهنة الآتية والتي نقدم إثباتها بطريقة مختلفة عن طريقة إثباتها في المراجع العلمية.

مبرهنة. (1). [6،8].

إذا كانت $x(t)=\left(z_1(t),z_2(t),z_3(t)\right)$ دالة ضبابية مجموعة قيمها أعداداً حقيقيةً ضبابية مثلثية ومعرفة على المجال $[a,b]$ ، عندئذٍ القضايا الآتية صحيحة:

1- إذا كانت $x(t)$ قابلة للاشتقاق بمفهوم فرق هوكوهارا المعمم من النوع الأول $(i-gH)$ من أجل $t\in[a,b]$ عندئذٍ يكون:

$$x'_{i-gH}(t)=\left(z'_1(t),z'_2(t),'z_3(t)\right)$$

2- إذا كانت $x(t)$ قابلة للاشتقاق بمفهوم فرق هوكوهارا المعمم من النوع الثاني $(ii-gH)$ من أجل $t\in[a,b]$ عندئذٍ يكون:

$$x'_{ii-gH}(t)=\left(z'_3(t),z'_2(t),\ z'_1(t)\right)$$

البرهان.

بداية نثبت صحة الحالة الثانية:

بما أن $x(t)$ قابلة للاشتقاق بمفهوم فرق هوكوهارا المعمم من النوع الثاني $(ii-gH)$ من أجل $t\in[a,b]$ وبالفرض لدينا $x(t)=\left(z_1(t),z_2(t),z_3(t)\right)$ وبما أن مشتق هوكوهارا المعمم يُعرف بالشكل:

$$x'_{gH}(t)=\lim_{h\to 0}\frac{x(t+h)\,!_{gH}\,x(t)}{h}$$

ومن أجل هذه الحالة يكون $x'_{ii-gH}(t,r)=\left[x'_2(t,r)\ ,\ x'_1\ (t,r)\right]$ ولكن مجموعة القطع من المستوى r للدالة المفروضة تُعطى بالشكل:

$$x(t,r)=[\, z_1(t)+(z_2(t)-z_1(t))\, r \,,\, z_3(t)+(z_2(t)-z_3(t))\, r \,]$$
$$=\left[\, z_1(t)(1-r)+r\, z_2(t) \,,\, z_3(t)(1-r)+r\, z_2(t) \,\right]$$

وبالتالي:

$$x_1(t,r)=z_1(t)(1-r)+r\, z_2(t) \,,\, x_2(t,r)=z_3(t)(1-r)+r\, z_2(t)$$

ومنه فإنَّ:

$$x_1'(t,r)=z_1'(t)(1-r)+r\, z_2'(t) \,,\, x_2'(t,r)=z_3'(t)(1-r)+r\, z_2'(t)$$

وبالتعويض في العلاقة لمجموعة قطع المشتق من النوع الثاني نجد أنَّ:

$$x'_{ii-gH}(t,r)=\left[x_2'(t,r) \,,\, x_1'(t,r)\right]$$
$$=\left[z_3'(t)(1-r)+r\, z_2'(t), z_1'(t)(1-r)+r\, z_2'(t)\right]$$

وبمقارنة الناتج الأخير مع العلاقة(*) نجد أن $z_3'(t)=a, z_2'(t)=b, z_1'(t)=c$ ومن ثم يكون $x'(x)=\left(z_3'(t), z_2'(t), z_1'(t)\right)$.

ننتقل الآن إلى إثبات الحالة الأولى وذلك بتطبيق العلاقة:

$$x'_{i-gH}(t)=!_H(-1)\, x'_{ii-gH}(t)$$

والتي ينتج عنها أنَّ:

$$x'_{i-gH}(t)=!_H(-1)\, x'_{ii-gH}(t)=!_H(-1)\left(z_3'(t), z_2'(t), z_1'(t)\right)$$
$$=!_H\left(-z_1'(t), -z_2'(t), -z_3'(t)\right)$$
$$=\left(z_1'(t), z_2'(t), z_3'(t)\right)$$

مبرهنة. (2).

لتكن $x(t)$ دالة ضبابية معرفة على $D\subseteq \mathbb{R}$ ولنفرض أنَّ $x(t,r)=\left[x_1(t,r)\ ,\ x_2(t,r)\right]$ هي مجموعة القطع من المستوى r لها، عندئذ تكون الدالة الضبابية $x(t)$ تفاضلية من النوع $(i-gH)$ إذا وفقط إذا كانت ذات طول متزايد وتفاضلية من النوع $(ii-gH)$ إذا وفقط إذا كانت ذات طول متناقص.

البرهان.

في حال كانت $x(t)$ ذات طول متزايد، عندئذ:

$$l(x)(t+h,r)\geq l(x)(t,r);\forall t\in D\, and\, t+h\in D$$

$$\Leftrightarrow \quad x_2(t,r)-x_1(t,r)\leq x_2(t+h,r)-x_1(t+h,r)$$

$$\Leftrightarrow \quad x_1(t+h,r)-x_1(t,r)\leq x_2(t+h,r)-x_2(t,r)$$

$$\Leftrightarrow \quad \lim_{h\to 0}\frac{x_1(t+h,r)-x_1(t,r)}{h}\leq \lim_{h\to 0}\frac{x_2(t+h,r)-x_2(t,r)}{h}$$

$$\Leftrightarrow \quad x_1'(t,r)\leq x_2'(t,r)$$

وهذا يبين أنَّ:

$$x'_{i-gH}(t,r)=\left[x_1'(t,r)\ ,\ x_2'\ \ (t,r)\right]$$

في حال كانت $x(t)$ ذات طول متناقص، عندئذ باتباع نفس الخطوات السابقة نجد أنَّ:

$$x'_{ii-gH}(t,r)=\left[x_2'(t,r)\ ,\ x_1'\ \ (t,r)\right]$$

مبرهنة. (3).

لتكن $x(t)$ دالة ضبابية معرفة على $D\subseteq \mathbb{R}$، عندئذ الدالة الضبابية $x(t)$ ذات طول متزايد إذا وفقط إذا كان $\frac{d}{dt}[l(x)(t,r)]\geq 0$ وذات طول متناقص إذا وفقط إذا كان $\frac{d}{dt}[l(x)(t,r)]\leq 0$.

البرهان.

لنفرض أنَّ الدالة الضبابية $x(t)$ ذات طول متزايد عندئذ يكون:

$$l(x)(t+h,r) \geq l(x)(t,r); \forall t \in D\, and\, t+h \in D$$
$$\Leftrightarrow l(x)(t+h,r) - l(x)(t,r) \geq 0$$
$$\Leftrightarrow \lim_{h \to 0} \frac{l(x)(t+h,r) - l(x)(t,r)}{h} \geq 0$$
$$\Leftrightarrow \frac{d}{dt}[l(x)(t,r)] \geq 0$$

إذا كانت الدالة الضبابية $x(t)$ ذات طول متناقص عندئذ باتباع نفس الخطوات السابقة نجد أنَّ $\frac{d}{dt}[l(x)(t,r)] \leq 0$.

تجدر الاشارة إلى أنه تم إثبات هذه المبرهنة كتفسير لاستخدامها من قبل أغلب الباحثين للتحقق من أن الدالة الضبابية ذات طول متزايد أو متناقص عن طريق اشتقاق دالة الطول بدون ملاحظتنا لوجود إثبات لها.

ملاحظة. (1). [1].

من الممكن أن يملك تكامل ريمان ليوفيل الكسري الضبابي المعمم طولاً متزايداً على مجالات جزئية من المجال الكلي ومتناقصاً على مجالات جزئية اخرى من المجال الكلي، حتى وإن كانت الدالة $x(t)$ تملك طول متناقص أو متزايد على كامل المجال الكلي.

مثال.1.

من أجل $p=1$ و $\alpha=1/2$ والدالة الضبابية $x:(0,1] \to \mathbf{F_R}$ المُعرفة بالشكل

$$x(t) = \left(\sqrt{t}-1, 0, 1-\sqrt{t}\right) \quad ; \quad t \in (0,1]$$

لدينا:

$$l(x)(t,r)=2\sqrt{t}\,(r-1)$$

وبالتالي فإن:

$$\frac{d}{dt}l(x)(t,r)=\frac{r-1}{\sqrt{t}}\leq 0\ ;\ r\in[0,1]$$

أي أن الدالة $x(t)$ تملك طول متناقص، أيضاً ومن أجل $t\in(0,1]$ لدينا:

$$\boldsymbol{I}_{\mathbf{RL}}^{\frac{1}{2},1}x(t)=\frac{1}{\Gamma(1/2)}\odot\int_0^1(t-s)^{\frac{1}{2}}\odot x(s)\,ds=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\odot\left(\frac{\pi}{2}t-2\sqrt{t},0,2\sqrt{t}-\frac{\pi}{2}t\right)$$

ويكون:

$$l\left(\boldsymbol{I}_{\mathbf{RL}}^{\frac{1}{2},1}x\right)(t,r)=\frac{2(r-1)}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{\pi}{2}t-2\sqrt{t}\right)$$

ومنه نجد:

$$\frac{d}{dt}\left(l\left(\boldsymbol{I}_{\mathbf{RL}}^{\frac{1}{2},1}x\right)(t,r)\right)=\frac{2(r-1)}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{1}{\sqrt{t}}\right)=\mathrm{H}$$

ونلاحظ أنَّ:

$$\mathrm{H}\leq 0\ ;\ t\in\left[4/\pi^2,1\right]\quad and\quad \mathrm{H}\geq 0\ ;\ t\in\left(0,4/\pi^2\right]$$

أي إنَّ $\boldsymbol{I}_{\mathbf{RL}}^{\frac{1}{2},1}x(t)$ يملك طولاً متزايداً على المجال $\left(0,4/\pi^2\right]$ وطولاً متناقصاً على المجال $\left[4/\pi^2,1\right]$.

مبرهنة (4). [1،3].

لتكن $x(t)$ دالة ضبابية ولنفرض أنها مستمرة مطلقاً وقابلة للاشتقاق بمفهوم هوكوهارا المعمم من النوع الأول أو من النوع الثاني، و $0<\alpha<1$ عندئذ فإن:

$$\boldsymbol{D}_{\mathbf{RL}_{gH}}^{\alpha,p}\, x(t)=\frac{p^{\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}\square\left[\left(t^{p}-t_0^{p}\right)^{-\alpha} x(t_0)\oplus\int_{t_0}^{t}\left(t^{p}-s^{p}\right)^{-\alpha}\square\ x'_{gH}(s)\,ds\right]$$

$$=\frac{p^{\alpha}\left(t^{p}-t_0^{p}\right)^{-\alpha}\square\ x(t_0)}{\Gamma(1-\alpha)}\oplus\left(\boldsymbol{I}_{\mathbf{RL}}^{(1-\alpha),p}\, s^{1-p}\frac{d}{ds}x\right)(t)$$

حيث إنَّ $t\in[t_0,T]$ وإنَّ $\frac{d}{ds}x=x'_{gH}(s)$.

البرهان.

سنقوم بإثبات صحة العلاقة عن طريق مجموعة القطع من المستوى r لمشتق ريمان ليوفيل الكسري الضبابي المعمم.

أولاً. في حال كانت الدالة $x(t)$ قابلة للاشتقاق باستخدام فرق هوكوهارا المعمم من النوع الأول $(i-gH)$ عندئذ يكون لدينا:

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{D}_{\boldsymbol{RL}_{i-gH}}^{\alpha,p}\, x(t,r)\\
&=\left[\boldsymbol{D}_{\mathbf{RL}}^{\alpha,p}\, x_1(t,r),\boldsymbol{D}_{\mathbf{RL}}^{\alpha,p}\, x_2(t,r)\right]\\
&=\left[t^{1-p}\frac{d}{dt}\left(\boldsymbol{I}_{\mathbf{RL}}^{(1-\alpha),p}\, x_1(t,r)\right),\ t^{1-p}\frac{d}{dt}\left(\boldsymbol{I}_{\mathbf{RL}}^{(1-\alpha),p}\, x_2(t,r)\right)\right] \qquad (1)
\end{aligned}$$

لكن:

$$\frac{d}{dt}\left(\boldsymbol{I}_{\mathbf{RL}}^{(1-\alpha),p}\, x_1(t,r)\right)=\frac{d}{dt}\left(\frac{p^{\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}\int_{t_0}^{t}s^{p-1}\left(t^{p}-s^{p}\right)^{-\alpha}x_1(s,r)\,ds\right)$$

نكامل بالتجزئة فنحصل على:

$$\frac{d}{dt}\left(\boldsymbol{I}_{\mathbf{RL}}^{(1-\alpha),p}\,x_1(t,r)\right)$$
$$=\frac{p^{\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dt}\left(\frac{x_1(t_0,r)}{p(1-\alpha)\left(t^p-t_0{}^p\right)^{\alpha-1}}+\int_{t_0}^{t}\frac{\left(t^p-s^p\right)^{1-\alpha}}{p\,(1-\alpha)}\frac{d}{ds}x_1(s,r)\,ds\right)$$
$$=\frac{p^{\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}\left(x_1(t_0,r)\,t^{p-1}\left(t^p-t_0^p\right)^{-\alpha}+\frac{d}{dt}\int_{t_0}^{t}\frac{\left(t^p-s^p\right)^{1-\alpha}}{p\,(1-\alpha)}\frac{d}{ds}x_1(s,r)\,ds\right)$$

وبتطبيق دستور اشتقاق تكامل حدوده تابعة لوسيط نحصل على:

$$\frac{d}{dt}\left(\boldsymbol{I}_{\mathbf{RL}}^{(1-\alpha),p}\,x_1(t,r)\right)$$
$$=\frac{p^{\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}\left(t^{p-1}x_1(t_0,r)\left(t^p-t_0{}^p\right)^{-\alpha}+\int_{t_0}^{t}t^{p-1}\left(t^p-s^p\right)^{-\alpha}\frac{d}{ds}x_1(s,r)\,ds\right)$$
$$=\frac{p^{\alpha}\,t^{p-1}}{\Gamma(1-\alpha)}\left(x_1(t_0,r)\left(t^p-t_0{}^p\right)^{-\alpha}+\int_{t_0}^{t}s^{p-1}\left(t^p-s^p\right)^{-\alpha}s^{1-p}\frac{d}{ds}x_1(s,r)\,ds\right)$$
$$=t^{p-1}\left(\frac{p^{\alpha}x_1(t_0,r)\left(t^p-t_0{}^p\right)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}+\left(\boldsymbol{I}_{\mathbf{RL}}^{(1-\alpha),p}\,s^{1-p}\frac{d}{ds}x_1\right)(t,r)\right)$$

وبالمثل يكون:

$$\frac{d}{dt}\left(\boldsymbol{I}_{\mathbf{RL}}^{(1-\alpha),p}\,x_2(t,r)\right)$$
$$=t^{p-1}\left(\frac{p^{\alpha}x_2(t_0,r)\left(t^p-t_0{}^p\right)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}+\left(\boldsymbol{I}_{\mathbf{RL}}^{(1-\alpha),p}\,s^{1-p}\frac{d}{ds}x_2\right)(t,r)\right)$$

وبالتعويض في العلاقة (1) نحصل على:

$$\boldsymbol{D}^{\alpha,p}_{\boldsymbol{RL}_{i-gH}}\, x(t,r)$$
$$=\left[t^{1-p}\,\frac{d}{dt}\left(\boldsymbol{I}_{\mathbf{RL}}^{(1-\alpha),p}\, x_1(t,r)\right),\ t^{1-p}\,\frac{d}{dt}\left(\boldsymbol{I}_{\mathbf{RL}}^{(1-\alpha),p}\, x_2(t,r)\right)\right]$$
$$=\begin{bmatrix} \dfrac{p^{\alpha} x_1(t_0,r)\left(t^p - {t_0}^p\right)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} + \left(\boldsymbol{I}_{\mathbf{RL}}^{(1-\alpha),p}\, s^{1-p}\,\dfrac{d}{ds} x_1\right)(t,r)\ , \\ \dfrac{p^{\alpha} x_2(t_0,r)\left(t^p - {t_0}^p\right)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} + \left(\boldsymbol{I}_{\mathbf{RL}}^{(1-\alpha),p}\, s^{1-p}\,\dfrac{d}{ds} x_2\right)(t,r) \end{bmatrix}$$

وبالتالي:

$$\boldsymbol{D}^{\alpha,p}_{\boldsymbol{RL}_{i-gH}}\, x(t,r)=\left[\frac{p^{\alpha} x_1(t_0,r)\left(t^p - {t_0}^p\right)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}\ ,\ \frac{p^{\alpha} x_2(t_0,r)\left(t^p - {t_0}^p\right)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}\right]$$
$$+\left[\left(\boldsymbol{I}_{\mathbf{RL}}^{(1-\alpha),p}\, s^{1-p}\,\frac{d}{ds} x_1\right)(t,r),\left(\boldsymbol{I}_{\mathbf{RL}}^{(1-\alpha),p}\, s^{1-p}\,\frac{d}{ds} x_2\right)(t,r)\right]$$

وفي حال كانت الدالة $x(t)$ قابلة للاشتقاق باستخدام فرق هوكوهارا المعمم من النوع الثاني $(ii-gH)$ يكون لدينا باتباع خطوات مماثلة لما سبق:

$$\boldsymbol{D}_{\boldsymbol{RL}_{ii-gH}}^{\alpha,p}\, x(t,r)=\left[t^{1-p}\,\frac{d}{dt}\left(\boldsymbol{I}_{\mathbf{RL}}^{(1-\alpha),p}\, x_2(t,r)\right),\, t^{1-p}\,\frac{d}{dt}\left(\boldsymbol{I}_{\mathbf{RL}}^{(1-\alpha),p}\, x_1(t,r)\right)\right] \qquad (2)$$

$$=\begin{bmatrix} \dfrac{p^{\alpha}x_2(t_0,r)\left(t^{p}-t_0{}^{p}\right)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}+\left(\boldsymbol{I}_{\mathbf{RL}}^{(1-\alpha),p}\, s^{1-p}\,\dfrac{d}{ds}x_2\right)(t,r)\,, \\ \dfrac{p^{\alpha}x_1(t_0,r)\left(t^{p}-t_0{}^{p}\right)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}+\left(\boldsymbol{I}_{\mathbf{RL}}^{(1-\alpha),p}\, s^{1-p}\,\dfrac{d}{ds}x_1\right)(t,r) \end{bmatrix}$$

$$=\left[\frac{p^{\alpha}x_2(t_0,r)\left(t^{p}-t_0{}^{p}\right)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}\,,\,\frac{p^{\alpha}x_1(t_0,r)\left(t^{p}-t_0{}^{p}\right)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}\right]$$

$$+\left[\left(\boldsymbol{I}_{\mathbf{RL}}^{(1-\alpha),p}\, s^{1-p}\,\frac{d}{ds}x_2\right)(t,r),\left(\boldsymbol{I}_{\mathbf{RL}}^{(1-\alpha),p}\, s^{1-p}\,\frac{d}{ds}x_1\right)(t,r)\right]$$

من (1) و (2) وبالعودة للشكل الضبابي ينتج أن:

$$\boldsymbol{D}_{\mathbf{RL}_{gH}}^{\alpha,p}\, x(t)=\frac{p^{\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}\square\left[\left(t^{p}-t_0^{p}\right)^{-\alpha}x(t_0)\oplus\int_{t_0}^{t}\left(t^{p}-s^{p}\right)^{-\alpha}\square\; x'_{gH}(s)\,ds\right]$$

$$=\frac{p^{\alpha}\left(t^{p}-t_0^{p}\right)^{-\alpha}\square\; x(t_0)}{\Gamma(1-\alpha)}\oplus\left(\boldsymbol{I}_{\mathbf{RL}}^{(1-\alpha),p}\, s^{1-p}\,\frac{d}{ds}x\right)(t)$$

قمنا بتقديم إثبات هذه المبرهنة بعد ملاحظتنا استخدامها من قبل الباحثين في إثبات صيغة مشتق كابوتو كاتاغامبولا الكسري الضبابي كما في المراجع [1،3،5] دون وجود إثبات صريح عليها في المراجع.

مبرهنة. (5). [1،3].

لتكن $x(t)$ دالة ضبابية ولنفرض أنها مستمرة مطلقاً وذات طول مطرد، عندئذ فإن:

$$\boldsymbol{D}^{\alpha,p}_{\mathbf{CK}_{gH}} x(t) = \left(\boldsymbol{I}^{(1-\alpha),p}_{\mathbf{RL}_{gH}} s^{1-p} \frac{d}{ds} x \right)(t)$$

$$= \frac{p^{\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} \square \int_{t_0}^{t} \left(t^p - s^p\right)^{-\alpha} \square\ x'_{gH}(s)\, ds \;\; ; t \in [t_0, T]\,,\ 0 < \alpha < 1$$

البرهان.

حسب تعريف مشتق كابوتو–كاتاغامبولا الكسري الضبابي لدينا:

$$\boldsymbol{D}^{\alpha,p}_{\mathbf{CK}_{gH}} x(t) = \boldsymbol{D}^{\alpha,p}_{\mathbf{RL}_{gH}} \left(x(t) \,!_{gH}\, x(t_0) \right) = \boldsymbol{D}^{\alpha,p}_{\mathbf{RL}_{gH}} x(t) \,!_{gH}\, \boldsymbol{D}^{\alpha,p}_{\mathbf{RL}_{gH}} x(t_0)$$

$$= \boldsymbol{D}^{\alpha,p}_{\mathbf{RL}_{gH}} x(t) \,!_{gH}\, \frac{\left(t^p - {t_0}^p\right)^{-\alpha} p^{\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} \square\ x(t_0)$$

وحسب مبرهنة (4) من هذه الفقرة لدينا:

$$\boldsymbol{D}^{\alpha,p}_{\mathbf{RL}_{gH}} x(t) = \frac{p^{\alpha} \left(t^p - t_0^p\right)^{-\alpha} \square\ x(t_0)}{\Gamma(1-\alpha)} \oplus \left(\boldsymbol{I}^{(1-\alpha),p}_{\mathbf{RL}_{gH}} s^{1-p} \frac{d}{ds} x \right)(t)$$

فنجد أنَّ:

$$\boldsymbol{D}^{\alpha,p}_{\mathbf{CK}_{gH}} x(t) = \frac{p^{\alpha} \left(t^p - t_0^p\right)^{-\alpha} \square\ x(t_0)}{\Gamma(1-\alpha)} \oplus \left(\boldsymbol{I}^{(1-\alpha),p}_{\mathbf{RL}_{gH}} s^{1-p} \frac{d}{ds} x \right)(t)$$

$$!_{gH}\, \frac{\left(t^p - {t_0}^p\right)^{-\alpha} p^{\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} \square\ x(t_0)$$

وبالتالي:

$$\boldsymbol{D}_{\mathbf{CK}_{gH}}^{\alpha,p}\, x(t)=\left(\boldsymbol{I}_{\mathbf{RL}_{gH}}^{(1-\alpha),p}\, s^{1-p}\frac{d}{ds}x\right)(t)\oplus\frac{p^{\alpha}\left(t^{p}-t_{0}^{p}\right)^{-\alpha}\odot x(t_0)}{\Gamma(1-\alpha)}$$
$$\ominus_{gH}\frac{\left(t^{p}-t_{0}{}^{p}\right)^{-\alpha}p^{\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}\odot x(t_0)$$

وحسب 2 من مبرهنة. (1) من الفقرة 1.1 نجد أنَّ:

$$\boldsymbol{D}_{\mathbf{CK}_{gH}}^{\alpha,p}\, x(t)=\left(\boldsymbol{I}_{\mathbf{RL}_{gH}}^{(1-\alpha),p}\, s^{1-p}\frac{d}{ds}x\right)(t)\oplus 0=\left(\boldsymbol{I}_{\mathbf{RL}_{gH}}^{(1-\alpha),p}\, s^{1-p}\frac{d}{ds}x\right)(t)$$

تجدر الإشارة إلى أنه قد تمَّ إثبات صحة هذه المبرهنة بطريقة أوضح مما هي مذكورة في المراجع العلمية التي قمنا بالاطلاع عليها.

مبرهنة. (6).

إذا كانت $x(t)=\left(z_1(t),z_2(t),z_3(t)\right)$ دالة ضبابية معرفة على $[a,b]$ قيمها أعداد حقيقية ضبابية مثلثية، عندئذٍ القضايا الآتية صحيحة:

1- إذا كانت $x(t)$ قابلة للاشتقاق بمفهوم فرق هوكوهارا المعمم من النوع الأول $(i-gH)$ وذلك لأجل كل $t\in[a,b]$ عندئذٍ يكون:

$$\boldsymbol{D}_{\mathbf{CK}_{gH}}^{\alpha,p}\, x(t)=\left(\boldsymbol{D}_{\mathbf{CK}}^{\alpha,p}\, z_1(t),\boldsymbol{D}_{\mathbf{CK}}^{\alpha,p}\, z_2(t),\boldsymbol{D}_{\mathbf{CK}}^{\alpha,p}\, z_3(t)\right)$$

2- إذا كانت $x(t)$ قابلة للاشتقاق بمفهوم فرق هوكوهارا المعمم من النوع الثاني $(ii-gH)$ وذلك لأجل كل $t\in[a,b]$ عندئذٍ يكون:

$$\boldsymbol{D}_{\mathbf{CK}_{gH}}^{\alpha,p}\, x(t)=\left(\boldsymbol{D}_{\mathbf{CK}}^{\alpha,p}\, z_3(t),\boldsymbol{D}_{\mathbf{CK}}^{\alpha,p}\, z_2(t),\boldsymbol{D}_{\mathbf{CK}}^{\alpha,p}\, z_1(t)\right)$$

الاثبات:

حسب **مبرهنة. (5)** نجد أنَّ:

$$\boldsymbol{D}_{\mathbf{CK}_{gH}}^{\alpha,p}\, x(t) = \frac{p^{\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} \square \int_{t_0}^{t} \left(t^p - s^p\right)^{-\alpha} \square\ x'_{gH}(s)\,ds \ ;\ 0<\alpha<1$$

في حال كانت $x(s)$ قابلة للاشتقاق بمفهوم فرق هوكوهارا المعمم من النوع الأول $(i-gH)$ من أجل $t\in[a,b]$ عندئذٍ بناءً على مبرهنة سابقة يكون:

$$x'_{i-gH}(s) = \left(z'_1(s), z'_2(s), z'_3(s)\right)$$

وبالتعويض في العلاقة السابقة نجد:

$$\boldsymbol{D}_{\mathbf{CK}_{gH}}^{\alpha,p}\, x(t) = \frac{p^{\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} \square \int_{t_0}^{t} \left(t^p - s^p\right)^{-\alpha} \square\ \left(z'_1(s), z'_2(s), z'_3(s)\right) ds$$

$$\boldsymbol{D}_{\mathbf{CK}_{gH}}^{\alpha,p}\, x(t) = \begin{pmatrix} \dfrac{p^{\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} \square \displaystyle\int_{t_0}^{t} \left(t^p - s^p\right)^{-\alpha} \square\ z'_1(s)\,ds\ , \\ \dfrac{p^{\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} \square \displaystyle\int_{t_0}^{t} \left(t^p - s^p\right)^{-\alpha} \square\ z'_2(s)\,ds\ , \\ \dfrac{p^{\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} \square \displaystyle\int_{t_0}^{t} \left(t^p - s^p\right)^{-\alpha} \square\ z'_3(s)\,ds \end{pmatrix}$$

ومنه:

$$\boldsymbol{D}_{\mathbf{CK}_{gH}}^{\alpha,p}\, x(t) = \left(\boldsymbol{D}_{\mathbf{CK}}^{\alpha,p}\, z_1(t), \boldsymbol{D}_{\mathbf{CK}}^{\alpha,p}\, z_2(t), \boldsymbol{D}_{\mathbf{CK}}^{\alpha,p}\, z_3(t)\right)$$

وفي حال كانت $x(s)$ قابلة للاشتقاق بمفهوم فرق هوكوهارا المعمم من النوع الثاني $(ii-gH)$ من أجل $t\in[a,b]$ عندئذٍ بناءً على مبرهنة سابقة يكون:

$$x'_{i-gH}(s) = \left(z'_3(s), z'_2(s), z'_1(s)\right)$$

وبالتعويض في العلاقة السابقة نجد:

$$\boldsymbol{D}_{\mathbf{CK}_{gH}}^{\alpha,p}\, x(t) = \frac{p^{\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} \square \int_{t_0}^{t} \left(t^p - s^p\right)^{-\alpha} \square\ \left(z'_3(s), z'_2(s), z'_1(s)\right) ds$$

$$= \begin{pmatrix} \dfrac{p^{\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} \odot \int_{t_0}^{t} \left(t^{p}-s^{p}\right)^{-\alpha} \odot z_3'(s)\,ds \ , \\ \dfrac{p^{\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} \odot \int_{t_0}^{t} \left(t^{p}-s^{p}\right)^{-\alpha} \odot z_2'(s)\,ds \ , \\ \dfrac{p^{\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} \odot \int_{t_0}^{t} \left(t^{p}-s^{p}\right)^{-\alpha} \odot z_1'(s)\,ds \end{pmatrix}$$

ومنه:

$$\boldsymbol{D}_{\mathbf{CK}_{gH}}^{\alpha,p}\, x(t) = \left(\boldsymbol{D}_{\mathbf{CK}}^{\alpha,p}\, z_3(t), \boldsymbol{D}_{\mathbf{CK}}^{\alpha,p}\, z_2(t), \boldsymbol{D}_{\mathbf{CK}}^{\alpha,p}\, z_1(t) \right)$$

ملاحظة. (2).

تم إثبات هذه المبرهنة لأجل مشتق كابوتو الكسري الضبابي (عندما $p=1$ في صيغة مشتق كابوتو كاتاغامبولا) وذلك في المرجع [6].

المراجع العلمية

[1] ALLAHVIRANLOO. T., 2021- Fuzzy Fractional differential operators and equations. Springer, 293p.

[2] GHAFFARI. M., ALLAHVIRANLOO. T., ABBASBANDY. S., AZHINI. M., 2021. On the fuzzy solutions of time-fractional problems. IJFS. Vol. 18, no. 3, pp. 51-66.

[3] HOA. N. V., et al., 2018- Fuzzy fractional differential equations under Caputo-Katugampola fractional derivative approach, Fuzzy Sets Syst., ScienceDirect, Vol.375, pp. 70-90.

[4] DE BARROS. L., BASSANEZI. R., LODWICK. W., 2017- A first course in Fuzzy Logic, Fuzzy Dynamical Systems, and Biomathematics. Springer, 299p.

[5] LUPULESCU. V., 2016- Solving interval-valued fractional initial value problems under Caputo gH-fractional differentiability, Fuzzy Sets Syst., ScienceDirect, Vol. 309, pp.1-34.

[6] HOA. N. V., 2014- Fuzzy fractional functional differential equations under Caputo gH-differentiability, Communications in nonlinear Science and Numerical Simulation, ScienceDirect, Vol. 22, pp. 1134-1157.

[7] AGARWAL. R., LAKSHMIKANTHAM. V., and NIETO. J., 2010- On the concept of solution for fractional differential equations with uncertainty. Nonlinear Anal., ELSEVIER, Vol. 72, pp. 2859-2862.

[8] BEDE. B., GNANA BHASKAR. T., LAKSHMIKANTHAM. V., 2007_Perspectives of Fuzzy Initial Value problems, Communications in Applied Analysis, no.11, 339-358.

[9]. ZADEH. L.A., 1965 – Fuzzy Sets, INFORMATION AND CONTROL, **8**, 338-353.