C_2- مـــــــــــــودولات و D_2- مـــــــــــــودولات

حمزة حاكمي[1] بشار الحسين[2]

قسـم الـريـاضيـات كليــة العلـوم جـامعــة دمشــق

الملخص

نعلم أن معرفة طبيعة أو خواص حلقة الإندومورفيزمات $S = End_R(M)$ لمودول ما M لها تأثير كبير على المودول M، وفي بعض الأحيان، خواص الحلقة S تعطينا فكرة كاملة أو شبه كاملة عن المودول M نفسه.

في هذه المقالة، درسنا مفهوم D_2-مودول وحلقة الإندومورفيزمات له. حيث نقول عن المودول M إنه D_2-مودول إذا كان لأجل أي مودولين جزئيين A, B للمودول M يحققان أن $M/B \cong A$ وأن A حد مباشر للمودول M، ينتج أن B حد مباشر للمودول M. وقد أثبتنا أن حلقة الإندومورفيزمات $S = End_R(M)$ لمودول ما تكون منتظمة عندما وفقط عندما يكون المودول M هو D_2-مودول ويحقق أنه لأجل كل عنصر $f \in S$ فإن $Im(f)$ حد مباشر للمودول M.

فضلاً عن ذلك، درسنا مفهوم C_2-مودول وحلقة الإندومورفيزمات له. حيث نقول عن المودول M إنه C_2-مودول، إذا كان لأجل أي مودولين جزئيين A, B من المودول M وكان $A \cong B$ وأن A حد مباشر للمودول M، ينتج أن B حد مباشر

[1] أستاذ في قسم الرياضيات كلية العلوم جامعة دمشق.

[2] طالب دراسات عليا قسم الرياضيات كلية العلوم جامعة دمشق.

للمودول M. وقد أثبتنا أن، حلقة الإندومورفيزمات $S=End_R(M)$ لمودول ما M تكون منتظمة عندما وفقط عندما يكون المودول M هو C_2-مودول ويحقق أنه لأجل كل عنصر $f\in S$ فإن $Ker(f)$ حد مباشر للمودول M.

أخيراً وجدنا أن المودول M يكون C_2- مودول و D_2-مودول في آن معاً عندما وفقط عندما يتحقق الشرط الآتي: لأجل كل عنصر $f\in S$ فإن $Im(f)$ يكون حداً مباشراً للمودول M إذا وفقط إذا كان $Ker(f)$ حداً مباشراً للمودول M.

الكلمات المفتاحية: الحلقة المنتظمة وشبه المنتظمة، D_2-مودول، C_2-مودول، المودولات الإسقاطية (الأفقية) المباشرة.

التصنيف الرياضياتي العالمي للعام (2020): 16P40، 16P20، 16D40، 16D50.

C_2 –Modules and D_2 –Modules

Hamza Hakmi[1] **Bashar Alhussein[2]**

Department of Mathematics, Faculty of Science, Damascus University

Abstract

We have known that basic quality or the properties of the endomorphism $S = End_R(M)$ for some module M has a big effect of the module M. In some times the properties of ring S give a complete or semi-complete idea of the same module M.

In this paper we study the concept of D_2 –module and its endomorphism ring. Where the module M is said to be D_2 –module, if for every two sub-modules A, B of M such that $M/B \cong A$ and A is a direct summand of M, then B is a direct summand of M.

We have proved that the endomorphism ring S of some module M, is regular if and only if the module M is D_2 –module and for every element $f \in S$, $Im(f)$ is a direct summand of M.

In addition to that, we study the concept of C_2 –module and its endomorphism ring. Where the module M is said to be C_2 –module, if for every two submodules A, B of M such that

$B \cong A$ and A is a direct summand of M, then B is a direct summand of M.

We have proved that the endomorphism ring S of some module M, is regular if and only if the module M is C_2-module and for every element $f \in S$, $Ker(f)$ is a direct summand of M.

Finally, we found that the module M is D_2-module and C_2-module at the same time if and only if the module satisfy the following condition: for every element $f \in S$, $Ker(f)$ is a direct summand of M if and only if $Im(f)$ is a direct summand of M.

Key Words: Regular and semi-regular ring, D_2-Module and C_2-Module, Direct Projective (Injective) module.

2020 Mathematics Subject Classification: 16P40 ،16P20 ،16D40 ، 16D50.

[1] Proof. Department of Mathematics, Faculty of Science, Damascus University.

[2] Graduate Student. Department of Mathematics, Faculty of Science, Damascus University.

المقـــدمـــــــة.

ليكن M مودولاً فوق حلقة R. لنفرض أن A, B مودولين جزئيين في M، وأن A حد مباشر للمودول M.

نعلم أنه إذا كان $f : M \to M$ تماثلاً للمودول M فإن $f(A)$ هو حد مباشر للمودول M. ولكن إذا كان $g : A \to B$ تماثل مودولات، فإنه ليس بالضرورة أن يكون $g(A) = B$ حداً مباشراً للمودول M.

لأجل ذلك تم إدخال مفهوم C_2-مودول، وهو المودول M الذي يحقق الشرط الآتي: إذا كان A, B مودولين جزئيين في M وكان $A \cong B$ وأن A حد مباشر للمودول M، ينتج أن B حد مباشر للمودول M.

من جهة أخرى، لدينا حسب مبرهنة التماثل الأولى، أنه إذا كان $f : M \to M$ تشاكلاً للمودول M فإن $M/Ker(f) \cong Im(f)$، [4].

وهنا نعلم أنه إذا كان المودول الجزئي $Im(f)$ حداً مباشراً للمودول M، فإنه ليس بالضرورة أن يكون المودول الجزئي $Ker(f)$ حداً مباشراً للمودول M. إن هذه القضية قد تم تعميمها على النحو الآتي:

إذا كان A, B مودولين جزئيين في مودول M وكان $M/B \cong A$ وأن A حد مباشر للمودول M، فإن B ليس بالضرورة أن يكون حداً مباشراً للمودول M.

لأجل ذلك تم إدخال مفهوم D_2-مودول، وهو المودول M الذي يحقق الشرط الآتي: إذا كان A, B مودولين جزئيين في M وكان $M/B \cong A$ وأن A حد مباشر للمودول M، ينتج أن B حد مباشر للمودول M.

من الجدير ذكره هنا، أن مفهوم الـD_2-مودولات يعد مفهوماً ثنوياً لمفهوم الـC_2-مودولات.

في هذه المقالة، درسنا جانباً من مفهومي الـ D_2-مودولات والـC_2-مودولات والشروط المكافئة لهذين المفهومين، فضلاً عن دراستنا لحلقة الإندومورفيزمات لهذين الصفين من المودولات، وعلاقة هذه الحلقة بمفهوم الانتظام في الحلقات.

حيث تم إثبات أن، حلقة الإندومورفيزمات $S=End_R(M)$ لمودول ما M تكون منتظمة عندما وفقط عندما يكون المودول M هو C_2-مودول ويحقق أنه لأجل كل عنصر $f\in S$ فإن $Ker(f)$ حد مباشر للمودول M. فضلاً عن ذلك، وجدنا أن حلقة الإندومورفيزمات $S=End_R(M)$ لمودول ما تكون منتظمة عندما وفقط عندما يكون المودول M هو D_2-مودول ويحقق أنه لأجل كل عنصر $f\in S$ فإن $Im(f)$ حد مباشر للمودول M. إضافة إلى ذلك، تم إثبات أن المودول M هو C_2- مودول و D_2-مودول في آن معاً عندما وفقط عندما يتحقق الشرط الآتي:
لأجل كل عنصر $f\in S$ فإن $Im(f)$ يكون حداً مباشراً للمودول M إذا وفقط إذا كان $Ker(f)$ حداً مباشراً للمودول M.

1. تعـــــاريــــف ومفـــاهيـــم أســـاسيـــــة.

تعريـــف 1−1. لتكن R حلقة، نقول عن العنصر $e\in R$ إنه جامد إذا كان $e^2=e$، [1].

تعريـــف 1−2. لتكن R حلقة، نقول عن العنصر $a\in R$ إنه منتظم إذا وجد عنصر $b\in R$ يحقق أن $a=aba$، ونقول عن الحلقة R إنها منتظمة إذا كانت جميع عناصرها منتظمة، [5].

تعريـــف 1−3. لتكن R حلقة، نقول عن العنصر المغاير للصفر $a\in R$ إنه شبه منتظم إذا وجد عنصر $b\in R$ يحقق أن $b=bab$، ونقول عن الحلقة R إنها شبه منتظمة إذا كانت جميع عناصرها المغايرة للصفر شبه منتظمة، [3].

مبرهنـــة 1-4 [6].

ليكن M مودولاً فوق حلقة R وليكن $f \in S = End_R(M)$. عندئذ الشرطان الآتيان متكافئان:

1 – العنصر $f \in S$ هو عنصر منتظم.

2 – كل من $Im(f)$ و $Ker(f)$ هو حد مباشر للمودول M .

2. المـــودولات مــن النـــوع D_2 .

تعريـــــف [7].

ليكن M مودولاً فوق حلقة R . نقول عن المودول M إنه D_2-مودول إذا كان لأجل أي مودولين جزئيين A, B من المودول M يحققان $M / B \cong A$ وكان A حداً مباشراً في M ينتج أن B حد مباشر في M .

تمهيديـــــــة 1-2.

ليكن M مودولاً فوق حلقة R . إذا كان المودول M هو D_2-مودول، عندئذ أي حد مباشر للمودول M هو أيضاً D_2-مودول.

البرهـــــان.

لنفرض أن المودول M هو D_2-مودول وليكن N حداً مباشراً في M، عندئذ $M = N \oplus K$ حيث K مودول جزئي في M. لنفرض أن A حد مباشر للمودول N ، عندئذ $N = A \oplus A'$ حيث A' مودول جزئي في N ، وليكن B مودولاً جزئياً آخر في N بحيث إن $N/B \cong A$. لما كان:

$$M = N \oplus K = A \oplus A' \oplus K$$

نجد أن A حد مباشر للمودول M . فضلاً عن ذلك، لما كان $B \subseteq N \subseteq M$ نجد أن B مودول جزئي في M ، ولما كان $N/B \cong A$ ومنه فإن:

$$A \cong N/B \cong (N+K)/(B+K) = M/(B+K)$$

ولما كان M هو D_2 –مودول نجد أن المودول الجزئي $B+K$ هو حد مباشر في M ومنه فإن $M = (B+K) \oplus K'$ حيث K' مودول جزئي في M. ولما كان $B \subseteq N$ نجد أن:

$$B \cap K \subseteq N \cap K = 0$$

أي إن $B \cap K = 0$، ومنه فإن $M = B \oplus (K \oplus K')$. ولما كان $B \subseteq N$ نجد أن:

$$N = B \oplus (N \cap (K \oplus K'))$$

ومنه فإن B حد مباشر في N وهذا يبين أن N هو D_2 –مودول.

مبرهنــــــة 2-2.

ليكن M مودولاً فوق حلقة R. عندئذ الشروط الآتية متكافئة:

1 – المودول M هو D_2 –مودول.

2 – لأجل أي حدين مباشرين A, B للمودول M فإن أي تشاكل مودولات غامر $f : A \to B$ ينشطر.

3 – لأجل أي حد مباشر A للمودول M فإن أي تشاكل مودولات غامر $f : M \to A$ ينشطر.

البرهــــــان.

$(1) \Rightarrow (2)$. لنفرض أن M هو D_2 –مودول. وليكن A, B حدين مباشرين للمودول M ولنفرض أن $f : A \to B$ تشاكل مودولات غامر. لنفرض أيضاً أن $\pi : M \to A$ التشاكل الإسقاطي الغامر، عندئذ فإن $f\pi : M \to B$ تشاكل مودولات غامر، ومنه فإن $M/Ker(f\pi) \cong B$، ولما كان B حداً مباشراً للمودول M وأن M هو D_2 –مودول نجد أن $Ker(f\pi)$ حد مباشر في M. ولما كان A حداً مباشراً للمودول M فإن $M = A \oplus A'$، حيث A' مودول جزئي في M.

لنبرهن على أن $Ker(f\pi)=Ker(f)\oplus A'$.

ليكن $x\in Ker(f\pi)$، عندئذ فإن $x\in M$ وأن $x=a+a'$، حيث $a\in A$ و $a'\in A'$ ومنه نجد أن:

$$f\pi(x)=f\pi(a+a')=f(a)=0$$

ومنه فإن $a\in Ker(f)$ وبالتالي فإن $x=a+a'\in Ker(f)+A'$، أي إن:

$$Ker(f\pi)\subseteq Ker(f)+A'$$

ليكن $y\in Ker(f)+A'$، عندئذ فإن $y\in M$ وأن $y=y_1+y_2$ حيث $y_1\in Ker(f)$ و $y_2\in A'$ ولما كان $Ker(f)\subseteq A$ نجد أن:

$$f\pi(y)=f\pi(y_1+y_2)=f(y_1)=0$$

ومنه فإن $y\in Ker(f\pi)$ وبالتالي يكون $Ker(f)+A'\subseteq Ker(f\pi)$. مما سبق نجد أن:

$$Ker(f\pi)=Ker(f)+A'$$

ولما كان $Ker(f)\cap A'\subseteq Ker(f)\cap A'=0$، نجد أن $Ker(f\pi)=Ker(f)\oplus A'$. ولما كان $Ker(f\pi)$ حداً مباشراً في M نجد أن $Ker(f)$ حد مباشر في M، وهكذا نجد أن التشاكل f ينشطر.

$(2)\Leftarrow(3)$. واضح.

$(3)\Leftarrow(1)$. ليكن A حداً مباشراً للمودول M و B مودولاً جزئياً في M بحيث إن $M/B\cong A$. لنفرض أن $\alpha:M/B\to A$ هذا التشاكل ولنفرض أيضاً أن $\pi:M\to M/B$ تشاكل القانوني الغامر، فنجد أن $\alpha\pi:M\to A$ هو تشاكل مودولات غامر، وحسب الفرض فإن التشاكل $\alpha\pi$ ينشطر وبالتالي فإن $Ker(\alpha\pi)$ حد مباشر في M. لنبرهن على أن $Ker(\alpha\pi)=B$.

ليكن $x\in Ker(\alpha\pi)$، عندئذ فإن $x\in M$ وأن $\alpha\pi(x)=0$ وبالتالي فإن:

$$\alpha\pi(x)=\alpha(x+B)=0$$

ولما كان α تماثلاً نجد أن $x+B=B$ ومنه فإن $x\in B$ وبالتالي فإن $Ker(\alpha\pi)\subseteq B$.

ليكن $b\in B$، عندئذ فإن $b+B=B$ ومنه فإن $\pi(b)=b+B=0$ وأن $\alpha(\pi(b))=\alpha(0)=0$ ومنه نجد أن $b\in Ker(\alpha\pi)$ وبالتالي $B\subseteq Ker(\alpha\pi)$.

مما سبق نجد أن $Ker(\alpha\pi)=B$ وبالتالي فإن B حد مباشر للمودول M ومنه فإن M هو D_2-مودول.

تعريـــــف [2].

ليكن M مودولاً فوق حلقة R وأن $S=End_R(M)$. نقول عن المودول M إنه إسقاطي مباشر إذا كان لأجل كل حد مباشر K للمودول M ولأجل كل تشاكل غامر $f:M\to K$ يوجد عنصر $g\in S$ يحقق أن $fg=\pi$، حيث $\pi:M\to K$ التشاكل الإسقاطي الغامر.

مبرهنـــــة 2-3.

ليكن M مودولاً فوق حلقة R وأن $S=End_R(M)$. عندئذ الشرطان الآتيان متكافئان:

1 - المودول M إسقاطي مباشر.

2 - المودول M هو D_2-مودول.

البرهـــــان.

$(1)\Rightarrow(2)$. لنفرض أن المودول M إسقاطي مباشر وليكن A حداً مباشراً في M ولنفرض أيضاً أن B مودول جزئي في M ويحقق $M/B\cong A$.

لنفرض أن $\alpha : M / B \to A$ هذا التشاكل وأن $\pi : M \to A$ التشاكل الإسقاطي الغامر وأن $\lambda : M \to M / B$ التشاكل القانوني الغامر، فنجد أن $\alpha\lambda : M \to A$ هو تشاكل غامر، ولما كان المودول M إسقاطي مباشر فإنه يوجد $\mu \in S$ بحيث إن $(\alpha\lambda)\mu = \pi$. لنبرهن على أن:

$$Ker(\mu\pi) = Ker(\pi)$$

واضح أن $Ker(\pi) \subseteq Ker(\mu\pi)$. ليكن $x \in Ker(\mu\pi)$ عندئذ $x \in M$ وأن $\mu\pi(x) = 0$ ومنه فإن $(\alpha\lambda)\mu\pi(x) = 0$ وبالتالي فإن $\pi^2(x) = \pi(x) = 0$ ، أي إن $x \in Ker(\pi)$ ومنه فإن:

$$Ker(\mu\pi) \subseteq Ker(\pi)$$

وهكذا نجد أن $Ker(\mu\pi) = Ker(\pi)$.ولما كان $\pi = (\alpha\lambda)\mu$ نجد أن $\pi(\alpha\lambda)\mu\pi = \pi$ وبالتالي فإن $(\mu\pi)(\alpha\lambda)(\mu\pi) = \pi\mu$

لنبرهن الآن على أن $Ker(\mu\pi)(\alpha\lambda) = Ker(\alpha\lambda)$. واضح أن $Ker(\alpha\lambda) \subseteq Ker(\mu\pi)(\alpha\lambda)$.

ليكن $x \in Ker(\mu\pi)(\alpha\lambda)$ ، عندئذ فإن $(\mu\pi)(\alpha\lambda)(x) = 0$ ومنه فإن $(\alpha\lambda)(\mu\pi)(\alpha\lambda)(x) = 0$ وبالتالي فإن $\pi^2(\alpha\lambda)(x) = 0$ ومنه يكون $\pi(\alpha\lambda)(x) = 0$ ، ولما كان $(\alpha\lambda)(x) \in A$ نجد أن $(\alpha\lambda)(x) = 0$ ومنه فإن $x \in Ker(\alpha\lambda)$ وهكذا نجد أن $Ker(\mu\pi)(\alpha\lambda) \subseteq Ker(\alpha\lambda)$ ومنه فإن $Ker(\mu\pi)(\alpha\lambda) = Ker(\alpha\lambda)$. لنبرهن على أن $Ker(\alpha\lambda) = B$.

ليكن $y \in Ker(\alpha\lambda)$ ، عندئذ فإن $(\alpha\lambda)(y) = 0$ ومنه فإن $\lambda(y) = 0$ وأن $y + B = B$ ومنه فإن $y \in B$ ، أي إن $Ker(\alpha\lambda) \subseteq B$. ليكن $b \in B$ ، عندئذ فإن $b + B = B$ ومنه يكون $\lambda(b) = B = 0$ ومنه $(\alpha\lambda)(b) = 0$ وبالتالي فإن $b \in Ker(\alpha\lambda)$ ومنه $B \subseteq Ker(\alpha\lambda)$ وهكذا فإن $Ker(\alpha\lambda) = B$. ولما

كان $S \in (\mu\pi)(\alpha\lambda)$ عنصراً جامداً فإن $Ker(\mu\pi)(\alpha\lambda)$ هو حد مباشر في M وبالتالي فإن $Ker(\alpha\lambda) = B$ حد مباشر في M.

$(2) \Leftarrow (1)$. لنفرض أن K حد مباشر للمودول M وأن $f: M \to K$ تشاكل مودولات غامر ولنفرض أيضاً أن $\pi: M \to K$ التشاكل الإسقاطي الغامر. لما كان $M / Ker(f) \cong Im(f) = K$ وأن M هو D_2-مودول فإن $Ker(f)$ حد مباشر في M ومنه فإن التشاكل f منتظم وبالتالي يوجد $g \in S$ بحيث $fgf = f$ وهذا يبين أن $fg \in S$ عنصر جامد ولما كان $fg(x) \in K$ أياً كان $x \in M$ وأن $x = fg(x) + (1 - fg)(x)$ نجد أن $\pi(x) = fg(x)$ ومنه فإن $fg = \pi$ وهكذا فإن المودول M إسقاطي مباشر.

3. المـــودولات مــن النـــوع C_2.

تعريـــــف [7].

ليكن M مودولاً فوق حلقة R. نقول عن M إنه C_2-مودول إذا كان لأجل أي مودولين جزئيين A, B من المودول M يحققان إن $B \cong A$ وكان A حد مباشر في M ينتج أن B حد مباشر في M.

تمهيديـــــة 3-1.

ليكن M مودولاً فوق حلقة R. إذا كان M هو C_2-مودول، عندئذ فإن أي حد مباشر للمودول M هو أيضاً C_2-مودول.

البرهـــــان.

لنفرض أن المودول M هو C_2-مودول وليكن N حداً مباشراً في M، عندئذ $M = N \oplus K$ حيث K مودول جزئي في M. لنفرض أن A حد مباشر

للمودول N، عندئذ $N = A \oplus A'$ حيث A' مودول جزئي في N، وليكن B مودولاً جزئياً آخر في N بحيث إن $B \cong A$. لما كان:

$$M = N \oplus K = A \oplus A' \oplus K$$

نجد أن A حد مباشر للمودول M. فضلاً عن ذلك، لما كان $B \subseteq N \subseteq M$ نجد أن B مودول جزئي في M ولما كان $B \cong A$ وأن M هو C_2-مودول نجد أن B حد مباشر في M ومنه فإن $M = B \oplus B'$ حيث B' مودول جزئي في M. ولما كان $B \subseteq N$ نجد أن $N = B \oplus (N \cap B')$ ومنه فإن B حد مباشر في N وهذا يبين أن N هو C_2-مودول.

مبرهنـــــة 3-2.

ليكن M مودولاً فوق حلقة R. الشروط الآتية متكافئة:

1 - المودول M هو C_2-مودول.

2 - لأجل أي حدين مباشرين A, B للمودول M فإن أي تشاكل مودولات متباين $f : A \to B$ ينشطر.

3 - لأجل أي حد مباشر A للمودول M فإن أي تشاكل مودولات متباين $f : A \to M$ ينشطر.

البرهـــــان.

$(1) \Rightarrow (2)$. لنفرض أن M هو C_2-مودول. وليكن A, B حدين مباشرين للمودول M ولنفرض أن $f : A \to B$ تشاكل مودولات متباين. عندئذ فإن التشاكل $f : A \to Im(f)$ هو تماثل، أي إن $A \cong Im(f)$. ولما كان A حداً مباشراً للمودول M وأن M هو C_2-مودول نجد أن $Im(f)$ حد مباشر في M وبالتالي فإن $M = Im(f) \oplus K$. ولما كان $Im(f) \subseteq B$ نجد أن:

$$B = Im(f) \oplus (B \cap K)$$

وهذا يبين أن $Im(f)$ حد مباشر في B وبالتالي فإن التشاكل المتباين f ينشطر.

$(2)\Leftarrow(3)$. واضح.

$(3)\Leftarrow(1)$. ليكن A حداً مباشراً للمودول M و B مودولاً جزئياً في M بحيث إن $A\cong B$. لنفرض أن $\alpha: A\to B$ هذا التشاكل ولنفرض أيضاً أن $\tau: B\to M$ تشاكل الاحتواء القانوني، عندئذ فإن:

$$\tau\alpha: A\to M$$

تشاكل مودولات متباين وحسب الفرض فإن التشاكل $\tau\alpha$ ينشطر وبالتالي فإن $Im(\tau\alpha)$ حد مباشر في M ولما كان:

$$Im(\tau\alpha)=\tau\alpha(A)=\tau(B)=B$$

نجد أن B حد مباشر للمودول M ومنه فإن M هو C_2-مودول.

مبرهنـــــة 3-3.

ليكن M مودولاً فوق حلقة R وأن $S=End_R(M)$. عندئذ لأجل أي عنصر جامد $e\in S$ ولأجل أي عنصر $f\in S$ الشروط الآتية متكافئة:

1 – المودول M هو C_2-مودول.

2 – كل تماثل $\alpha: Im(f)\to Im(e)$ يمكن تمديده إلى تشاكل $M\to M$.

3 – إذا كان $Ker(f)=Ker(e)$ فإن $e\in fS$.

4 – إذا كان $Ker(f)=Ker(e)$ فإن $eS=fS$.

5 – إذا كان $Ker(fe)=Ker(e)$ فإن $Im(fe)$ حد مباشر في M.

البرهـــــان.

$(1)\Leftarrow(2)$. لنفرض أن M هو C_2-مودول وأن $\alpha: Im(f)\to Im(e)$ تماثل مودولات، عندئذ فإن $Im(f)$ حد مباشر في M وبالتالي فإن $M=Im(f)\oplus K$ حيث K مودول جزئي في M.

لنفرض أن $\pi : M \to Im(f)$ التشاكل الإسقاطي الغامر، عندئذ فإن $\alpha\pi : M \to Im(e)$ تشاكل مودولات غامر وأنه أياً كان $z \in Im(f)$ فإن $\alpha\pi(z) = \alpha(z)$ وهذا يبين أن $\alpha\pi : M \to M$ هو تمديد للتماثل α.

$(2) \Leftarrow (3)$. لنفرض أن $Ker(f) = Ker(e)$، عندئذ فإن العلاقة $\alpha : Im(f) \to Im(e)$ المعرفة بالشكل $\alpha(f(m)) = e(m)$ وذلك أياً كان $m \in M$ هي تشاكل مودولات متباين، لأنه إذا كان $f(m) \in Ker(\alpha)$ فإن $\alpha(f(m)) = 0$ وبالتالي فإن $e(m) = 0$، ومنه فإن:

$$m \in Ker(e) = Ker(f)$$

وبالتالي يكون $f(m) = 0$. وهذا التشاكل غامر أيضاً، لأنه إذا كان $z \in Im(e)$ فإن $z = e(m)$ حيث $m \in M$ وأن $f(m) \in Im(f)$ ويحقق $\alpha(f(m)) = e(m)$ ومنه نجد أن $\alpha : Im(f) \to Im(e)$ تماثل وحسب الفرض فإنه يوجد $g \in S$ تمديد للتماثل α، أي إن:

$$g = \alpha\big|_{Im(f)} : Im(f) \to M$$

ومنه نجد أنه أياً كان $m \in M$ فإن:

$$e(m) = \alpha(f(m)) = gf(m)$$

ومنه يكون $e = gf \in Sf$.

$(3) \Leftarrow (4)$. لنفرض أن $Ker(f) = Ker(e)$، عندئذ حسب الفرض فإن $e \in Sf$ومنه فإن $Se \subseteq Sf$.

من جهة أخرى، لما كان:

$$Ker(f) = Ker(e) = Im(1_M - e)$$

نجد أن $f(1_M - e) = 0$ ومنه فإن $f = fe \in Se$ وبالتالي فإن $Sf \subseteq Se$ وهكذا نجد أن $Se = Sf$.

$(4)\Leftarrow(5)$. لنفرض أن $Ker(fe)=Ker(e)$، عندئذ حسب الفرض فإن $Sfe=Se$ ومنه يوجد عنصر $\lambda\in S$ تحقق إن $e=\lambda fe$ وأن $e=e\lambda fe$ ومنه يكون $e\lambda=(e\lambda)f(e\lambda)$. لنضع $g=fe\lambda$ فنجد أن $g\in S$ عنصر جامد وأن:

$$Im(g)=Im(fe\lambda)\subseteq Im(fe)$$

كما أن:

$$Im(fe)=Im(fee)=Im(fe\lambda fe)\subseteq Im(fe\lambda)=Im(g)$$

ومنه فإن $Im(g)=Im(fe)$ وبالتالي فإن $Im(fe)$ حد مباشر في M.

$(5)\Leftarrow(1)$. ليكن A حداً مباشراً للمودول M وأن B مودول جزئي في M بحيث $A\cong B$ ولنفرض أن $\alpha:A\to B$ هذا التشاكل. لما كان A حداً مباشراً في M فإنه يوجد عنصر جامد $g\in S$ بحيث إن $A=Im(g)$ ومنه فإن $\alpha g:M\to B$ تشاكل مودولات وأن:

$$Ker(\alpha g)=g^{-1}(Ker(\alpha))=g^{-1}(0)=Ker(g)$$

وبحسب الفرض فإن $Im(\alpha g)$ حد مباشر في M ولما كان:

$$Im(\alpha g)=\alpha g(M)=\alpha(A)=B$$

نجد أن B حد مباشر في M ومنه فإن المودول M هو C_2-مودول.

تعريـــــف [2].

ليكن M مودولاً فوق حلقة R وأن $S=End_R(M)$. نقول عن المودول M إنه أفقي مباشر إذا كان لأجل كل حد مباشر K للمودول M ولأجل كل تشاكل متباين $f:K\to M$ يوجد عنصر $g\in S$ يحقق أن $gf=\tau$، حيث $\tau:K\to M$ تشاكل الاحتواء القانوني.

مبرهنـــــة 3-4.

ليكن M مودولاً فوق حلقة R وأن $S=End_R(M)$. عندئذ لأجل أي عنصر جامد $e\in S$ ولأجل أي عنصر $f\in S$ الشروط الآتية متكافئة:

1 - المودول M هو C_2-مودول.

2 - إذا كان $f\in eS$ وأن $e\in \ell_S(Ker(f))$ فإن $fS=eS$.

3 - إذا كان $Ker(f)=Ker(e)$ فإن $e\in fS$.

البرهــــان.

$(1)\Leftarrow(2)$. لنفرض أن M هو C_2-مودول وأن $f\in eS$ ولنفرض أيضاً أن $e\in \ell_S(Ker(f))$، عندئذ فإن $e(Ker(f))=0$ ومنه فإن $Ker(f)\subseteq Ker(e)$. ولما كان $f\in Se$ فإنه يوجد $g\in S$ بحيث إن $f=ge$ وهذا يبين أن $Ker(e)\subseteq Ker(f)$ومنه نجد أن $Ker(f)=Ker(e)$ وبحسب المبرهنة (3-3) نجد أن $Sf=Se$.

$(2)\Leftarrow(3)$. لنفرض أن $Ker(f)=Ker(e)$، عندئذ فإن $Ker(f)=Ker(e)=Im(1-e)$ ومنه فإن $f(1-e)=0$ وبالتالي يكون $f=fe\in Se$.

من جهة أخرى، لما كان $Ker(f)=Ker(e)$ فإن $e(Ker(f))=0$ ومنه فإن $e\in \ell_S(Ker(f))$ وبالتالي نجد أن $Se\subseteq \ell_S(Ker(f))$.

ليكن $\lambda\in \ell_S(Ker(f))$، عندئذ فإن $\lambda(Ker(f))=0$ ومنه نجد أن:

$$\lambda(Im(1-e))=Im(\lambda(1-e))=\lambda(Ker(f))=0$$

ومنه فإن $\lambda(1-e)=0$، أي إن $\lambda=\lambda e\in Se$ ومنه يكون $\ell_S(Ker(f))\subseteq Se$ وهكذا نجد أن:

$$\ell_S(Ker(f))=Se=Sf$$

$(3)\Leftarrow(1)$. لنفرض أن A حد مباشر للمودول M وأن B مودول جزئي في M بحيث إن $A\cong B$، لنفرض أن هذا التماثل هو $\alpha: A\to B$. لما كان A حداً مباشراً في M فإنه يوجد عنصر جامد $g\in S$ بحيث إن $Im(g)=A$ ومنه نجد أن $\alpha g: M\to B$ تشاكل مودولات وأن:

$$Ker(\alpha g)=g^{-1}(Ker(\alpha))=g^{-1}(0)=Ker(g)$$

وحسب الفرض نجد أن $\ell_S(Ker(\alpha g))=S\alpha g$. ولما كان $Ker(\alpha g)=Ker(g)$ نجد أن:

$$g(Ker(\alpha g))=0$$

ومنه فإن $g\in\ell_S(Ker(\alpha g))=S\alpha g$ وبالتالي يوجد $\lambda\in S$ بحيث إن $g=\lambda\alpha g$ وإن $g=g\lambda\alpha g$ ومنه يكون $g\lambda=(g\lambda)\alpha(g\lambda)$. لنضع $\mu=\alpha g\lambda$ فنجد أن $\mu\in S$ عنصر جامد وبالتالي فإن $Im(\mu)$ حد مباشر في M. فضلاً عن ذلك، إن:

$$Im(\mu)=Im(\alpha g\lambda)\subseteq Im(\alpha g)=Im(\alpha g\lambda\alpha g)\subseteq Im(\alpha g\lambda)=Im(\mu)$$

ومنه فإن:

$$Im(\mu)=Im(\alpha g)=\alpha g(M)=\alpha(A)=B$$

وهذا يبين أن B حد مباشر للمودول M ومنه فإن المودول M هو C_2-مودول.

مبرهنـــــة 3-5.

ليكن M مودولاً فوق حلقة R وأن $S=End_R(M)$. عندئذ الشرطان الآتيان متكافئان:

1 - المودول M أفقي مباشر.

2 - المودول M هو C_2-مودول.

البرهـــــان.

$(1)\Leftarrow(2)$. لنفرض أن المودول M أفقي مباشر وليكن A,B مودولين جزئيين في M بحيث إن $A\cong B$ وأن A حد مباشر في M ولنفرض أن $\alpha:A\to B$ هو هذا التماثل وأن $\tau_A:A\to M$ و $\tau_B:B\to M$ تشاكلي الاحتواء القانونيين، عندئذ فإن $\tau_B\alpha:A\to M$ هو تشاكل مودولات متباين ولما كان المودول M أفقي مباشر فإنه يوجد $\lambda\in S$ بحيث إن $\lambda(\tau_B\alpha)=\tau_A$.

لنفرض أن $\pi:M\to A$ التشاكل الإسقاطي الغامر، عندئذ يكون $\lambda(\tau_B\alpha)\pi=\tau_A\pi=\pi$ وبالتالي فإن $(\pi\lambda)(\tau_B\alpha)\pi=\pi^2=\pi$ وهذا يبين أن $Im(\pi\lambda)=Im(\pi)=A$، لأن:

$$Im(\pi)=Im(\pi\lambda)(\tau_B\alpha)\pi\subseteq Im(\pi\lambda)\subseteq Im(\pi)$$

فضلاً عن ذلك، إن $(\pi\lambda)(\tau_B\alpha)(\pi\lambda)=\pi\lambda$ وهذا يبين أن $(\tau_B\alpha)(\pi\lambda)\in S$ عنصر جامد ومنه فإن $Im(\tau_B\alpha)(\pi\lambda)$ حد مباشر في M وأن:

$$Im(\tau_B\alpha)(\pi\lambda)=(\tau_B\alpha)(\pi\lambda)(M)=(\tau_B\alpha)(A)=B$$

ومنه فإن B حد مباشر في M.

$(2)\Leftarrow(1)$. لنفرض أن K حد مباشر للمودول M وأن $\alpha:K\to M$ تشاكل مودولات متباين، عندئذ فإن $\alpha:K\to\alpha(K)$ تماثل، أي إن $K\cong\alpha(K)$ ولما كان M هو C_2-مودول وأن K حد مباشر للمودول M نجد أن $\alpha(K)$ حد مباشر للمودول M ومنه فإن $M=\alpha(K)\oplus N$. لنفرض أن $\pi:M\to\alpha(K)$ التشاكل الإسقاطي الغامر، عندئذ فإن $\pi(M)=\alpha(K)$ ومنه نجد أن:

$$\pi(M)=\pi(\pi(M))=\pi(\alpha(K))$$

ولما كان لأجل كل $k\in K$ فإن $\alpha(k)\in\alpha(K)=\pi(M)$ نجد أن $\pi(\alpha(k))=\alpha(k)$ وهذا يبين لنا أن $\pi\alpha=\alpha$ ولما كان $\alpha:K\to\alpha(K)$ تماثل

نجد أن $\alpha^{-1}\pi\alpha=\tau$ حيث $\tau:K\to M$ تشاكل الاحتواء القانوني. لنفرض أن $f=\alpha^{-1}\pi$ فنجد أن $f\in S$ وأن $f\alpha=\tau$ وهذا يبين أن المودول M أفقي مباشر.

ليكن M مودولاً فوق حلقة R وأن $S=End_R(M)$. لنأخذ المجموعتين الآتيتين:

$$I(M)=\{\ f:f\in S;Im(f)\ \text{is direct sumanndof}\ M\ \}$$

$$L(M)=\{\ f:f\in S;Ker(f)\ \text{is direct sumanndof}\ M\ \}$$

إن كل مجموعة من المجموعتين $I(M)$ و $L(M)$ هي مجموعة جزئية وغير خالية من S.

مبرهنـــــة 3-6.

ليكن M مودولاً فوق حلقة R وأن $S=End_R(M)$. عندئذ الشرطان الآتيان متكافئان:

1 - المودول M هو D_2-مودول و C_2-مودول.

2 - $I(M)=L(M)$.

البرهـــــان.

$(1)\Leftarrow(2)$. لنفرض أن المودول M هو D_2-مودول و C_2-مودول. ليكن $f\in I(M)$، عندئذ فإن $f\in S$ وأن المودول الجزئي $Im(f)$ حد مباشر في M، لما كان $M/Ker(f)\cong Im(f)$ وأن المودول M هو D_2-مودول نجد أن $Ker(f)$ حد مباشر للمودول M، ومنه فإن $f\in L(M)$، وهكذا نجد أن $I(M)\subseteq L(M)$.

ليكن $g\in L(M)$، عندئذ فإن $g\in S$ وأن $Ker(g)$ حد مباشر للمودول M، وبالتالي يوجد مودول جزئي B في M بحيث إن $M=Ker(g)\oplus B$. لنفرض أن $\pi:M\to B$ التشاكل الإسقاطي الغامر، عندئذ فإن $Im(\pi)=B$، ومنه فإن:

$$Im(\pi)=B\cong M/Ker(g)\cong Im(g)$$

ولما كان المودول M هو C_2-مودول وأن $Im(\pi)=B$ حد مباشر للمودول M نجد أن $Im(g)$ حد مباشر للمودول M ومنه فإن $g\in I(M)$، وبالتالي يكون $L(M)\subseteq I(M)$. مما سبق نجد أن:

$$I(M)=L(M)$$

$(2)\Leftarrow(1)$. لنفرض أن $I(M)=L(M)$، ولنبرهن أولاً على أن المودول M هو D_2-مودول.

ليكن A حداً مباشراً للمودول M وأن $f:M\rightarrow A$ تشاكلاً مودولياً غامراً، عندئذ فإن $f\in S$ وأن $Im(f)=A$ حد مباشر للمودول M ومنه فإن $f\in I(M)=L(M)$ وبالتالي فإن $Ker(f)$ حد مباشر للمودول M وهذا يبين أن التشاكل f ينشطر، وبحسب المبرهنة $(2-2)$ نجد أن المودول M هو D_2-مودول.

لنبرهن الآن على أن المودول M هو C_2-مودول.

ليكن B حداً مباشراً للمودول M وأن $g:B\rightarrow M$ تشاكلاً مودولياً متبايناً. لنفرض أن $\pi:M\rightarrow B$ التشاكل الإسقاطي الغامر، عندئذ فإن $g\pi:M\rightarrow M$ هو تشاكل للمودول M، أي إن $g\pi\in S$، وأن:

$$Ker(\pi)\subseteq Ker(g\pi)$$

ليكن $x\in Ker(g\pi)$، عندئذ فإن $g\pi(x)=0$ ومنه فإن $\pi(x)\in Ker(g)=0$ وبالتالي يكون $x\in Ker(\pi)$، وهكذا فإن $Ker(g\pi)\subseteq Ker(g)$. ما سبق نجد أن $Ker(g\pi)=Ker(\pi)$. ولما كان $Ker(\pi)$ حداً مباشراً للمودول M، نجد أن $Ker(g\pi)$ حد مباشر للمودول M، ولما كان $g\pi\in S$ وبحسب الفرض فإن $g\pi\in L(M)=I(M)$ ومنه فإن $Im(g\pi)$ حد مباشر للمودول M، ولما كان:

$$Im(g\pi)=g\pi(M)=g(B)=Im(g)$$

نجد أن $Im(g)$ حد مباشر للمودول M، أي إن التشاكل g ينشطر، وبحسب المبرهنة (3−2) نجد أن المودول M هو C_2-مودول.

مبرهنـــــة 3−7.

ليكن M مودولاً فوق حلقة R وأن $S = End_R(M)$. عندئذ الشرطان الآتيان متكافئان:

1 − المودول M هو D_2-مودول وأن $I(M) = S$.

2 − الحلقة S منتظمة.

البرهـــــان.

$(1) \Leftarrow (2)$. لنفرض أن المودول M هو D_2-مودول وأن $I(M) = S$. ليكن $f \in S$، عندئذ فإن $f \in I(M)$، ومنه فإن المودول الجزئي $Im(f)$ حد مباشر في M، لما كان:

$$M/Ker(f) \cong Im(f)$$

وأن المودول M هو D_2-مودول نجد أن $Ker(f)$ حد مباشر للمودول M، وبحسب المبرهنة (1−4) نجد أن العنصر $f \in S$ هو عنصر منتظم ومنه فإن الحلقة S منتظمة.

$(2) \Leftarrow (1)$. لنفرض أن الحلقة S منتظمة. لنبرهن أولاً على أن $I(M) = S$. واضح بحسب التعريف أن $I(M) \subseteq S$. ليكن $f \in S$، لما كانت الحلقة S منتظمة، عندئذ حسب المبرهنة (1−4) فإن $Im(f)$ حد مباشر في M ومنه نجد أن $f \in I(M)$ وبالتالي يكون $S \subseteq I(M)$، وهذا يبين أن $I(M) = S$.

لنبرهن الآن على أن المودول M هو D_2-مودول. ليكن A حداً مباشراً للمودول M ولنفرض أن $g: M \to A$ تشاكل مودولات غامر، عندئذ فإن $g \in S$، ولما كانت الحلقة S منتظمة، عندئذ حسب المبرهنة (1−4) فإن $Ker(g)$ حد مباشر للمودول M وهذا يبين أن التشاكل g ينشطر، وبحسب المبرهنة (2−2) نجد أن المودول M هو D_2-مودول.

مبرهنــــة 3-8.

ليكن M مودولاً فوق حلقة R وأن $S = End_R(M)$. عندئذ الشرطان الآتيان متكافئان:

1 – المودول M هو C_2-مودول وأن $L(M) = S$.

2 – الحلقة S منتظمة.

البرهــــان.

$(1) \Leftarrow (2)$. لنفرض أن المودول M هو C_2-مودول وأن $L(M) = S$. ليكن $f \in S$، عندئذ حسب الفرض فإن $f \in L(M)$، ومنه فإن $Ker(f)$ حد مباشر للمودول M وبالتالي يوجد مودول جزئي A في M بحيث إن $M = Ker(f) \oplus A$، ومنه نجد أن $A \cong M/Ker(f) \cong Im(f)$، ولما كان A حداً مباشراً للمودول M وأن المودول M هو C_2-مودول، ينتج أن $Im(f)$ حد مباشر للمودول M. أصبح لدينا كل من $Im(f)$ و $Ker(f)$ حد مباشر للمودول M، وحسب المبرهنة (1-4) نجد أن العنصر $f \in S$ منتظم وبالتالي تكون الحلقة S منتظمة.

$(2) \Leftarrow (1)$. لنفرض أن الحلقة S منتظمة. لنبرهن أولاً على أن $L(M) = S$. واضح بحسب التعريف أن $L(M) \subseteq S$. ليكن $f \in S$، لما كانت الحلقة S منتظمة، عندئذ حسب المبرهنة (1-4) فإن $Ker(f)$ حد مباشر للمودول M ومنه نجد أن $f \in L(M)$ وبالتالي يكون $S \subseteq L(M)$، وهذا يبين أن $L(M) = S$.

لنبرهن الآن على أن المودول M هو C_2-مودول. ليكن B حداً مباشراً للمودول M ولنفرض أن $g : B \to M$ تشاكل مودولات متباين، ولنفرض أيضاً أن $\pi : M \to B$ التشاكل الإسقاطي الغامر، عندئذ فإن $g\pi : M \to M$ تشاكل للمودول M، أي إن $g\pi \in S$، ولما كانت الحلقة S منتظمة، عندئذ حسب المبرهنة (1-4) نجد أن $Im(g\pi)$ حد مباشر للمودول M، ولما كان:

$$Im(g\pi) = g\pi(M) = g(B) = Im(g)$$

نجد أن المودول الجزئي $Im(g)$ حد مباشر للمودول M وهذا يبين أن التشاكل g ينشطر، وبحسب المبرهنة (3-2) نجد أن المودول M هو C_2-مودول.

المــراجـــع العــلميـــــة.

[1] – Anderson, F. W. and Fuller K. R., " Rings and Categories of Modules ", New York. Springer 1973.

[2] – Derya, K. and Rachid, T., " A Note on Endomorphism Rings of Semi-Projective Modules ", Math. Proc. Royal Irish Academy. 112A, No, 2, (2012), pp. 93 – 99.

[3] – Hamza, H., " I_0-Rings and I_0-Modules ", Math. J. Okayama Univ. **40**. (1998), p. 91–97 .

[4] – Kasch, F., " Modules and Rings ", London Math. Soc. Mono. 1982.

[5] – Von Neumann, J., " On Regular Rings ", Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. (1936).

[6] – Ware, R., " Endomorphism Rings of Projective Modules ", Trans. Amer. Math. Soc. 155, p. 233 – 256. (1971).

[7] – Wisbauer, R., " Foundations of Modules and Rings ", Gordon, 1991.