حل مسألة ديرخليه باستخدام تحويل هانكل الكروي المنتهي – ZZ المشترك على قشرة كروية

طالبة الدكتوراه: رقية رضوان

معيدة في قسم الرياضيات – كلية العلوم – جامعة البعث

الأستاذ المشرف: أ. د. محمد عامر

ملخّص البحث

في هذا البحث تمَّ تعريف تحويل هانكل الكروي المنتهي على قشرة كروية واستنتجنا واحدة من أهم خواصه وهي تحويل هانكل الكروي المنتهي على قشرة كروية لمؤثر بيسل التفاضلي، وقمنا بإثبات هذه الخاصة، تمَّ مناقشة شرط ديرخليه– ديرخليه لأجل هذه الخاصة، كما أنه تمَّ تعريف تحويل هانكل الكروي المنتهي –ZZ المشترك على قشرة كروية، وقد خصصنا هذا البحث في حل مسألة ديرخليه – ديرخليه على قشرة كروية باستخدام طريقة تحويل هانكل الكروي المنتهي – ZZ المشترك على قشرة كروية حيث استخدام هذا التحويل المشترك ننتقل لمعادلة جبرية بشكل مباشر.

أيضاً تمَّ دراسة المسألة لأجل حالتين هما: شروط ابتدائية وحدية متغيرة وشروط ابتدائية وحدية ثابتة، ننوه أيضاً تمَّ رسم جميع الأشكال يدوياً على برنامج بوربوينت لتوضيح فكرة انتقال الحرارة على قشرة كروية.

كلمات مفتاحية:

تحويل هانكل الكروي المنتهي على قشرة كروية، تحويل ZZ، ديرخليه–ديرخليه، معادلة تفاضلية جزئية، معادلة جبرية.

Solving the Dirichlet problem by using the joint Finite Spherical Hankel-ZZ Transform On a Spherical Shell

Phd.student: **Supervised by:**

Roqia Rdwan **Prof: Mohammad Amer**

Summary

In this research, the finite spherical Hankel transform on a spherical shell was defined, and we deduced one of its most important properties, which is the finite spherical Hankel transform of the Bessel differential operator on a spherical shell, and we proved this property, The Dirichlet-Dirichlet condition has been discussed for this property, and was defined joint finite spherical Hankel ZZ-transform on a spherical shell, and we have devoted this research to solving the Dirichlet-Dirichlet problem on a spherical shell using the method of the joint finite spherical Hankel -ZZ transform on a spherical shell where using this common the transform we move to an algebraic equation directly.

The problem was also discussed for two cases: variable initial and boundary conditions and constant initial and boundary conditions.

all figures were drawn manually using Microsoft PowerPoint, to clarify the idea of heat transfer on a spherical shell.

Key Words:

Finite Spherical Hankel Transform on spherical a shell, ZZ Transform, Dirichlet-Dirichlet, Partial Differential Equation, algebraic equation.

1.مقدمة:

متسلسلة فورييه – بيسل وتحويل هانكل المنتهي مفيدة للغاية في العلوم الفيزيائية والهندسية، وهي تعتبر تقنيات عملية لحل مسائل القيمة الحدية المعبر عنها في الإحداثيات الاسطوانية، يمكن تعميم متسلسلة فورييه – بيسل وتحويل هانكل المنتهي إلى الإحداثيات الكروية [3]. تحويل هانكل الكروي المنتهي تمَّ تقديمه بواسطة (Chen) عام 1982 [5] وهو تحويل تكاملي يحتوي على دوال بيسل الكروية ذات الترتيب الصحيح الموجب كنواة له، حيث تعتبر دوال بيسل الكروية عبارة عن حل معادلة بيسل الكروية، كما أنَّ دوال بيسل الكروية ترتبط بدوال بيسل الاسطوانية ذات الرتيب نصف الصحيح الموجب [2]، وتظهر أهمية هذا التحويل في حل العديد من المسائل ذات التماثل الكروي ذات الشروط الحدية والابتدائية. في عام 2016 قام زين العابدين ظفر بتعديل تحويل سوميدو وقدَّم تحويلا جديداً عُرِف باسم تحويل ZZ حيث أنَّ لهذا التحويل دور مهم في حل معادلات تفاضلية جزئية. [6,7]

تحويلي هانكل الكروي المنتهي المعرَّف على قشرة كروية و ZZلهما أهمية كبيرة في حل المعادلات التفاضلية الجزئية حيث بتطبيق كل تحويل بشكل مفرد على معادلة تفاضلية جزئية يعطينا معادلة تفاضلية عادية، لكن دمج هذين التحويلين في تحويل واحد ينقلنا لمعادلة جبرية وذلك عند تطبيق التحويل المشترك على معادلة تفاضلية جزئية، وهذه الطريقة تعتبر أسرع بالحل من تطبيق كل تحويل بشكل مفرد.

2. أهمية وهدف البحث:

الهدف من هذا البحث هو مناقشة وحل مسألة رياضية فيزيائية تسمى مسألة ديرخليه معرَّفة على قشرة كروية وذلك باستخدام طريقة جديدة هي دمج تحويل هانكل الكروي المنتهي معرَّف على مجال قشرة كروية مع تحويل ZZ في تحويل واحد مشترك حيث

تكمن أهمية هذا التحويل المشترك في حل معادلات تفاضلية جزئية ذات تماثل كروي وبالتالي نحصل على معادلة جبرية بشكل مباشر.

3. طرائق البحث: تعاريف ومفاهيم أساسية:

3.1. تعاريف:

3.1.1. التماثـــــــــــل الكـــــــــــروي:

هو أن يكون الجسم كروياً تماماً ، كلنا يعلم أن للكرة عدد لا نهائي من الأقطار ، ولكن دعونا نتخير قطرين كل منهما عمودي على الأخرى ، ليكون الجسم متماثل كروياً يجب أن يكون هذان القطران متساويان تماماً ، وإن فرق احدهما عن الآخر بميلي متر فلن يكون هذا الجسم متماثلاً كروياً.

3.1.2. الكرة الجوفاء: هي عبارة عن كرة فارغة من الداخل.

3.1.3. القشرة الكروية: هي تعميم للحلقة على ثلاثة أبعاد، إنها منطقة الكرة الواقعة بين كرتين متحدة المركز من أنصاف أقطار مختلفة.

3.2. معادلة بيسل الكروية [4]:

تعطى معادلة بيسل الكروية بالشكل:

$$x^2 z'' + 2xz' + (x^2 - l(l+1))z = 0 \quad \dots (3,2,1)$$

وهي عبارة عن معادلة تفاضلية عادية من الرتبة الثانية، ناتجة عن فصل المتغيرات لمؤثر لابلاس في إحداثيات كروية، والحل العام غير الشاذ هو دوال بيسل الكروية من النوع الأول والترتيب l وهي $z(x) = j_l(x)$ حيث $l = 0,1 \dots$

حيث:

$$j_l(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} J_{l+\frac{1}{2}}(x) \quad ; l = 0,1,2, \ldots$$

حيث: $J_{l+\frac{1}{2}}(x)$ دوال بيسل الاسطوانية من النوع الأول والرتبة $l + \frac{1}{2}$

3.3. مؤثر بيسل التفاضلي الكروي:

يعطى مؤثر بيسل الكروي بالشكل:

$$\Delta_l = \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2 z'(r)\right) - \frac{l(l+1)}{r^2} z(r) \quad \ldots (3,3,1)$$

3.4. علاقات تكرار دوال بيسل الكروية [4]:

$$\frac{d}{dx}\left(x^{l+1} j_l(x)\right) = x^{l+1} j_{l-1}(x) \quad \ldots (3,4,1)$$

3.5. تعريف متسلسلة فورييه – بيسل المعدلة (بالإحداثيات الكروية) على المجال $[0,a]$ [3]

$$z(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n Z_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n j_l(k_n x)$$

$$c_n = \frac{\int_0^a x^2 z(x) j_l(k_n x)\, dx}{\|j_l(k_n x)\|^2} \quad ; \|j_l(k_n x)\|^2 = \int_0^a x^2 \left(j_l(k_n x)\right)^2 dx$$

حيث $\|j_l(k_n x)\|^2$ علاقة تعامد دوال بيسل الكروية على المجال $[0,a]$.

3.6. تعريف تحويل هانكل الكروي المنتهي $FSHT$ [3]:

لتكن $f(r)$ دالة محدودة ومستمرة قطعياً على المجال $[0,a]$ عندئذٍ يُعرَّف تحويل هانكل الكروي المنتهي بالشكل:

$$\tilde{F}_l(k_i) = FSH_l\{f(r)\} = \int_0^a r^2 f(r) j_l(rk_i)\, dr \quad ; \quad l = 0,1 \quad \dots (3,6,1)$$

حيث $r^2 j_l(rk_i)$ نواة تحويل هانكل الكروي المنتهي، $j_l(rk_i)$ دالة بيسل الكروية من النوع الأول والرتبة l.

ملاحظة:

إذا كانت $l = 0$ نقول أنَّ $FSH_0\{f(r)\}$ تحويل هانكل الكروي المنتهي من الرتبة الصفرية وهكذا...

3.7. تعريف تحويل ZZ [1]

لتكن لدينا الدالة $f(t) \;\; ; \;\; t \geq 0$ معرفة على المجال $[0,\infty[$ عندئذٍ يعرَّف تحويل ZZ بالشكل:

$$ZZ\{f(t)\} = \frac{s}{v} \int_0^\infty f(t) e^{-\frac{s}{v}t}\, dt \quad \dots (3,7,1)$$

إنَّ تحويل ZZ موجود لأجل الدوال التي تنتمي للمجموعة A حيث:

$$A = \left\{ f(t) / \exists M \, , \beta_1, \beta_2 > 0 \, , |f(t)| < \alpha e^{\frac{|t|}{\beta_i}} \, ; j \in (-1)^j \times [0,\infty[\right\}$$

ويعرَّف التحويل العكسي بالشكل:

$$f(t) = ZZ^{-1}\{f(t)\} \qquad \dots (3,7,2)$$

3.8. خاصة المشتق[1] :

تعطى خاصة المشتق الأول:

$$ZZ\{f'(t)\} = \frac{s}{v} Z(v,s) - \frac{s}{v} f(0) \quad \dots (3,8,1)$$

3.9. مبرهنة التلاف [6]:

لتكن لدينا الدالتين $g_2(t),g_1(t)$ دالتين و $Z_2(v,s),Z_1(v,s)$ تحويلي ZZ للدالتين $g_2(t),g_1(t)$ على الترتيب عندئذٍ علاقة التلاف للدالتين $g_2(t),g_1(t)$ تعطى بالشكل التالي:

$$g_1(t) * g_2(t) = \frac{s}{v} ZZ^{-1}\{Z_1(v,s) \times Z_2(v,s)\} \quad \dots (3,9,1)$$

حيث:

$$g_1(t) * g_2(t) = \int_0^t g_1(\tau) g_2(t-\tau)\, d\tau \quad \dots (3,9,2)$$

3.10. تحويل ZZ لبعض الدوال الأساسية [1]:

$$ZZ\{1\} = 1 \quad \dots (3,10,1)$$

$$ZZ\{e^{at}\} = \frac{s}{s - va} \quad \Rightarrow$$

$$ZZ\{e^{-at}\} = \frac{s}{s + va} \quad \Rightarrow \quad ZZ^{-1}\left(\frac{s}{s + va}\right) = e^{-at} \quad \dots (3,10,2)$$

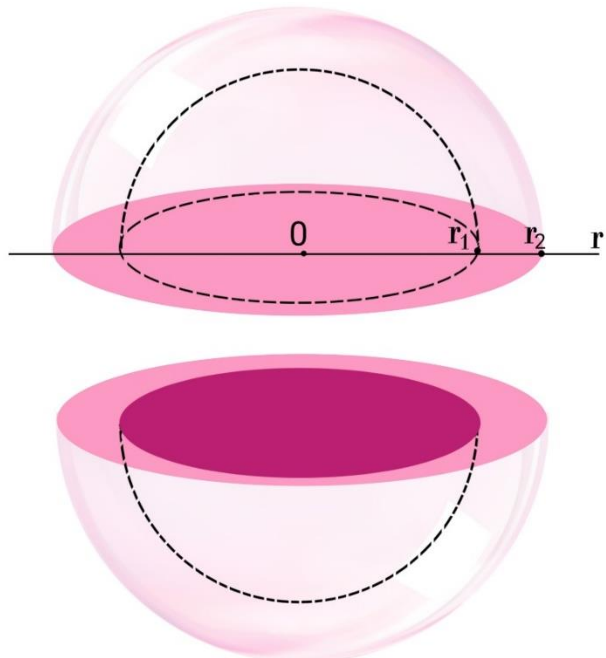
$$ZZ\{1 - e^{-at}\} = ZZ\{1\} - ZZ\{e^{-at}\} = 1 - \frac{s}{s + va}$$

$$= \frac{s + va - s}{s + va} = a\frac{v}{s + va}$$

$$\Rightarrow \quad ZZ^{-1}\left(\frac{av}{s + va}\right) = a(1 - e^{-at}) \quad \dots (3,10,3)$$

4.النتائج ومناقشتها:

4.1. تحويل هانكل الكروي المنتهي المعرَّف على قشرة كروية $FSHTA$



الشكل 1:عبارة عن رسم توضيحي للقشرة الكروية (أو ما يسمى مجال حلقي ثلاثي البعد)

4.1.1. مسألة شتورم ليوفيل:

لتكن لدينا معادلة بيسل الكروية:

$$(r^2 z')' + \left({k_n}^2 r^2 - l(l+1)\right) z = 0 \qquad ; \; r \in [r_1, r_2]$$

تحقق الشروط الحدية المتجانسة التالية:

$$h_1 j_l(k_n r_1) - k_n {j'}_l(k_n r_1) = 0$$

$$h_2 j_l(k_n r_2) + k_n {j'}_l(k_n r_2) = 0$$

والحل العام غير الشاذ لمعادلة بيسل الكروية يعطى بالشكل: $Z_n(r) = j_l(k_n r)$

حيث $j_l(k_n r)$ دالة بيسل الكروية من النوع الأول والرتبة l وتساوي:

$$j_l(rk_n) = \sqrt{\frac{\pi}{2rk_n}} J_{l+\frac{1}{2}}(rk_n) \quad ; \quad l = 0,1,2,3 \dots$$

و $J_{l+\frac{1}{2}}(rk_n)$ دالة بيسل الاسطوانية من النوع الأول والرتبة $l + \frac{1}{2}$

كما أنَّ k_n هي القيم الذاتية لمجموعة الدوال الذاتية $\{j_l(k_n r)\}$ المتعامدة في المجال المعرَّف على قشرة كروية مع دالة الوزن r^2، ومنه يمكن تعريف متسلسلة فورييه – بيسل المعدلة على المجال $[r_1, r_2]$ للدالة $z(r)$ بالشكل:

$$z(r) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n Z_n(r) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n j_l(k_n r)$$

حيث:

$$c_n = \frac{\int_{r_1}^{r_2} r^2 z(r) j_l(k_n r)\, dr}{\|j_l(k_n r)\|^2} \quad ; \quad \|j_l(k_n r)\|^2 = \int_{r_1}^{r_2} r^2 \left(j_l(k_n r)\right)^2 dr$$

حيث $\|j_l(k_n x)\|^2$ علاقة تعامد دوال بيسل الكروية على المجال $[r_1, r_2]$.

ومنه متسلسلة فورييه – بيسل المعدلة على المجال $[r_1, r_2]$ تصبح

$$z(r) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_{r_1}^{r_2} r^2 z(r) j_l(k_n r)\, dr \right) \frac{j_l(k_n r)}{\|j_l(k_n r)\|^2} \quad \dots (4,1,1)$$

4.1.2. تعريف $FSHAT$:

لتكن $z(r)$ دالة مستمرة قطعياً ومحدودة في المجال $[r_1, r_2]$ عندئذٍ يُمكن تعريف تحويل هانكل الكروي المنتهي على قشرة كروية الذي سنرمز له بالرمز $\bar{Z}_l(k_n) = R_l\{z(r)\}$ بالشكل:

$$\bar{Z}_l(k_n) = R_l\{z(r)\} = \int_{r_1}^{r_2} r^2 z(r) j_l(rk_n)\, dr \;\; ; \; l = 0,1 \ldots \quad (4,1,2,1)$$

حيث $r^2 j_l(rk_n)$ نواة تحويل هانكل الكروي المنتهي المعرَّف على قشرة كروية و $j_l(rk_n)$ دالة بيسل الكروية من النوع الأول والرتبة l

ملاحظة:

الرمز $R_l\{z(r)\}$ يعبر عن تحويل هانكل الكروي المنتهي المعرَّف على قشرة كروية وهو اختصار للرمز FSHTA

4.1.3. تعريف $IFSHA$:

يمكن تعريف التحويل العكسي لتحويل هانكل الكروي المنتهي المعرَّف على قشرة كروية بالشكل:

$$z(r) = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{Z}_l(k_n)\, \frac{j_l(k_n r)}{\|j_l(k_n r)\|^2}$$

الإثبات:

لتكن $z(r)$ دالة حقيقة لـِ r ، من متسلسلة فوريه – بيسل المعدلة بالإحداثيات الكروية لـِ $z(r)$:

$$z(r)=\sum_{n=1}^{\infty} c_n\, j_l(k_n r) \qquad \ldots(4,1,3,1)$$

بضرب (4,1,3,1) بِـ $r^2 j_l(k_n r)$ ثمَّ بمكاملة الطرفين من $r_1 \to r_2$ نحصل على:

$$\int_{r_1}^{r_2} r^2 j_l(k_n r) z(r)\, dr=\int_{r_1}^{r_2} r^2 j_l(r k_i) \sum_{n=1}^{\infty} c_n\, j_l(k_n r)\, dr$$

$$=\sum_{i=1}^{\infty} c_n \int_{r_1}^{r_2} r^2 j_l(r k_n) j_l(r k_n)\, dr$$

$$\int_{r_1}^{r_2} r^2 j_l(k_n r) z(r)\, dr=c_n \int_{r_1}^{r_2} r^2 j_l(r k_n) j_l(r k_n)\, dr$$

من خاصية التعامد لدوال بيسل الكروية المعرَّف على قشرة كروية

$$\int_{r_1}^{r_2} r^2 j_l(k_n r) z(r)\, dr=c_n \|j_l(k_n r)\|^2 \quad \Rightarrow$$

$$c_n=\frac{\int_{r_1}^{r_2} r^2 z(r) j_l(k_n r)\, dr}{\|j_l(k_n r)\|^2} \qquad \ldots(4,1,3,2)$$

بتعويض العلاقة (4,1,3,2) في (4,1,3,1) نحصل على:

$$z(r)=\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\int_{r_1}^{r_2} r^2 z(r) j_l(k_n r)\, dr}{\|j_l(k_n r)\|^2} j_l(k_n r)$$

$$z(r)=\sum_{n=1}^{\infty} \bar{Z}_l(k_n)\, \frac{j_l(k_n r)}{\|j_l(k_n r)\|^2} \qquad \ldots(4,1,3,3)$$

4.1.4. الشروط الحدية المتجانسة على قشرة كروية:

بما أنَّ الدوال الذاتية $\{j_l(k_n r)\}$ هي حلول مسألة شتورم ليوفيل عندئذٍ فإنَّ حلول معادلة بيسل الكروية

$$(r^2 Z'_n(r))' + \left(k_n{}^2 r^2 - l(l+1)\right) Z_n(r) = 0$$

تحقق أحد الشروط الحدية المتجانسة على قشرة كروية التالية:

1- شرط ديرخليه (Dirichlet):

$$j_l(k_n r_1) = 0 \qquad , \quad j_l(k_n r_2) = 0$$

2- شرط نيومان (Neumann):

$$j'_l(k_n r_1) = 0 \qquad , \quad j'_l(k_n r_2) = 0$$

3- شرط روبين (Robin):

$$h_1 j_l(k_n r_1) - k_n j'_l(k_n r_1) = 0 \, , \; h_2 j_l(k_n r_2) + k_n j'_l(k_n r_2) = 0$$

4.1.5. خاصة مؤثر بيسل الكروي على قشرة كروية:

إذا كان $\bar{Z}_l(k_n) = R_l\{z(r)\}$ تحويل هانكل الكروي المنتهي على قشرة كروية للدالة $z(r)$ عندئذٍ:

$$R_l\left\{\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}(r^2 z'(r)) - \frac{l(l+1)}{r^2} z(r)\right\} =$$

$$\int_{r_1}^{r_2} r^2\left(\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2 z'(r)\right)-\frac{l(l+1)}{r^2}z(r)\right)j_l(rk_n)\,dr$$

$$=\int_{r_1}^{r_2}\frac{d}{dr}\left(r^2 z'(r)\right)j_l(rk_n)\,dr-l(l+1)\int_{r_1}^{r_2} z(r)j_l(rk_n)dr$$

باستخدام التكامل بالتجزئة مرتين نجد:

$$=r^2 z'(r)j_l(rk_n)\big|_{r_1}^{r_2}-r^2k_nz(r)j'_l(rk_n)\big|_{r_1}^{r_2}-{k_n}^2\bar{Z}_l(k_n)$$

$$={r_2}^2z'(r_2)j_l(k_nr_2)-{r_1}^2z'(r_1)j_l(k_nr_1)$$

$$-{r_2}^2k_nz(r_2)j'_l(k_nr_2)+{r_1}^2k_nz(r_1)j'_l(k_nr_1)$$

$$-{k_n}^2\bar{Z}_l(k_n)\qquad\ldots(4,1,5,1)$$

4.1.6. مناقشة شرط ديرخليه – ديرخليه على قشرة كروية:

1- ديرخليه – ديرخليه

$$j_l(k_nr_1)=0\qquad,\quad z(r_1)=f_1(t)$$

$$j_l(k_nr_2)=0\qquad,\quad z(r_2)=f_2(t)$$

ومنه تصبح العلاقة (4,1,5,1) بالشكل:

$$R_l\left\{\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2z'^{(r)}\right)-\frac{l(l+1)}{r^2}z(r)\right\}=$$

$$=-{r_2}^2f_2(t)k_nj'_l(k_nr_2)+{r_1}^2f_1(t)k_nj'_l(k_nr_1)$$

$$-{k_n}^2\bar{Z}_l(k_n)\qquad\ldots(4,1,6,1)$$

4.2. تعريف تحويل هانكل الكروي المنتهي− ZZ المشترك المعرَّف على قشرة كروية (FSHAZZT):

لتكن $u(r,t)$ معرَّفة، محدودة، مستمرة قطعياً، وقابلة للمكاملة على $[0,a] \times [0,\infty[$، عندئذٍ تحويل هانكل الكروي المنتهي − ZZ المشترك المعرَّف على قشرة كروية الذي سنرمز له بالرمز $\breve{\bar{u}}(k_n,v,s) = RZ_l\{u(r,t)\}$ يمكن تعريفه بالشكل:

$$\breve{\bar{u}}(k_n,v,s) = RZ_l\{u(r,t)\}$$
$$= \frac{s}{v}\int_0^{\infty}\int_{r_1}^{r_2} r^2 u(r,t) j_l(rk_n) e^{-\frac{s}{v}t}\, drdt \quad \dots (4,2,1)$$

علماً أنَّ هذه التكاملات موجودة.

حيث $r^2 j_l(rk_n) e^{-\frac{s}{v}t}$ نواة تحويل هانكل الكروي المنتهي من الرتبة l − ZZ المشترك المعرَّف على قشرة كروية، حيث $j_l(rk_n)$ دالة بيسل الكروية من النوع الأول والترتيب l.

ملاحظة 2: إذا كانت $l = 0$ عندئذٍ $\breve{\bar{u}}(k_n,v,s)$ يسمى تحويل هانكل الكروي المنتهي من الرتبة الصفرية− ZZ المشترك المعرّف على قشرة كروية.

4.3. تعريف التحويل العكسي لتحويل هانكل الكروي− ZZ المشترك المعرَّف على قشرة كروية (IFSHAZZT):

يمكن تعريف التحويل العكسي لتحويل هانكل الكروي المنتهي −ZZ المشترك المعرَّف على قشرة كروية والذي سنرمز له بالرمز $RZ_l^{-1}\{\hat{\bar{u}}(k_n, v,s)\} = u(r,t)$ يمكن تعريفه بالشكل:

$$u(r,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{ZZ}^{-1}\left(\hat{\hat{u}}(k_n, v,s)\right)\frac{j_l(k_n r)}{\|j_l(k_n r)\|^2} \qquad \dots (4,3,1)$$

ملاحظة 3: سوف يتم تطبيق خواص تحويل هانكل الكروي المنتهي المعرَّف على قشرة كروية وخواص تحويل ZZ بشكل مباشر على المسألة بدلاً من استنتاج الشرط المشترك لأن الطريقتين سوف تؤدي إلى نفس النتيجة.

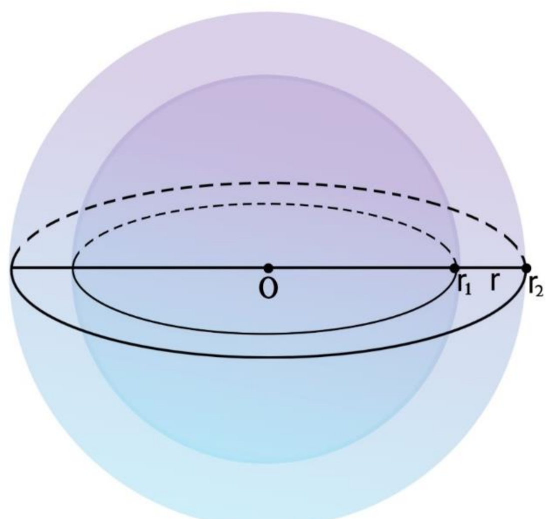
4.4. تطبيقات:

سوف نقوم بحل مسألة دير خليه المطبقة على كرة جوفاء باستخدام تحويل هانكل الكروي المنتهي− ZZ المشترك على قشرة كروية

مسألة ديرخليه: انتقال الحرارة من خلال قشرة كروية

سوف نناقش المسألة في عدّة حالات:

4.4.1. <u>**الحالة الأولى:**</u> حل مسألة ديرخليه بشروط ابتدائية وحدية غير ثابتة (متغيرة)



الشكل 2:عبارة عن رسم توضيحي للقشرة الكروية التي سوف يتم فيها انتقال الحرارة

لتكن لدينا معادلة الحرارة التالية المعرَّفة على قشرة كروية

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u(r,t)}{\partial r}\right)=\frac{1}{a^2}\frac{\partial u(r,t)}{\partial t} \qquad ; \quad r_1\le r\le r_2 \qquad \dots(4,4,1,1)$$

الثابت a^2 ثابت انتشار الحرارة.

بالشرط الابتدائي: $$u(r,t)|_{t=0}=u_0(r) \qquad \dots(4,4,1,2)$$

والشروط الحدية:

$$\begin{cases} u(r_1,t)=f_1(t) \\ u(r_2,t)=f_2(t) \end{cases} \qquad ; \quad t>0 \qquad \dots(4,4,1,3)$$

الحل:

إنَّ الدالـة $u(r,t)$ تعبر عن الطاقة الحرارية (كمية الحرارة)، حيث إنَّ هذه الدالة تمثل انتقال تدريجي للطاقة الحرارية ضمن القشرة الكروية (الوسط الحلقي) انطلاقاً من بداية جدار الكرة الداخلي وانتهاءً بجدار الكرة الخارجي الشكل 3، الشكل 4، الشكل 5، خلال الزمن $t>0$ حيث أنه كلما زاد الزمن زادت المسافة r، أي تبدأ الحرارة بالانتقال من أول طبقة ملاصقة لجدار الكرة الداخلية وهكذا تدريجياً حتى تصل ملاصقة للجدار الداخلي للكرة الخارجية.

بالنسبة للشروط المعطاة:

الشرط الابتدائي يمثل بداية الزمن عند اللحظة $t=0$ (هنا لا يوجد انتشار للحرارة بعد)

بينما الشروط الحدية: عند $r=r_1$ فإن الدالة $f_1(t)$ تمثل بداية انتقال الطاقة الحرارية بالقرب من جدار الكرة الأولى (الداخلية) أما عند $r=r_2$ فإن الدالة $f_2(t)$ تمثل نهاية

انتقال الطاقة الحرارية عند الجدار الداخلي للكرة الثانية (الخارجية)، والمتغير $t > 0$ يمثل انتشار الحرارة مع الزمن.

الآن:

نلاحظ من الشروط الحدية أنَّ هذه المسألة عبارة عن مسألة ديرخليه – ديرخليه

لنعرِّف أولاً تحويل هانكل الكروي المنتهي من الرتبة الصفرية- ZZ المشترك بالنسبة للدالة $u(r,t)$ بالشكل:

$$\breve{\bar{u}}(k_n,v,s) = \frac{s}{v}\int_0^{\infty}\int_{r_1}^{r_2} r^2 u(r,t) j_0(rk_n) e^{-\frac{s}{v}t}\, dr dt \qquad \dots (4,4,1,4)$$

بتطبيق (4,4,1,4) على المعادلة (4,4,1,1) مع تطبيق شرط ديرخليه- ديرخليه (4,1,6,1) نجد:

$$\frac{s}{v}\int_0^{\infty}\left({r_1}^2 f_1(t) k_n j'_0(k_n r_1) - {r_2}^2 f_2(t) k_n j'_0(k_n r_2) - {k_n}^2 \bar{u}(k_n,t)\right) e^{-\frac{s}{v}t} dt$$

$$= \frac{1}{a^2}\frac{s}{v}\int_0^{\infty} \bar{u}_t(k_n,t) e^{-\frac{s}{v}t} dt \qquad \dots (4,4,1,5)$$

بتطبيق تحويل ZZ على (4,4,1,5) نجد:

$$a^2 {r_1}^2 \check{f}_1(v,s) k_n j'_0(k_n r_1) - a^2 \check{f}_2(v,s) k_n j'_0(k_n r_2) - a^2 {k_n}^2 \breve{\bar{u}}(k_n,v,s) = \breve{\bar{u}}_t(k_n,v,s) \qquad \dots (4,4,1,6)$$

بتطبيق (3,8,1) على (4,4,1,6) في الطرف الثاني:

$$a^2 {r_1}^2 \check{f}_1(v,s) k_n j'_0(k_n r_1) - a^2 {r_2}^2 \check{f}_2(v,s) k_n j'_0(k_n r_2) - a^2 {k_n}^2 \breve{\bar{u}}(k_n,v,s) = \frac{s}{v}\breve{\bar{u}}(k_n,v,s) - \frac{s}{v}\bar{u}(k_n,0) \quad \Rightarrow$$

$$a^2{r_1}^2\check{f}_1(v,s)k_n{j'}_0(k_nr_1)-a^2{r_2}^2\check{f}_2(v,s)k_n{j'}_0(k_nr_2)+\frac{s}{v}\bar{u}(k_n,0)$$

$$=\frac{s}{v}\check{\bar{u}}(k_n,v,s)+a^2{k_n}^2\check{\bar{u}}(k_n,v,s)$$

$$\left(\frac{s+va^2{k_n}^2}{v}\right)\check{\bar{u}}(k_n,v,s)=a^2{r_1}^2\check{f}_1(v,s)k_n{j'}_0(k_nr_1)$$

$$-a^2{r_2}^2\check{f}_2(v,s)k_n{j'}_0(k_nr_2)+\frac{s}{v}\bar{u}(k_n,0)\qquad\dots(4,4,1,7)$$

بتطبيق (4,1,2,1) من الرتبة الصفرية على (4,4,1,2)

$$\bar{u}(k_n,0)=\int_{r_1}^{r_2}r^2u(r,0)j_0(rk_n)\,dr=\bar{u}_0(k_n)\quad\dots(4,4,1,8)$$

بتعويض (4,4,1,8) في (4,4,1,7) نجد:

$$\left(\frac{s+va^2{k_n}^2}{v}\right)\check{\bar{u}}(k_n,v,s)=a^2{r_1}^2\check{f}_1(v,s)k_n{j'}_0(k_nr_1)$$

$$-a^2{r_2}^2\check{f}_2(v,s)k_n{j'}_0(k_nr_2)+\frac{s}{v}\bar{u}_0(k_n)$$

$$\check{\bar{u}}(k_n,v,s)=\frac{v}{s+va^2{k_n}^2}a^2{r_1}^2\check{f}_1(v,s)k_n{j'}_0(k_nr_1)-$$

$$\frac{v}{s+va^2{k_n}^2}a^2{r_2}^2\check{f}_2(v,s)k_n{j'}_0(k_nr_2)$$

$$+\frac{s}{s+va^2{k_n}^2}\bar{u}_0(k_n)\qquad\cdots(4,4,1,9)$$

وهي معادلة جبرية.

بأخذ التحويل العكسي لتحويل ZZ للمعادلة (4,4,1,9) وذلك بتطبيق العلاقة (3,7,2)

$$ZZ^{-1}\left(\breve{\bar{u}}(k_n,v,s)\right) = ZZ^{-1}\left(\frac{v}{s+va^2{k_n}^2}\check{f}_1(v,s)\right)a^2{r_1}^2k_nj'_0(k_nr_1)$$

$$-ZZ^{-1}\left(\frac{v}{s+va^2{k_n}^2}\check{f}_2(v,s)\right)a^2{r_2}^2k_nj'_0(k_nr_2)$$

$$+ZZ^{-1}\left(\frac{s}{s+va^2{k_n}^2}\right)\bar{u}_0(k_n) \qquad \dots(4,4,1,10)$$

باستخدام العلاقة (3,9,1) نجد:

$$\frac{v}{s}g_1(t)*g_2(t) = ZZ^{-1}\{Z_1(v,s)\times Z_2(v,s)\}$$

$$= ZZ^{-1}\left(\frac{v}{s+va^2{k_n}^2}\check{f}_1(v,s)\right) = \frac{s}{v}ZZ^{-1}\left(\frac{v}{s+va^2{k_n}^2}\check{f}_1(v,s)\right)$$

$$= g_1(t)*g_2(t) \;\Rightarrow$$

$$ZZ^{-1}\left(\frac{s}{v}\frac{v}{s+va^2{k_n}^2}\check{f}_1(v,s)\right) = g_1(t)*g_2(t) \quad \Rightarrow$$

$$ZZ^{-1}\left(\frac{s}{s+va^2{k_n}^2}\check{f}_1(v,s)\right) = \int_0^t g_1(\tau)g_2(t-\tau)\,d\tau$$

$$= \int_0^t e^{-a^2{k_n}^2\tau}f_1(t-\tau)\,d\tau = \int_0^t e^{-a^2{k_n}^2(t-\tau)}f_1(\tau)\,d\tau$$

حيث:

$$g_1(\tau) = e^{-a^2{k_n}^2\tau}\;,\; g_2(t-\tau) = f_1(t-\tau)$$

كما أنَّ:

$$ZZ^{-1}\left(\frac{s}{s+va^2{k_n}^2}\check{f}_2(v,s)\right)=\int_0^t e^{-a^2{k_n}^2(t-\tau)}f_2(\tau)\,d\tau$$

ومنه نعوض في العلاقة $(4,4,1,10)$ نجد:

$$\bar{u}(k_n,t)=a^2{r_1}^2k_n{j'}_0(k_nr_1)\int_0^t e^{-a^2{k_n}^2(t-\tau)}f_1(\tau)\,d\tau$$

$$-a^2{r_2}^2k_n{j'}_0(k_nr_2)\int_0^t e^{-a^2{k_n}^2(t-\tau)}f_2(\tau)\,d\tau+e^{-a^2{k_n}^2t}\bar{u}_0(k_n)$$

ومنه بتطبيق العلاقة $(4,1,3,3)$ علماً أنَّ $l=0$:

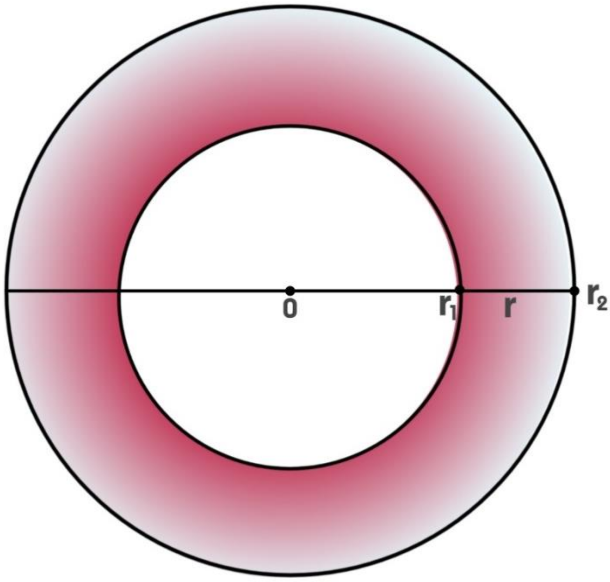
$$u(r,t)=-\sum_{n=1}^{\infty}\bar{u}(k_n,t)\frac{j_0(k_nr)}{\|j_0(k_nr)\|^2}$$

وهو الحل العام.

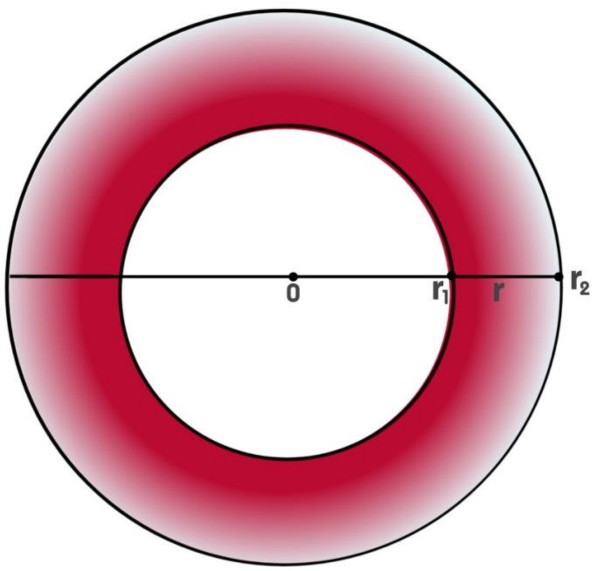
نلاحظ أنَّ انتقال الحرارة متناقص كون المجموع مضروب بإشارة ناقص، مثلاً في بداية المجال عندما $r=r_1$ انتقال الحرارة كان سريعاً بدأ يتناقص تدريجياً باتجاه نهاية المجال $r=r_2$ حتى يصل لحالة توازن أي تصبح درجة الحرارة ثابتة أي يتوقف الانتقال بنهاية الزمن.

أي أنَّ دالة انتقال الطاقة الحرارية هي دالة متناقصة تدريجياً انطلاقاً من r_1 باتجاه نهاية المجال r_2، كما أن الدالة الأسية أيضاً تعبر عن انتقال الحرارة بشكل متناقص.

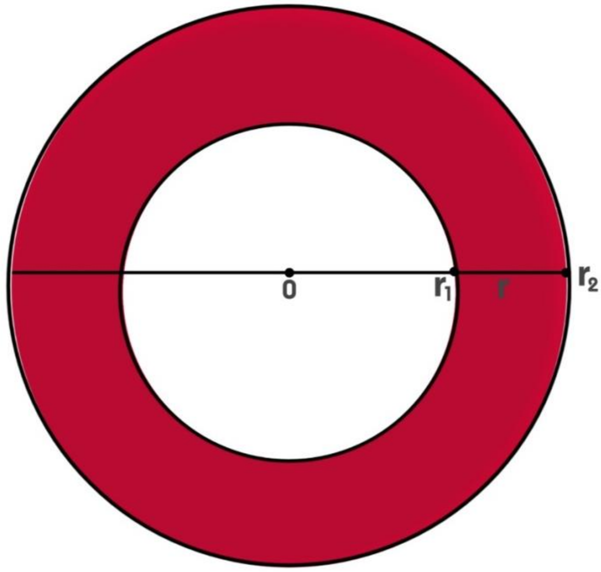
4.4.1.1. رسم توضيحي لشرح فكرة انتقال الحرارة بين الجدارين:



الشكل 3: يعبر عن بداية انتقال الحرارة ابتداءً من الجدار الداخلي عند الحد $r = r_1$



الشكل 4:عبارة عن ازدياد انتقال الحرارة على المجال الحلقي



الشكل 5: وصول الحرارة إلى الجدار الثاني عند الحد $r = r_2$

4.4.2. <u>الحالة الثانية:</u> حل مسألة دير خليه بشروط ابتدائية وحدية ثابتة

لتكن لدينا معادلة الحرارة التالية المعرَّفة على قشرة كروية

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u(r,t)}{\partial r}\right) = \frac{1}{a^2}\frac{\partial u(r,t)}{\partial t} \qquad ; r_1 \le r \le r_2 \quad \dots (4,4,2,1)$$

بالشرط الابتدائي: $u(r,t)|_{t=0} = u_0(r) = T_0 \qquad \dots (4,4,2,2)$

والشروط الحدية:

$$\begin{cases} u(r_1,t) = f_1(t) = T_1 \\ u(r_2,t) = f_2(t) = T_2 \end{cases} \quad ; \quad t > 0 \quad \dots (4,4,2,3)$$

حيث T_0, T_1, T_2 ثوابت

الحل:

تقتصر الدراسة هنا فقط على كمية الطاقة الحرارية المنتقلة بلحظة معينة (أي من أجل شروط ثابتة) أي لأجل لحظة t ثابتة، أي تقتصر الدراسة هنا على دراسة كمية الطاقة الحرارية عند الحدين r_1 و r_2 أي بلحظة معينة وبموضعين فقط.

نلاحظ من الشروط الحدية أنَّ هذه المسألة عبارة عن مسألة ديرخليه – ديرخليه

بتطبيق (4,4,1,4) على المعادلة (4,4,2,1) مع تطبيق الشرط (4,1,6,1) نجد:

$$\frac{s}{v}\int_{0}^{\infty}\left({r_1}^2 f_1(t) k_n j'_0(k_n r_1) - {r_2}^2 f_2(t) k_n j'_0(k_n r_2) - {k_n}^2 \bar{u}(k_n,t)\right) e^{-\frac{s}{v}t}dt$$

$$= \frac{1}{a^2}\frac{s}{v}\int_{0}^{\infty}\bar{u}_t(k_n,t)e^{-\frac{s}{v}t}dt \qquad \dots (4,4,2,4)$$

بتعويض الشروط الحدية (4,4,2,3) في (4,4,2,4)

$$\frac{s}{v}\int_{0}^{\infty}\left({r_1}^2 T_1 k_n j'_0(k_n r_1) - {r_2}^2 T_2 k_n j'_0(k_n r_2) - {k_n}^2 \bar{u}(k_n,t)\right) e^{-\frac{s}{v}t}dt$$

$$= \frac{1}{a^2}\frac{s}{v}\int_{0}^{\infty}\bar{u}_t(k_n,t)e^{-\frac{s}{v}t}dt \qquad \dots (4,4,2,5)$$

بتطبيق تحويل ZZ على (4,4,2,5) مع تطبيق الخاصة (3,8,1) على الطرف الثاني وتطبيق (3,10,1) على الطرف الأول نجد:

$$a^2{r_1}^2 T_1 k_n j'_0(k_n r_1) - a^2{r_2}^2 T_2 k_n j'_0(k_n r_2) - a^2{k_n}^2\breve{\bar{u}}(k_n,v,s)$$

$$= \frac{s}{v}\breve{\bar{u}}(k_n,v,s) - \frac{s}{v}\bar{u}(k_n,0) \qquad \dots (4,4,2,6)$$

$$a^2{r_1}^2T_1k_nj'_0(k_nr_1)-a^2{r_2}^2T_2k_nj'_0(k_nr_2)+\frac{s}{v}\bar{u}(k_n,0)$$

$$=\frac{s}{v}\breve{\bar{u}}(k_n,v,s)+a^2{k_n}^2\breve{\bar{u}}(k_n,v,s)$$

$$\left(\frac{s+va^2{k_n}^2}{v}\right)\breve{\bar{u}}(k_n,v,s)=a^2{r_1}^2T_1k_nj'_0(k_nr_1)$$

$$-a^2{r_2}^2T_2k_nj'_0(k_nr_2)+\frac{s}{v}\bar{u}(k_n,0)\qquad \dots(4,4,2,7)$$

بتطبيق تحويل هانكل الكروي المنتهي من الرتبة الصفرية المعرَّف على قشرة كروية على الشرط الابتدائي (4,4,2,2) مع تطبيق العلاقة (3,4,1)

$$\bar{u}(k_n,0)=\bar{u}_0(k_n)=T_0\int_{r_1}^{r_2}r^2\,j_0(rk_n)dr$$

$$=\frac{T_0}{k_n}\int_{r_1}^{r_2}\frac{d}{dr}\left(r^2j_1(rk_n)\right)dr=\frac{T_0}{k_n}r^2j_1(rk_n)\Big|_{r_1}^{r_2}$$

$$=\frac{T_0}{k_n}\left({r_2}^2j_1(r_2k_n)-{r_1}^2j_1(r_1k_n)\right)\qquad \dots(4,4,2,8)$$

بتعويض (4,4,2,8) في (4,4,2,7) نجد:

$$\left(\frac{s+va^2{k_n}^2}{v}\right)\breve{\bar{u}}(k_n,v,s)=a^2{r_1}^2T_1k_nj'_0(k_nr_1)$$

$$-a^2{r_2}^2T_2k_nj'_0(k_nr_2)+\frac{s}{v}\frac{T_0}{k_n}\left({r_2}^2j_1(r_2k_n)-{r_1}^2j_1(r_1k_n)\right)$$

$$\breve{\bar{u}}(k_n,v,s)=\frac{v}{s+va^2{k_n}^2}a^2{r_1}^2T_1k_nj'_0(k_nr_1)-$$

$$\frac{v}{s+va^2{k_n}^2}a^2{r_2}^2T_2k_n{j'}_0(k_nr_2)$$
$$+\frac{s}{s+va^2{k_n}^2}\frac{T_0}{k_n}\left({r_2}^2j_1(r_2k_n)-{r_1}^2j_1(r_1k_n)\right)\cdots(4,4,2,9)$$

وهي معادلة جبرية.

بأخذ التحويل العكسي لتحويل ZZ للمعادلة (4,4,2,9) وذلك بتطبيق العلاقة (3,7,2)

$$ZZ^{-1}\left(\breve{\bar{u}}(k_n,v,s)\right)=ZZ^{-1}\left(\frac{v}{s+va^2{k_n}^2}\right)a^2{r_1}^2T_1k_n{j'}_0(k_nr_1)$$
$$-ZZ^{-1}\left(\frac{v}{s+va^2{k_n}^2}\right)a^2{r_2}^2T_2k_n{j'}_0(k_nr_2)$$
$$+ZZ^{-1}\left(\frac{s}{s+va^2{k_n}^2}\right)\frac{T_0}{k_n}\left({r_2}^2j_1(r_2k_n)-{r_1}^2j_1(r_1k_n)\right).(4,4,2,10)$$

بتطبيق (3,10,2) و (3,10,3) على (4,4,2,10)

$$\bar{u}(k_n,t)=a^2{k_n}^2\left(1-e^{-a^2{k_n}^2t}\right)a^2{r_1}^2T_1k_n{j'}_0(k_nr_1)$$
$$-a^2{k_n}^2\left(1-e^{-a^2{k_n}^2t}\right)a^2{r_2}^2T_2k_n{j'}_0(k_nr_2)$$
$$+e^{-a^2{k_n}^2t}\frac{T_0}{k_n}\left({r_2}^2j_1(r_2k_n)-{r_1}^2j_1(r_1k_n)\right)$$

$$\bar{u}(k_n,t)=a^4{k_n}^3\left({r_1}^2T_1{j'}_0(k_nr_1)-{r_2}^2T_2{j'}_0(k_nr_2)\right)\left(1-e^{-a^2{k_n}^2t}\right)$$
$$+e^{-a^2{k_n}^2t}\frac{T_0}{k_n}\left({r_2}^2j_1(r_2k_n)-{r_1}^2j_1(r_1k_n)\right)$$

ومنه بتطبيق العلاقة (4,1,3,3) علماً أنَّ $l=0$:

$$u(r,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(a^4{k_n}^3\left({r_1}^2T_1{j'}_0(k_nr_1)-{r_2}^2T_2{j'}_0(k_nr_2)\right)\left(1-e^{-a^2{k_n}^2t}\right)\right.$$
$$\left.+e^{-a^2{k_n}^2t}\frac{T_0}{k_n}\left({r_2}^2j_1(r_2k_n)-{r_1}^2j_1(r_1k_n)\right)\right)\frac{j_0(k_nr)}{\|j_0(k_nr)\|^2}$$

$$u(r,t)=\sum_{n=1}^{\infty}-\left(a^4{k_n}^3\left({r_2}^2T_2{j'}_0(k_nr_2)-{r_1}^2T_1{j'}_0(k_nr_1)\right)\left(1-e^{-a^2{k_n}^2t}\right)\right.$$
$$\left.+\frac{T_0}{k_n}\left({r_2}^2j_1(r_2k_n)-{r_1}^2j_1(r_1k_n)\right)e^{-a^2{k_n}^2t}\right)\frac{j_0(k_nr)}{\|j_0(k_nr)\|^2}$$

وهو الحل العام.

مقارنة بين الحالتين الأولى والثانية فيزيائياً:

في الحالة الأولى كانت الدراسة تعتمد على دراسة التغير بين موضعين هما r_1 و r_2 (الشرطين الحديين) من أجل زمن t متغير، حيث الدراسة هنا تتم على كامل المجال ابتداءً من r_1 تنتقل الطاقة الحرارية تدريجياً حتى تصل لِ r_2 وذلك في كل مرة يتغير فيه الزمن يأخذ قيمة متغيرة يمكن أن تتزايد درجة الحرارة ويمكن أن تتناقص بين الحدين r_1 و r_2، بينما بالحالة الثانية بلحظة ثابتة (حالة الثبات) الدراسة تتم من أجل قيم ثابتة لِ r_1 و r_2 بلحظة معينة ثابتة.

4.4.3. <u>**الحالة الثالثة:**</u> حل مسألة دير خليه غير المتجانسة بشروط ابتدائية وحدية ثابتة

لتكن لدينا معادلة الحرارة التالية المعرَّفة على قشرة كروية

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u(r,t)}{\partial r}\right)+S(r,t)=\frac{1}{a^2}\frac{\partial u(r,t)}{\partial t};r_1\le r\le r_2\ \ldots(4{,}4{,}3{,}1)$$

بالشرط الابتدائي:

$$u(r,t)|_{t=0} = u_0(r) = T_0 \qquad \dots (4,4,3,2)$$

والشروط الحدية:

$$\begin{cases} u(r_1,t) = f_1(t) = T_1 \\ u(r_2,t) = f_2(t) = T_2 \end{cases} \qquad t > 0 \qquad \dots (4,4,3,3)$$

حيث T_0,T_1,T_2 ثوابت

الحل:

بتطبيق (4,4,1,4) على المعادلة (4,4,3,1) مع تطبيق الشرط (4,1,6,1) نجد:

$$\frac{s}{v}\int_0^\infty \left(r_1{}^2 f_1(t)k_n j'_0(k_n r_1) - r_2{}^2 f_2(t)k_n j'_0(k_n r_2) - k_n{}^2\bar{u}(k_n,t)\right)e^{-\frac{s}{v}t}dt$$

$$+\frac{s}{v}\int_0^\infty \bar{S}(k_n,t)e^{-\frac{s}{v}t}dt = \frac{1}{a^2}\frac{s}{v}\int_0^\infty \bar{u}_t(k_n,t)e^{-\frac{s}{v}t}dt \qquad \dots (4,4,3,4)$$

بتعويض الشروط الحدية (4,4,3,3) في (4,4,3,4) وبتطبيق تحويل ZZ مع تطبيق الخاصة (3,8,1) على الطرف الثاني وتطبيق (3,10,1) على الطرف الأول نجد:

$$a^2 r_1{}^2 T_1 k_n j'_0(k_n r_1) - a^2 r_2{}^2 T_2 k_n j'_0(k_n r_2) - a^2 k_n{}^2 \breve{\bar{u}}(k_n,v,s)$$

$$+a^2\,\breve{\bar{S}}(k_n,v,s) = \frac{s}{v}\breve{\bar{u}}(k_n,v,s) - \frac{s}{v}\bar{u}(k_n,0) \quad \Rightarrow$$

ومنه بتعويض (4,4,2,9) نجد:

$$\left(\frac{s + va^2k_n{}^2}{v}\right)\breve{\bar{u}}(k_n,v,s) = a^2 r_1{}^2 T_1 k_n j'_0(k_n r_1)$$

$$-a^2 r_2{}^2 T_2 k_n j'_0(k_n r_2) + a^2\breve{\bar{S}}(k_n,v,s)$$

$$+\frac{s}{v}\frac{T_0}{k_n}\left(r_2{}^2 j_1(r_2 k_n) - r_1{}^2 j_1(r_1 k_n)\right) \quad \Rightarrow$$

$$\breve{\bar{u}}(k_n,v,s) = \frac{v}{s+va^2{k_n}^2}a^2{r_1}^2T_1k_nj'_0(k_nr_1) -$$

$$\frac{v}{s+va^2{k_n}^2}a^2{r_2}^2T_2k_nj'_0(k_nr_2) + \frac{v}{s+va^2{k_n}^2}a^2\breve{\bar{S}}(k_n,v,s)$$

$$+\frac{s}{s+va^2{k_n}^2}\frac{T_0}{k_n}\left({r_2}^2j_1(r_2k_n) - {r_1}^2j_1(r_1k_n)\right)\cdots(4,4,3,5)$$

وهي معادلة جبرية.

بأخذ التحويل العكسي لتحويل ZZ للمعادلة (4,4,3,5) وذلك بتطبيق العلاقة (3,7,2)

$$ZZ^{-1}\left(\breve{\bar{u}}(k_n,v,s)\right) = ZZ^{-1}\left(\frac{v}{s+va^2{k_n}^2}\right)a^2{r_1}^2T_1k_nj'_0(k_nr_1)$$

$$-ZZ^{-1}\left(\frac{v}{s+va^2{k_n}^2}\right)a^2{r_2}^2T_2k_nj'_0(k_nr_2) + a^2ZZ^{-1}\left(\frac{v}{s+va^2{k_n}^2}\right)\breve{\bar{S}}(k_n,v,s)$$

$$+ZZ^{-1}\left(\frac{s}{s+va^2{k_n}^2}\right)\frac{T_0}{k_n}\left({r_2}^2j_1(r_2k_n) - {r_1}^2j_1(r_1k_n)\right)\bar{u}(k_n,t) \Rightarrow$$

$$\bar{u}(k_n,t) = a^4{k_n}^3\left({r_1}^2T_1j'_0(k_nr_1) - {r_2}^2T_2j'_0(k_nr_2)\right)\left(1-e^{-a^2{k_n}^2t}\right) +$$

$$a^2ZZ^{-1}\left(\frac{v}{s+va^2{k_n}^2}\breve{\bar{S}}(k_n,v,s)\right) + e^{-a^2{k_n}^2t}\frac{T_0}{k_n}\left({r_2}^2j_1(r_2k_n) - {r_1}^2j_1(r_1k_n)\right)$$

نلاحظ أنَّ:

$$ZZ^{-1}\left(\frac{s}{v}\frac{v}{s+va^2{k_n}^2}\breve{\bar{S}}(k_n,v,s)\right) = g_1(t) * g_2(t) \quad \Rightarrow$$

$$ZZ^{-1}\left(\frac{s}{s+va^2{k_n}^2}\breve{\bar{S}}(k_n,v,s)\right) = \int_0^t g_1(\tau)g_2(t-\tau)\,d\tau$$

$$= \int_0^t e^{-a^2 {k_n}^2 \tau}\, \overline{S}(k_n,t-\tau)\, d\tau = \int_0^t e^{-a^2 {k_n}^2 (t-\tau)} \overline{S}(k_n,\tau)\, d\tau$$

ومنه:

$$\bar{u}(k_n,t) = a^4 {k_n}^3 \left({r_1}^2 T_1 {j'}_0(k_n r_1) - {r_2}^2 T_2 {j'}_0(k_n r_2)\right)\left(1 - e^{-a^2 {k_n}^2 t}\right) +$$

$$a^2 \int_0^t e^{-a^2 {k_n}^2 (t-\tau)} \overline{S}(k_n,\tau)\, d\tau + e^{-a^2 {k_n}^2 t} \frac{T_0}{k_n}\left({r_2}^2 j_1(r_2 k_n) - {r_1}^2 j_1(r_1 k_n)\right)$$

$$\bar{u}(k_n,t) = -a^4 {k_n}^3 \left({r_2}^2 T_2 {j'}_0(k_n r_2) - {r_1}^2 T_1 {j'}_0(k_n r_1)\right)\left(1 - e^{-a^2 {k_n}^2 t}\right) +$$

$$a^2 \int_0^t e^{-a^2 {k_n}^2 (t-\tau)} \overline{S}(k_n,\tau)\, d\tau + e^{-a^2 {k_n}^2 t} \frac{T_0}{k_n}\left({r_2}^2 j_1(r_2 k_n) - {r_1}^2 j_1(r_1 k_n)\right)$$

ومنه بتطبيق العلاقة (4,1,3,3) علماً أنَّ $l = 0$:

$$u(r,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{u}(k_n,t)\, \frac{j_0(k_n r)}{\|j_0(k_n r)\|^2}$$

وهو الحل العام.

5 . الاستنتاجات والتوصيات

قمنا بحل مسألة ديرخليه – ديرخليه من خلال قشرة كروية نوصي بحل مسائل أخرى رياضية فيزيائية على هذا الشرط.

جدول الرموز:

$\bar{u}$	يرمز لتحويل هانكل الكروي المنتهي على مجال حلقي
$\breve{u}$	يرمز لتحويل ZZ
$\tilde{F}$	يرمز لتحوي هانكل الكروي المنتهي

6- المراجع

[1]- ALSHIKH, A.& MAHGOB, M. 2016, **ON THE RELATIONSHIP BETWEEN ELZAKI TRANSFORM AND NEW INTEGRAL TRANSFORM "ZZ TRANSFORM",** International Journal of Development Research, ISSN:2230-9926, vol. 06, Issue, 08, pp.9264-9270.

[2]- BADDOUR, N. 2010, **Operational and convolution properties of three-dimensional Fourier transforms in spherical polar coordinates**, J. Opt. Soc. Am. A, vol.27, NO. 10, pp. 2144-2155.

[3]- CHEN, I. 1982, **Modified Fourier-Bessel series and finite spherical Hankel transform**, Int. J. Math. Educ. Sci. Technology vol. 13, Issue. 3, pp. 282-283. This article was downloaded by: [Linnaeus University] On: 17 October 2014, Publisher: Taylor & Francis, DOI: 10.1080/0020739820130307.

[4]- MOLOI, A.T. 2022 **Spherical Bessel Functions**, Department of Physics, Nelson Mandela University, Port Elizabeth, 6031, South Africa.

[5]- PANCHAL, S.K. 2013, **Orthonormal series expansion and finite spherical Hankel transform of generalized functions**, MJM, vol. 2, Issue. 1, pp. 77-82.

[6]- UPENDER, G.R. & NARESH, P. 2019 **ZZ TRANSFORM METHOD TO SOLUTION OF INTEGRAL EQUATION AND ABEL'S EQUATION**, Journal of Applied Science and Computations, vol. VI, Issue. IV, Page NO: 2412-2418.

[7]- ZAFAR, Z. K. 2016 **ZZ Transform Method**, International journal of advanced engineering and technology, vol. 4, Issue. 01.