مائع Navier-Stokes (N-S) بالشكل التنسوري الناطق في نظام إحداثي منحني كيفي

أ.د. منتجب الحسن[1] ط. ميس حسن علي[2]

ملخص البحث:

يتعلق البحث بالنموذج الرياضي للحالة الهيدروديناميكية لمائع Navier-Stokes المتجانس (Homogeneous) والإيزوتروبي (Isotropic) والغير ضغوط (Incompressible) والموضوع رياضياً من الباحثين Navier و Stokes ،والذي يُرمز له اختصاراً بـ (N–S). في البحث، سنعرض أولاً الشكل التنسوري الصامد، للنموذج الرياضي التقليدي ولنموذج Lame الرياضي لمائع Navier-Stokes (N-S) المتجانس والإيزوتروبي والغير مضغوط في حالته التحريكية.

جديد البحث هو مناقشة الشكل التنسوري الناطق في نظام إحداثي منحني كيفي في المتنوعة الإقليدية R^3، لكلٍ من النموذج التقليدي ونموذج Lame ،الحاكمين للحالة الهيدروديناميكية لمائع (N–S) Navier–Stokes، المتجانس والإيزوتروبي والغير ضغوط، وفي النهاية سننهي البحث باقتراح مسألتين للمناقشة.

[1] أستاذ في قسم الرياضيات – كلية العلوم – جامعة البعث.

[2] طالبة ماجستير في قسم الرياضيات - كلية العلوم - جامعة البعث.

الكلمات المفتاحية: مائع (N–S) Navier–Stokes ، الشكلين التنسوريين، الصامد والناطق للنموذج الرياضي التقليدي ولنموذج Lame لمائع (N–S) Navier–Stokes الهيدروديناميكي.

The Navier-Stokes (N-S) fluid in variable tensor form in an arbitrary curvilinear coordinate system

Prof. Mountajab Al-Hasan [†] **&** **Mays Hasan Ali** [‡]

Abstruct

The paper concerns the mathematical model of the homogeneous, isotropic and incompressible hydrodynamical state governing the Navier-Stokes fluid ,which was discussed by Navier and Stokes and shortly called by (N-S). In the paper, we firstly present the invariable tensorial form of the mathematical traditional and Lame models of the homogeneous, isotropic and incompressible Navier-Stokes (N-S) fluid.

The new thing in paper is discussing the variable form in an arbitrary curvilinear coordinate system of the hydrodynamical state of the tow traditional and Lame descriptions that governing the hydrodynamical behavior of the Navier-Stokes (N-S), homogeneous , isotropic and incompressible fluid . Finally, we end the paper by proposing tow problems for discussion.

[†] Professor At Department of Mathematics–Faculty of Science–Al–Baath University.
[‡] Master Student At Department of Mathematics–Faculty of Science–Al–Baath University.

Key words: The Navier-Stokes (N-S) Fluid, The invariable and variable tensorial forms of the traditional and Lame descriptions of the Navier-Stokes (N-S) hydrodynamical fluid.

1. مقدمة:

ناقش العديد من الباحثين مثل: Łukaszewicz (1999) و Heinbockel (1996) ، النموذج الرياضي التقليدي، لمائع Navier-Stokes (N-S) وذلك بالشكل التنسوري الصامد. كما ناقش بعض هؤلاء الباحثين مثل Heinbockel (1996)، الشكل التنسوري الناطق في النظام الاحداثي الديكارتي للوصف التقليدي لمائع Navier- Stokes (N-S)، الإيزوتروبي (المتماثل المناحي) والمتجانس والإيزوتيرمي (أي متساوي درجات الحرارة). يتعلق البحث الحالي بالمائع مهمل البنية الجزيئية ويعاني من تشوهات صغيرة، والمتجانس والإيزوتروبي، والغير ضغوط، وله ثلاث درجات حرية وثابتين ماديين والمناقش من خلال الباحث Navier و Stokes ، والذي يرمز له اختصاراً بالرمز (N-S). أي يتعلق البحث بالهيدروديناميك الخطي، المتجانس المتماثل المناحي، والغير ضغوط ، والمعين بثابتين ماديين $\lambda > 0$, $\mu > 0$. نفترض من أجل هذا المائع أن الحالة الابتدائية (الحالة اللاغرانجية) له Ω ، تشكل منطقة بسيطة الترابط في المتنوعة الإقليدية ثلاثية البعد. أيضاً نفترض أن الحقول الفيزيائية التي تمثل المائع (N-S) ، هي مقاطع تنسورية، مركباتها دوال حقيقية ملساء بالقدر الكافي ، تتبع لنقاط Ω وللزمن t .

2. هدف البحث:

يهدف البحث إلى استخراج الشكل التنسوري الناطق في نظام إحداثي منحني كيفي لكلٍ من الوصف التقليدي ووصف Lame للحالة الهيدروديناميكة لمائع Navier–Stokes (N–S) المتجانس والإيزوتروبي والغير ضغوط والذي يشغل في لحظة البدء المنطقة بسيطة الترابط Ω في المتنوعة الإقليدية ثلاثية البعد R^3 .

3. طرق البحث:

سنعتمد تعميم الطريقة المستخدمة في Heinbockel [1] ، وتعميم الطريقة المستخدمة [4]، في إيجاد الشكل التنسوري الناطق (في نظام إحداثي منحني كيفي) للوصف التقليدي للحالة الهيدروديناميكية لمائع Navier–Stokes (N–S) المتجانس والإيزوتروبي، والغير ضغوط،

والذي يشغل في لحظة البدء المنطقة بسيطة الترابط Ω في المتنوعة الإقليدية ثلاثية البعد R^3.

لهذا الغرض، سنعرض بدايةً الشكل التنسوري الصامد للوصف التقليدي للحالة الهيدروديناميكية لمائع (N–S) Navier–Stokes المتجانس والإيزوتروبي، والغير ضغوط، والذي يشغل في لحظة البدء منطقة Ω بسيطة الترابط في المتنوعة الإقليدية R^3.

3–1 مسألة الوصف التنسوري التقليدي، الصامد للحالة الهيدروديناميكية لمائع (N–S) Navier–Stokes المتجانس والإيزوتروبي، والغير ضغوط، والذي يشغل في لحظة البدء المنطقة بسيطة الترابط Ω في المتنوعة الاقليدية ثلاثية البعد R^3:

توطئة: سنفترض أن جميع الأدلة اللاتينية $i, j, k, \ldots$ تأخذ القيم $1, 2, 3$ وسنعتمد رموز Einstein في المتنوعة الإقليدية ثلاثية البعد R^3، ولتكن $O x_1 x_2 x_3$ جملة إحداثية ديكارتية قائمة، ومباشرة، وعطالية، وقاعدتها هي $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$. إن العملية الهيدروديناميكية لمائع (N–S) Navier–Stokes المتجانس والإيزوتروبي، والغير ضغوط، توصف بواسطة مجموعة المقاطع التنسورية $\{\mathbf{u}, \mathbf{E}, \mathbf{T}\}$، حيث $\mathbf{u}$ مقطع متجهي، يمثل فيزيائياً حقل الإزاحات، أما $\mathbf{E}$ و $\mathbf{T}$ فهما مقطعان تنسوريان من المرتبة الثانية، ومتناظران، وفيزيائياً هما على الترتيب، حقل الانفعالات وحقل الإجهادات. فإذا رمزنا بـ $]\infty, 0[=: B$، و بـ $[0, \infty[=: B^+$، فيمكن أن تمثل الحقول السابقة في $\Omega \times B^+$، وفي النظام الإحداثي الديكارتي $\mathbf{e}_i$، بالشكل التالي:

$$\mathbf{u} = \hat{u}_i \, \mathbf{e_i} \;,\; \mathbf{E} = \hat{E}_{ij} \, \mathbf{e_i} \otimes \mathbf{e_j},\; \mathbf{T} = \hat{T}_{ij} \, \mathbf{e_i} \otimes \mathbf{e_j} \qquad (3.1)$$

حيث المصفوفة في الطرف الأيمن العلاقة الأولى في (3.1) تمثل مصفوفة المركبات في القاعدة الديكارتية $\mathbf{e}_i$، لمقطع الإزاحات $\mathbf{u}$، أما المصفوفتان الموجودتان في الطرف الأيمن للعلاقتين الثانية والثالثة في (3.1) فهما متناظرتان، وتمثلان على الترتيب مصفوفة المركبات الديكارتية للمقطع التنسوري $\mathbf{E}$، ومصفوفة المركبات الديكارتية للمقطع التنسوري $\mathbf{T}$.

يتألف الوصف التنسوري التقليدي، الصامد، للحالة الهيدروديناميكية الحاكمة لمائع (N–S) Navier–Stokes المتجانس والإيزوتروبي، والغير ضغوط، والذي يشغل في

لحظة البدء المنطقة بسيطة الترابط Ω في المتنوعة الإقليدية ثلاثية البعد R^3، يتألف من المعادلات التنسورية الصامدة، التفاضلية، والعلاقات التنسورية الصامدة، الأساسية والشروط التنسورية الصامدة، الحدية والابتدائية التالية [2]:

معادلات الحركة، المحققة في $\Omega \times B^+$:

$$\mathbf{div}\,\mathbf{T} + \rho\mathbf{b} = \rho\ddot{\mathbf{u}} \qquad (3.2)$$

حيث ρ تمثل الكثافة الحجمية لمائع (N–S) Navier–Stokes و $\mathbf{b}$ مقطع متجهي، يمثل، فيزيائياً قوة الكتلة، رمز النقطة يدل على المشتق الجزئي بالنسبة للزمن: $\dot{\mathbf{u}} = (\partial/\partial t)\mathbf{u}$, $\ddot{\mathbf{u}} = (\partial^2/\partial t^2)\mathbf{u}$. الرمز **div** يرمز للتفرق: $\mathbf{div}\,\mathbf{T} = (\partial_j \hat{T}_{ji})\,\mathbf{e_i}$، حيث ∂_k يمثل المشتق الجزئي بالنسبة للموضع X_k؛

$$\partial_k \hat{T}_{ji} = \frac{\partial \hat{T}_{ji}}{\partial X_k} \equiv \hat{T}_{ji,k}.$$

مع العلم أن مقطع الإجهادات التنسوري يكتب بالشكل:

$$\mathbf{T} = -P\,\mathbf{I} + \mathbf{P} \qquad (3.3)$$

ندعو الجزء $\mathbf{P}$ بمقطع اللزوجة التنسوري، وهو مقطع تنسوري متناظر من المرتبة الثانية ، كما ندعو P بالضغط الهيدروستاتي، وهو مقطع تنسوري من المرتبة الصفرية، يتبع فقط للموضع اللاغرانجي، كما أن: $\mathbf{I} = \delta_{ij}\,\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$ ، هو التنسور المطابق (أو المتري)؛

معادلة الاستمرار بالكتلة، والتي هنا تأخذ الشكل التالي في $\Omega \times B^+$:

$$\mathbf{div}\,\dot{\mathbf{u}} = 0 \qquad (3.4)$$

أخيراً: بتعويض العلاقة التنسورية (3.3) بـ(3.2) ،آخذين بعين الاعتبار أن: $\mathbf{div}\,(P\,\mathbf{I}) = \nabla P$، فتأخذ معادلة الحركة التنسورية (3.2) الشكل التالي في $\Omega \times B^+$:

$$\mathbf{div}\,\mathbf{P} - \nabla P + \rho\mathbf{b} = \rho\ddot{\mathbf{u}} \qquad (3.5)$$

معادلات توافق الانفعالات، المحققة في $\Omega \times B$:

$$\Delta \mathbf{E} + \nabla \nabla (\operatorname{tr} \mathbf{E}) - 2\hat{\nabla} \operatorname{div} \mathbf{E} = \mathbf{0} \qquad (3.6)$$

مع العلم أن: $\nabla = \mathbf{e}_i \, \partial_i$، كما أن $\Delta \mathbf{E}$ يرمز للابلاسيان المطبَّق على المقطع التنسوري $\mathbf{E}$؛

$$\Delta \mathbf{E} = \nabla \cdot (\nabla \mathbf{E}) = \operatorname{div} \operatorname{grad} \mathbf{E} = (\Delta \hat{E}_{ij}) \, \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j = \hat{E}_{ij,kk} \, \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \,،$$

وهو بدوره مقطع تنسوري، مرتبته هي نفس مرتبة المقطع التنسوري $\mathbf{E}$. كما أن: $\nabla \nabla (\operatorname{tr} \mathbf{E}) \equiv \operatorname{grad} \operatorname{grad} (\operatorname{tr} \mathbf{E})$، علماً أن: $\operatorname{tr} \mathbf{E}$ هو أثر المقطع التنسوري $\mathbf{E}$، حيث هذا الأثر هو مقطع تنسوري من المرتبة الصفرية، يعطى بالعلاقة: $\operatorname{tr} \mathbf{E} = \mathbf{I} : \mathbf{E}$، وحيث الرمز $\mathbf{I} : \mathbf{E}$ يمثل الجداء الداخلي للتنسور المتري $\mathbf{I}$ مع المقطع التنسوري $\mathbf{E}$، وبحسب تعريفه يعطى بـ: $\mathbf{I} : \dot{\mathbf{E}} = \delta_{ij} \hat{E}_{ij} = \hat{E}_{kk}$.

وكذلك:

$$\hat{\nabla} \operatorname{div} \mathbf{E} := \operatorname{sym} \nabla \operatorname{div} \mathbf{E} \equiv \frac{1}{2} [\nabla \operatorname{div} \mathbf{E} + (\nabla \operatorname{div} \mathbf{E})^T]$$

حيث: $\nabla \operatorname{div} \mathbf{E} \equiv \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{E}$. أخيراً الرمز $\mathbf{A}^T$ يدل على منقول المقطع التنسوري $\mathbf{A}$[3].

العلاقة الهندسية، المحققة في $\Omega \times B^+$:

$$\mathbf{E} := \frac{1}{2} [\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T] \qquad (3.7)$$

حيث: $\nabla \mathbf{u} \equiv \mathbf{grad} \, \mathbf{u}$.

العلاقة التأسيسية، المحققة في $\Omega \times B$:

$$\mathbf{P} = 2\mu \mathbf{E} + \lambda (\operatorname{tr} \mathbf{E}) \mathbf{I} \qquad (3.8)$$

الشروط الحدية، المحققة على $\partial\Omega \times B$ (حيث $\partial\Omega$ هي الحدود الملساء لـ Ω):

$$\mathbf{Q}(\mathbf{X}; t) = \left[- P(\mathbf{X}) \mathbf{I} + \mathbf{P}(\mathbf{X}; t) \right] \mathbf{n}(\mathbf{X}) \qquad (3.9)$$

حيث: $\mathbf{n}(\mathbf{X}) = \hat{n}_i (\mathbf{X}) \, \mathbf{e}_i$ متجه واحدة الناظم الخارجي للسطح $\partial\Omega$ في النقطة $\mathbf{X} \equiv (X_1, X_2, X_3)$ منه، و:

$$\begin{aligned} \hat{Q}_i (\mathbf{X}; t) &= \left[- P(\mathbf{X}) \delta_{ij} + \hat{P}_{ij} (\mathbf{X}; t) \right] \hat{n}_j (\mathbf{X}) \\ &= - P(\mathbf{X}) \hat{n}_i (\mathbf{X}) + \hat{P}_{ij} (\mathbf{X}; t) \hat{n}_j (\mathbf{X}) \end{aligned}$$

[3] انظر [5] صفحة 6.

علماً أن المقطع المتجهي: $\mathbf{Q}(\mathbf{X};t)=\hat{Q}_i(\mathbf{X};t)\,\mathbf{e}_i$ معطى على $\partial\Omega \times B$.

الشروط الابتدائية، المحققة في $\Omega\times\{0\}$:

$$\mathbf{u}=\mathbf{f}\ ,\quad \dot{\mathbf{u}}=\mathbf{g} \tag{3.10}$$

حيث المقطعان المتجهيان: $\mathbf{f}(\mathbf{X})=\hat{f}_i(\mathbf{X})\,\mathbf{e}_i$ و $\mathbf{g}(\mathbf{X})=\hat{g}_i(\mathbf{X})\,\mathbf{e}_i$ معلومان في Ω.

إن هدف الوصف التنسوري التقليدي، الصامد، لمائع Navier–Stokes الهيدروديناميكي (N–S)، المتجانس والإيزوتروبي، والغير ضغوط، هو إيجاد السلوك التنسوري، الهيدروديناميكي: { $\mathbf{u}$, $\mathbf{E}$, $\mathbf{T}$, $\mathbf{P}$, P } في $\bar{\Omega} \times B$ المحقق لـ (3.1) - (3.10).

2–3 الشكل التنسوري الصامد لمعادلات Lame ، الحاكمة للسلوك الهيدروديناميكي للمائع (N–S)، المتجانس، والإيزوتروبي، والغير ضغوط، والذي يشغل في لحظة البدء منطقة بسيطة الترابط Ω في المتنوعة الاقليدية ثلاثية البعد R^3:

نحصل على هذه المعادلات بإتباع مايلي [4]. بتعويض العلاقة التنسورية الهندسية (3.7) في العلاقة التنسورية التأسيسية (3.8) نحصل على العلاقة التنسورية الصامدة التالية التي تربط المقطع التنسوري $\mathbf{P}$ ، بالمقطع المتجهي $\mathbf{u}$ ، والمحققة في $\Omega \times B^+$:

$$\mathbf{P}=\mu[\nabla\mathbf{u}+(\nabla\mathbf{u})^T]+\lambda\,(\mathbf{div}\mathbf{u})\,\mathbf{I} \tag{3.11}$$

حيث هنا استفدنا من العلاقة:

$$\operatorname{tr}\mathbf{E}=\frac{1}{2}\{\operatorname{tr}(\nabla\mathbf{u})+\operatorname{tr}[(\nabla\mathbf{u})^T]\}=\mathbf{div}\mathbf{u} \tag{3.12}$$

بأخذ تفرق العلاقة التنسورية (3.11) ، نحصل على:

$$\mathbf{div}\,\mathbf{P}=\mu\left\{\mathbf{div}(\nabla\mathbf{u})+\mathbf{div}\left[(\nabla\mathbf{u})^T\right]\right\}+\lambda\,\mathbf{div}\left[(\mathbf{div}\mathbf{u})\,\mathbf{I}\right] \tag{3.13}$$

وبما أن [4]:

$$\mathbf{div}(\nabla\mathbf{u})=\mathbf{div}\,\mathbf{grad}\,\mathbf{u}=:\Delta\mathbf{u}\ ,\quad \mathbf{div}\left[(\nabla\mathbf{u})^T\right]=\mathbf{grad}\,\mathbf{div}\,\mathbf{u} \tag{3.14}$$

$$\mathbf{div}\left[(\mathbf{div}\mathbf{u})\,\mathbf{I}\right]=\mathbf{grad}\,(\mathbf{div}\mathbf{u}) \tag{3.15}$$

حيث Δ هو اللابلاسيان، فبتعويض (3.14) و(3.15) في (3.13)، نحصل على العلاقة التنسورية الصامدة التالية، المحققة في $\Omega \times B^+$، والتي تعطي لمقطع المتجهي $\mathbf{div\,P}$ بدلالة المقطع المتجهي $\mathbf{u}$:

$$\mathbf{div\,P} = \mu\,\Delta\mathbf{u} + (\lambda+\mu)\ \mathbf{grad\,div u} \qquad (3.16)$$

من ثم نعوض العلاقة التنسورية الصامدة (3.16) بمعادلة الحركة (3.5)، فنحصل على العلاقة التنسورية الصامدة، المحققة في $\Omega \times B^+$:

$$\mu\,\Delta\mathbf{u} + (\lambda+\mu)\ \mathbf{grad\,div u} - \mathbf{grad}\,P\ + \rho\,\mathbf{b} = \rho\,\ddot{\mathbf{u}} \qquad (3.17)$$

نضيف إلى المعادلة السابقة، معادلة الاستمرار بالكتلة (3.4). إلى المعادلتين (3.16) و (3.4)، نضيف الشروط الحدية التالية، المحققة على $\partial\Omega \times B$:

$$\mathbf{Q} = \left\{\left(-P + \lambda\,\mathbf{div u}\ \right)\mathbf{I} + \ \mu\left[\nabla\mathbf{u} + (\nabla\mathbf{u})^T\ \right]\right\}\mathbf{n} \qquad (3.18)$$

كما نضيف الشروط الابتدائية(3.10).

ندعو (3.17) و(3.4) بالشكل التنسوري الصامد لمعادلات *Lame* . كما ندعو (3.17) و(3.4) و (3.18) و (3.10) بالشكل التنسوري الصامد لمسألة *Lame* للقيم الحدية والابتدائية. أخيراً ندعو(3.17) و(3.4) و (3.18) و(3.10) و (3.7) و(3.11) و(3.3) وبالشكل التنسوري الصامد لوصف *Lame* للمائع (N–S)، المتجانس، والإيزوتروبي، والغير ضغوط.

آلية حل وصف Lame السابق: بحل مسألة Lame للقيم الحدية والابتدائية (3.17) و(3.4) و (3.18) و(3.10)، نحصل على $\mathbf{u}$ و P. نعوض في كلٍ من (3.7) و(3.11)، فنحصل على كلٍ من $\mathbf{E}$ و $\mathbf{P}$. وبالتعويض في (3.3) نحصل على $\mathbf{T}$.

4. النتائج والمناقشة:

تحتوي هذه الفقرة على الشيء الجديد، المتمثل بمناقشة الشكل التنسوري الناطق (في النظام الإحداثي المنحني الكيفي η_i) للوصف التنسوري التقليدي، ولوصف Lame للحالة الهيدروديناميكية لمائع Navier–Stokes (N–S)، المتجانس والإيزوتروبي، والغير ضغوط، والذي يشغل في لحظة البدء المنطقة بسيطة الترابط Ω في المتنوعة الإقليدية ثلاثية البعد R^3. الطريقة المستخدمة هي تعميم الطريقة المستخدمة في كلٍ من[1] و [2] و[4] ،

ذلك بإسقاط الشكلين التنسوريين الصامدين السابقين في نظام إحداثي منحني كيفي في المتنوعة الإقليدية ثلاثية البعد، مستخدمين في ذلك الهندسة التفاضلية والتحليل التنسوري [8] و[7] و[6]، ذلك بإتباع ما يلي. نفرض وجود نظام إحداثي منحني كيفي في Ω، وسطاءه η_i وقاعدته موافقة التغير هي $\mathbf{g}_i(p)=\mathbf{g}_i(\eta_1,\eta_2,\eta_3)$ ، وقاعدته مخالفة التغير هي $\mathbf{g}^i(p)=\mathbf{g}^i(\eta_1,\eta_2,\eta_3)$. عندئذٍ يمكن أن تُمثَّل مجموعة المقاطع التنسورية $\{\ \mathbf{u}\ ,\ \mathbf{E}\ ,\ \mathbf{T}\ ,\mathbf{P}\ \}$ في النظام الإحداثي المنحني η_i، على النحو الآتي:

$$\mathbf{u}=u^i\mathbf{g}_i=u_i\ \mathbf{g}^i\ , \tag{4.1}$$

$$\mathbf{E}=E^{i\,j}\mathbf{g}_i\otimes\mathbf{g}_j=E_{i\,j}\,\mathbf{g}^i\otimes\mathbf{g}^j=E^i_j\,\mathbf{g}_i\otimes\mathbf{g}^j\ , \tag{4.2}$$

$$\mathbf{T}=T^{i\,j}\mathbf{g}_i\otimes\mathbf{g}_j=T_{i\,j}\,\mathbf{g}^i\otimes\mathbf{g}^j=T^{\,i}_j\,\mathbf{g}_i\otimes\mathbf{g}^j\ , \tag{4.3}$$

$$\mathbf{P}=P^{i\,j}\mathbf{g}_i\otimes\mathbf{g}_j=P_{i\,j}\,\mathbf{g}^i\otimes\mathbf{g}^j=P^i_j\,\mathbf{g}_i\otimes\mathbf{g}^j \tag{4.4}$$

حيث u_i و u^i ، على الترتيب تمثل المركبات موافقة التغيير والمركبات مخالفة التغيير في النظام الإحداثي المنحني η_i لمقطع الإزاحة $\mathbf{u}$ ، كما أن: $E_{i\,j}$ و $E^{i\,j}$ و E^i_j، هي مصفوفات متناظرة، تمثل على التراتيب المركبات موافقة التغيير والمركبات مخالفة التغيير والمركبات المختلطة في النظام الإحداثي المنحني η_i لمقطع الانفعال $\mathbf{E}$، كما أن: $T_{i\,j}$ و $T^{i\,j}$ و $T^{\,i}_j$، هي أيضاً مصفوفات متناظرة وتمثل على التراتيب المركبات موافقة التغيير والمركبات مخالفة التغيير والمركبات المختلطة في النظام الإحداثي المنحني η_i لمقطع الإجهاد $\mathbf{T}$. أخيراً: $P_{i\,j}$ و $P^{i\,j}$ و P^i_j، هي مصفوفات متناظرة وتمثل على التراتيب المركبات موافقة التغيير والمركبات مخالفة التغيير والمركبات المختلطة في النظام الإحداثي المنحني η_i لمقطع اللزوجة، التنسوري $\mathbf{P}$.

4-1 مسألة الوصف التنسوري التقليدي، الناطق(في النظام الاحداثي المنحني الكيفي η_i) ، للحالة الهيدروديناميكية لمائع Navier–Stokes (N–S)، المتجانس والإيزوتروبي، والغير ضغوط، ، والذي يشغل في لحظة البدء منطقة بسيطة الترابط Ω في المتنوعة الاقليدية ثلاثية البعد R^3:

نحصل على ذلك بإسقاط الشكل التنسوري التقليدي الصامد(3.10)-(3.1) في النظام الاحداثي المنحني η_i مستخدمين في ذلك الهندسة التفاضلية والحساب التنسوري [6,7,8]. فبإسقاط الكميات التنسورية الصامدة الظاهرة في (3.10)-(3.1)، بإسقاطها في النظام الإحداثي المنحني η_i، سنجد أن الوصف التنسوري التقليدي، الناطق (في النظام الاحداثي المنحني الكيفي η_i)، للحالة الهيدروديناميكية لمائع Navier–Stokes (N–S)، المتجانس والإيزوتروبي، والغير ضغوط، يتألف من المعادلات التنسورية الناطقة، التفاضلية، والعلاقات التنسورية الناطقة، الأساسية، والشروط التنسورية الناطقة، الحدية والابتدائية التالية[4] [6,7,8]:

معادلات الحركة، المحققة في $\Omega \times B^+$*:*

$$\nabla_j T^{ji} + \rho\, b^i - \rho\, \frac{\partial^2 u^i}{\partial t^2} = 0 \qquad (4.5)$$

حيث b^i تمثل المركبات مخالفة التغيير لمقطع قوة الكتلة المتجهي **b**، في النظام الاحداثي المنحني η_i، والرمز ∇_k يدل على المشتق موافق التغيير بالنسبة للوسيط η_k، في النظام الإحداثي المنحني η_i ؛

$$\nabla_k T^{ji} = \partial_k T^{ji} + \Gamma^j_{k\,m} T^{mi} + \Gamma^i_{k\,m} T^{jm} \qquad (4.6)$$

وحيث ∂_k يرمز المشتق الجزئي بالنسبة للوسيط η_k؛ $\partial_k T^{ji} = \dfrac{\partial T^{ji}}{\partial \eta_k}$.

الرموز Γ^k_{ij} تدل هي رموز Christoffel من النوع الثاني؛ وهي تعطى بالعلاقة: $\Gamma^k_{ij} = g^{k\ell}\,\Gamma_{ij\,\ell}$، مع العلم بأن: $\Gamma_{ij\,\ell}$ هي رموز Christoffel من النوع الأول، وهي تعطى بالعلاقة: $\Gamma_{ijk} = \partial_j \mathbf{g}_i \,.\, \mathbf{g}_k = \frac{1}{2}(\partial_j g_{ik} + \partial_i g_{jk} - \partial_k g_{ij})$، $g_{ij} = \mathbf{g}_i \cdot \mathbf{g}_j$ و $g^{ij} = \mathbf{g}^i \,.\, \mathbf{g}^j$ على الترتيب هما الحد العام للمصفوفة المترية موافقة التغير والحد العام للمصفوفة المترية مخالفة التغير.

[4] هنا استخدمنا العديد من العلاقات التي تعطي الكميات التنسورية الصامدة الظاهرة في (3.10)-(3.1) في النظام الاحداثي المنحني الكيفي η_i. من هذه العلاقات مثلاً: $\operatorname{div}\mathbf{T} = (\nabla_j T^{ji})\,\mathbf{g}_i$ ، ...الخ.

علاقة مقطع الإجهاد بالضغط الهيد وستاتي وبمقطع اللزوجة، المحققة في $\Omega \times B^+$*:*

$$T^{ij} = -P g^{ij} + P^{ij} \tag{4.7}$$

مع العلم أن:

$$\mathbf{I} = g^{ij}\mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}_j = g_{ij}\mathbf{g}^i \otimes \mathbf{g}^j = \delta^i_j \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}^j = \delta^j_i \mathbf{g}^i \otimes \mathbf{g}_j$$

معادلة الحركة بالضغط الهيد وستاتي وبمقطع اللزوجة، ومقطع الإزاحة، المحققة في $\Omega \times B^+$*:*

$$\nabla_j P^{ji} - \nabla^i P + \rho b^i - \rho \frac{\partial^2 u^i}{\partial t^2} = 0 \tag{4.8}$$

حيث: $\nabla^i P = g^{ij}\partial_j P$.

معادلة الاستمرار بالكتلة، والتي هنا تأخذ الشكل التالي في $\Omega \times B^+$*:*

$$\nabla_i \partial_t u^i = 0 \tag{4.9}$$

حيث: $\nabla_i \partial_t u^k = \partial_i \partial_t u^k + \Gamma^k_{ij} \partial_t u^j$.

معادلات توافق الانفعالات، المحققة في $\Omega \times B$*:*

$$\Delta E_{ij} + \nabla_{ij} E^k_k - \nabla^k (\nabla_i E_{jk} + \nabla_j E_{ik}) = 0 \tag{4.10}$$

حيث: $\nabla_{ij} := \nabla_i \nabla_j$.

العلاقة الهندسية، المحققة في $\Omega \times B^+$*:*

$$E_{ij} = \frac{1}{2}(\nabla_i u_j + \nabla_j u_i) \tag{4.11}$$

حيث هنا: $\nabla \mathbf{u} = (\nabla_i u_j)\mathbf{g}^i \otimes \mathbf{g}^j$ و $(\nabla \mathbf{u})^T = (\nabla_j u_i)\mathbf{g}^i \otimes \mathbf{g}^j$، كما أن:

$\nabla_i u_j = \partial_i u_j - \Gamma^m_{ji} u_m$.

العلاقات التأسيسية، المحققة في $\Omega \times B$*:*

$$P^{ji} = [\lambda g^{ij} g^{k\ell} + \mu (g^{i\ell} g^{jk} + g^{j\ell} g^{ik})] E_{k\ell} = 2\mu E^{ji} + \lambda g^{ij} E^{k}_{k} \quad (4.12)$$

الشروط الحدية، المحققة على $\partial\Omega \times B$:

$$Q^{i}(\eta;t) = \left[- P(\eta) g^{ji} + P^{ji}(\eta;t) \right] n_j(\eta) = = - P(\eta) n^{i}(\eta) + P^{ji}(\eta;t) n_j(\eta), \quad (4.13)$$

حيث:

$$\mathbf{P}(\eta;t)\mathbf{n}(\eta) = P^{ji}(\eta;t) n_j(\eta)\, \mathbf{g}_i(\eta),$$

$$\mathbf{I}\,\mathbf{n}(\eta) = g^{ji} n_j(\eta)\, \mathbf{g}_i(\eta) = n^{i}(\eta)\, \mathbf{g}_i(\eta)$$

و n^i تمثل المركبات مخالفة التغيير للمقطع التنسوري الواحدي $\mathbf{n}$، في النظام الاحداثي المنحني η_i، و علماً أن المقطع المتجهي الناطق: $Q^i(\eta;t)$ معطى على $\partial\Omega \times B$.

الشروط الابتدائية، المحققة في $\Omega \times \{0\}$:

$$u^i = f^i \quad , \quad u^i = g^i \quad (4.14)$$

حيث المقطعان المتجهيان الناطقان: f^i و g^i معلومان في Ω.

إن هدف الوصف التقليدي، التنسوري الناطق (في النظام الاحداثي المنحني η_i)، لمائع Navier–Stokes الهيدروديناميكي (N–S)، المتجانس والإيزوتروبي، والغير ضغوط، هو إيجاد السلوك التنسوري، الهيدروديناميكي: $\{u^i, E^{ji}, T^{ji}, P^{ji}, P\}$ في $B \times \bar{\Omega}$ المحقق لـ (4.13)–(4.1).

2-4 الشكل التنسوري الناطق(في النظام الاحداثي المنحني الكيفي η_i) لمسألة Lame الحاكمة للحالة الهيدروديناميكية لمائع Navier–Stokes (N–S)، المتجانس والإيزوتروبي، والغير ضغوط، والذي يشغل في لحظة البدء منطقة بسيطة الترابط Ω في المتنوعة الاقليدية ثلاثية البعد R^3:

نحصل على هذه المسألة بإتباع مايلي. برفع الدليل j في العلاقة التنسورية، الهندسية (4.11) [4]، وذلك بتبديل كل j بـ k في (4.11)، من ثم ضرب طرفي الناتج بـ g^{jk}، فنحصل على العلاقة التنسورية التالية، المحققة في $\Omega \times B^+$:

$$E_j^{\,i} = \frac{1}{2}(\nabla^i u_j + \nabla_j u^i) \qquad (4.15)$$

حيث هنا: $\nabla^i := g^{ik}\nabla_k$ و $u^i := g^{ik}u_k$ و $\nabla_j u^i = \partial_j u^i + \Gamma^i_{jm} u^m$.

واستخدمنا هنا خواص المشتق موافق التغيير، والعلاقة: $\nabla_j g^{ik} = 0$.

وبأخذ تقلص طرفي (4.15)، وذلك بضرب طرفيها بـ δ_i^j، نحصل على العلاقة التالية المقفة في $\Omega \times B^+$:

$$E_k^{\,k} = \frac{1}{2}(\nabla^k u_k + \nabla_k u^k) \qquad (4.16)$$

وبما أن:

$$\nabla^k u_k = \nabla_k u^k \qquad (4.17)$$

فتأخذ العلاقة (4.16)، على الشكل التالي في $B \times A^+$:

$$E_k^{\,k} = \nabla_k u^k \qquad (4.18)$$

هذا من جهة ، ومن جهة أخرى، برفع الدليلين i و j في العلاقة التنسورية الهندسية (4.11)، متبعين في ذلك الطريقة ذاتها التي اتبعناها من قبل، فنحصل على العلاقة التالية المحققة في $\Omega \times B^+$:

$$E^{ij} = \frac{1}{2}(\nabla^i u^j + \nabla^j u^i) \qquad (4.19)$$

الآن، بتعويض (4.18) و (4.19) في (4.12)، فنحصل على العلاقة التنسورية التالية، التي تعطينا مقطع اللزوجة التنسوري الناطق، بدلالة مقطع الإزاحة المتجهي الناطق، والمحققة في $B \times A^+$:

$$P^{ji} = \mu(\nabla^j u^i + \nabla^i u^j) + \lambda\, g^{ij}\nabla_k u^k \qquad (4.20)$$

وبتطبيق المشتق موافق التغيير ∇_j، على طرفي العلاقة (4.20)، واستخدام خواص المشتق موافق التغيير، نحصل على العلاقة التالية، المحققة في $B \times A^+$:

$$\begin{aligned} \nabla_j P^{ji} &= \mu(\nabla_j \nabla^j u^i + \nabla^i \nabla_j u^j) + \lambda\, \nabla^i \nabla_k u^k \\ &= \mu \nabla_j \nabla^j u^i + (\lambda+\mu)\, \nabla^i \nabla_j u^j \end{aligned} \qquad (4.21)$$

نعوض (4.21) في معادلة الحركة (4.8) ، فنحصل على المعادلة التالية، المحققة في $B \times A^{+}$:

$$\mu \nabla_j \nabla^j u^i + (\lambda+\mu)\ \nabla^i \nabla_j u^j - \nabla^i P + \rho\, b^i - \rho\, \frac{\partial^2 u^i}{\partial t^2} = 0 \quad (4.22)$$

التي نضيف لها معادلة الاستمرار بالكتلة (4.9).

ندعوا (4.22) و (4.9) بالشكل التنسوري الناطق (في النظام الإحداثي المنحني η_i) لمعادلات Lame لتدفق مائع Navier–Stokes (N–S)، المتجانس والإيزوتروبي، والغير ضغوط.

إلى معادلتي Lame: (4.22) و (4.9)، نضيف الشروط الحدية التالية:

الشروط الحدية، المحققة على $\partial\Omega \times B$:

$$Q^i = - P\, n^i + [\mu\, (\nabla^j u^i + \nabla^i u^j) + \lambda\, g^{ij}\, \nabla_k u^k\,] n_j\,, \quad (4.23)$$

كما نضيف الشروط الابتدائية (4.14). ندعو (4.9) و (4.22) و(4.23) و (4.14) و(4.19) و(4.20) و(4.7) بالشكل الناطق(في النظام الإحداثي المنحني η_i) لمسألة Lame التي تحكم السلوك الهيدروديناميكي لمائع Navier–Stokes (N–S)، المتجانس والإيزوتروبي، والغير ضغوط ، والذي يشغل في لحظة البدء منطقة بسيطة الترابط Ω في المتنوعة الاقليدية ثلاثية البعد R^3.

5. الاستنتاجات والمقترحات:

أولا) الاستنتاجات: استنتجنا الشكل التنسوري التقليدي الناطق وشكل Lame التنسوري الناطق في نظام إحداثي منحني كيفي في المتنوعة الإقليدية R^3 ، للحالة الهيدروديناميكية لمائع Navier–Stokes (N–S) المتجانس والإيزوتروبي، والغير ضغوط ويشغل في لحظة البدء منطقة بسيطة الترابط Ω في المتنوعة الإقليدية R^3. وتكمن أهمية ذلك بأنه يمكن أن نختار الإحداثيات المنحنية الملائمة التي تسهل حل المسألة.

ثانياً) المقترحات: يمكن أن نختتم هذا البحث مسائلتين للمناقشة، هي الآتية:

مسألة1: إعادة نفس الدراسة لأجل مائع Navier–Stokes (N–S) المتجانس والإيزوتروبي، وغير الضغوط، ويخضع لحقل كهرطيسي، ولحقل حراري.

مسألة2: تعميم الدراسة لأجل المائع الاستقطابي المتجانس والإيزوتروبي، وغير الضغوط.

المراجع

[1]-*Heinbockel ,J.H, 1996*- Introduction to Tensor Calculus and Continuum Mechanics, Department of Mathematics and Statistics, Old Dominion University.

[2]- Łukaszewicz ,*G., 1999*- Micropolar Fluids, Modeling and Simulation in Science, Engineering and Technology, Springer.

[3]- Nakayama ,*Y., 1999* - Introduction to Fluid Mechanics, First published in English in Great Britain by Arnold 1999 Reprinted with revisions by Butterworth-Heinemann 2000.

[4] – Mountajab Al-Hasan and Waad Samir Attiah, 2019 – The Hooke thermodynamical model in a curve coordinate system, Journal of Al-Baath University,Vol.41, Nr.13, p. 137-152.

[5]- *Truesdell C.*: Mechanics of Solids, Volume II, Springer-Verlag Berlin Heidelberg GmbH 1984.

[6]- *K. Hackl & M. Goodarzi*: An Introduction to Linear Continuum Mechanics, Lecture Notes, Ruhr-University Bochum, Faculty of Civil and Environmental Engineering, 2010.

[7]- *Hung Nguyen-Schåfer*, Tensor Analysis and Elementary Differential Geometry for Physicists and Engineers, Second Edition, Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2017.

[8]- *Rebecca M. Brannon*, Curvilinear Analysis in a Euclidean Space, Second Edition, University of New Mexico, 2004.