دور المعادلات التفاضلية الهوكيةالصرفة في إيجاد الحلول الشاذة الهوكية الصرفة لأجل حالةالمصادر الحرارية المركزة في جسم صلب دقيق البنية وغير محدود

نبيل علي[†]

ملخص البحث

يتعلق هذا البحث بالجسم الصلب دقيق الاستقطاب الذي يملك ستة ثوابت مادية والذي وضع أساسه الرياضي كلاً من Eringen وNowacki والذي يدعى اختصاراً بالجسم دقيق الاستقطاب (E-N:6) [10-11].

هذا المقال يتمم مجموعة المقالات [1-6] ، وتم فيه مايلي: من أجل الجسم الترموديناميكي الصلب دقيق الاستقطاب (E-N:6) غير المحدود (يشغل R^3) والذي كلاً من إجهاداته وحرارته الخارجية معدومة، تم إيجاد السلوك الترموديناميكي الهوكي الصرف، الشاذ للجسم والموافق فقط للمصادر الحرارية المركزة في نقطة ما ξ من R^3 والمتغيرة توافقياً مع الزمن في الوقت الذي يطابق فيه السلوك الدقيق الصرف السلوك الصفري. في النهاية تم انهاء البحث بمسائلتين للمناقشة المستقبلية.

[†] أستاذ مساعد في قسم الراضيات – كلية العلوم – جامعة طرطوس.

الكلمات المفتاحية: السلوك الشاذ التقليدي الصرف- طريقة التراكيب لمعادلات الحركة بالإجهادات والحرارة، من نوع إغناتشاك - الجسم المرن دقيق الاستقطاب (E-N:6).

Role of pure Hooke differential equations in finding pure Hooke singular solutions, related to the concentrated heat sources in unbounded micropolar elastic solid

Nabil Ali †

Abstract

This paper relates to the mathematical model of the micropolar elastic solid of six material constants and six degrees of freedom discussed by Eringen and Nowacki [10,11], and shortly called (E-N:6). This article is a continuation of the papers [1-6] and contains the following: For the thermodynamical micropolar thermoelastic unbounded (E-N:6) body (occupying R^3) that has vanishing external stresses and external temperature, we find the singular pure classical thermodynamical behavior of the above mentioned body, correspondding to the only heat sources concentrated in a point $\xi \in R^3$, and varying harmonically in time, where the pure dynamical micropolar behavior is the zero one. Finally, we end the paper by suggesting two problems for discussion.

† Associate Professor at Department of Mathematics – Faculty of Science – Tartous University.

Key words: The singular pure classical behaviors-Superposition method of Stress-temperature equations of motion of Ignaczak type -The (E-N:6) micropolar elastic body.

1. مقدمة:

في [6]، نوقش تركيب السلوكيات الترموديناميكية في وصف Ignaczak بالإجهادات والحرارة [7] لأجل الجسم الصلب دقيق الاستقطاب من نوع Eringen-Nowacki [10,11] والذي له ستة درجات حرية وستة ثوابت مادية [والمسمى اختصارا: (E-N:6)]، ولأجل الحالة الفراغية للانفعالات المرنة اللامتناهية في الصغر وبوجود حمول ترموميكانيكية. وفي [4]، تم إثبات إيزوتيرمية[1] سلوك Ignaczak الترموديناميكي المتمم في (E-N:6) الخاضع لحرارة ويملأ R^3 والذي إجهاداته وحرارته الخارجية جميعها معدومة. في[3]، تم استنتاج صيغ Fourrier التكاملية التي تحدد سلوكي Ignaczak الترموديناميكيين النظاميتين، الهوكي والمتمم ، في الجسم (E-N:6) الخاضع لحرارة ويشغل كل R^3 والذي كلاً من إجهاداته وحرارته الخارجية جميعها معدومة. في [2] ، تم إيجاد السلوكين الترموديناميكيين، الشاذين؛ الهوكي والدقيق المتمم لأجل الجسم الصلب دقيق الاستقطاب وغير المحدود وغير المجهد ولا المسخَّن خارجياً في حالة خضوعه لقوة حجمية مركَّزة في نقطة ما ومتغيرة توافقياً مع الزمن. أخيراً في [1] ، تم اثبات صحة مايلي: لأجل الجسم الترموديناميكي الصلب دقيق الاستقطاب (E-N:6)، وغير المحدود (يشغل R^3) ، والذي كلاً من إجهاداته وحرارته، الخارجية، معدمة، فإن: I) السلوك الترموديناميكي للجسم، الموافق للمصادر الحرارية، فقط ، هو سلوك تقليدي صرف، II) السلوك الترموديناميكي للجسم، الموافق للعزم الحجمي فقط ، هو سلوك دقيق صرف.

2. هدف البحث:

في البحث، من أجل الجسم الترموديناميكي الصلب دقيق الاستقطاب (E-N:6)، وغير المحدود، والذي إجهاداته وحرارته، الخارجية، جميعها معدومة، سنوجد السلوك الترموديناميكي الهوكي الصرف، الشاذ، للجسم، والموافق، فقط للمصادر الحرارية، المركَّزة في نقطة ما ξ من R^3، والمتغيرة توافقياً مع الزمن، (حيث السلوك الدقيق الصرف يتطابق مع السلوك الصفري [1]) .

[1] العملية الترموديناميكية الإيزوتيرمية هي العملية متساوية درجات الحرارة.

3. طرق البحث:

من أجل الجسم الترموديناميكي الصلب دقيق الاستقطاب (E-N:6)، وغير المحدود، والذي إجهاداته وحرارته، الخارجية، جميعها معدومة، سنوجد السلوك الترموديناميكي الهوكي الصرف الشاذ للجسم والموافق فقط للمصادر الحرارية، المركَّزة في نقطة ما ع من R^3، والمتغيرة توافقياً مع الزمن، وذلك باستخدام: أولاً) نتائج البحث [1]، ثانياً) طريقة التحويلات التكاملية([9])؛ المتمثلة بتطبيق تحويل Fourier التكاملي المضاعف من المرتبة الرابعة على المعادلات المستقلة لأجل كل من الإجهادات الهوكية، والإجهادات المتممة، والحرارة الهوكية، في الجسم المدروس، والتي في حالتنا هذه، ستكون أبسط من المعادلات المستقلة لأجل هذه الحقول المذكورة والمستنتجة في [3-6].

إن نتائج البحث ستعتمد بشكل جزئياً على دمج نتائج البحث [1]، ولذلك سنعرض فيمابلي بشكلٍ مختصر مايهمنا من تلك النتائج. في البحث سنركز اهتمامنا على النموذج الرياضي، للجسم الصلب دقيق الاستقطاب (E-N:6)[10,11] ، الذي في بحثنا يشغل كامل الفضاء الإقليدي ثلاثي الأبعاد: $\Omega = R^3$، وحقلا إجهاداته، وحقل حرارته، الخارجية، معدومة، جميعها. أي سنهتم بالجسم المرن دقيق الاستقطاب، والخطي، والمتجانس والمتماثل المناحي، ومركزي التناظر: $\Omega(\mu, \lambda, \alpha, \beta, \gamma, \varepsilon, \rho, J, \kappa, \eta_0, \nu_T)$، حيث الرموز الموجودة بين قوسين هي الثوابت الميكانيكية–الحرارية للجسم، وهي حقيقية. وسنفترض أيضاً أن كافة الحقول الفيزيائية التي تمثل الحالة الميكانيكية الحرارية للجسم المرن دقيق الاستقطاب، هي دوال حقيقية ملساء بالقدر الكافي، وتتبع للموضع والزمن. في هذه الحالة، يُوصف السلوك الترموديناميكي، المرن، للجسم من خلال أسرة المقاطع التنسورية: $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\varphi}, \theta, \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\kappa})$، علماً أن: $\mathbf{u}$ و $\boldsymbol{\varphi}$ مقطعان متجهيان مستقلان، وهما على الترتيب، مقطع الإزاحات ومقطع التوجهات، و $\theta := T - T_0$ حقل سلمي ؛ هو تغير حقل الحرارة؛ حيث T الحرارة المطلقة في الجسم و T_0 حرارة الحالة الطبيعية له. إضافةً إلى ماتقدم ذكره فإن: $\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\kappa}$، مقاطع تنسورية من المرتبة الثانية، هي على

الترتيب: مقطع إجهادات القوة، ومقطع إجهادات العزم، ومقطع الانفعالات، ومقطع الانفعالات دقيقة الاستقطاب. يمكن أن تُمثَّل تلك المقاطع، في $\Omega\times(0,\infty)$، وفي النظام ألإحداثي الديكارتي العطالي $Ox_1x_2x_3$، ذي القاعدة $(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3)$ بالشكل التالي:

$$\mathbf{u}=u_i\ \mathbf{e}_i \quad , \quad \boldsymbol{\varphi}=\varphi_i\ \mathbf{e}_i \tag{3.1}$$

$$\boldsymbol{\sigma}=\sigma_{ij}\ \mathbf{e}_i\otimes\mathbf{e}_j\ , \quad \boldsymbol{\mu}=\mu_{ij}\ \mathbf{e}_i\otimes\mathbf{e}_j\ , \tag{3.2}$$

$$\boldsymbol{\gamma}=\gamma_{ij}\ \mathbf{e}_i\otimes\mathbf{e}_j\ , \quad \boldsymbol{\kappa}=\kappa_{ij}\ \mathbf{e}_i\otimes\mathbf{e}_j \tag{3.3}$$

وهنا اعتمدنا الطريقة التنسورية في الجمع (رموز Einstein)، حيث الأدلة اللاتينية $i\ ,\ j\ ,\ k, \ldots$ تأخذ القيم $1\,,2\,,3$، كما أن المصفوفات الأربع في الأطراف اليمنى للعلاقات (3.2) و(3.3) غير متناظرة.

في نموذج Ignaczak للجسم (E-N:6) ،تم افتراض أن السلوك الترموديناميكي، المرن، دقيق الاستقطاب، للجسم يُكَّتب في $\Omega\times(0,\infty)$ بالشكل الآتي [6]:

$$\begin{gathered}\mathbf{u}=\mathbf{u}^0+\ \mathbf{u}'\ ,\ \boldsymbol{\varphi}=\boldsymbol{\varphi}^0+\boldsymbol{\varphi}'\ ,\ \theta=\theta^0+\ \theta'\ , \\ \boldsymbol{\sigma}=\boldsymbol{\sigma}^0+\boldsymbol{\sigma}'\ ,\ \boldsymbol{\mu}=\boldsymbol{\mu}^0+\boldsymbol{\mu}'\ ,\ \boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{\varepsilon}^0+\boldsymbol{\gamma}'\ ,\ \boldsymbol{\kappa}=\boldsymbol{\kappa}^0+\boldsymbol{\kappa}'\end{gathered} \tag{3.4}$$

حيث المقاطع التنسورية $(\mathbf{u}^0,\ \boldsymbol{\varphi}^0,\ \theta^0,\ \boldsymbol{\sigma}^0\ ,\ \boldsymbol{\mu}^0,\ \boldsymbol{\varepsilon}^0,\ \boldsymbol{\kappa}^0)$ تتعلق بجسم Hooke المرن: $\Omega(\mu\,,\lambda\,,\rho\,,\eta_0\,,\nu_T)$، أما $(\mathbf{u}'\,,\ \boldsymbol{\varphi}'\,,\ \theta'\,,\ \boldsymbol{\sigma}'\,,\ \boldsymbol{\mu}'\,,\ \boldsymbol{\gamma}'\,,\ \boldsymbol{\kappa}')$ فَتُمثِّلُ المقاطع التنسورية الدقيقة، المتممة. إن المقاطع التنسورية، المُمَثِلة لجسم Hooke والمقاطع التنسورية، الدقيقة، المتممة، الموافقة، تُكتب في $\Omega\times(0,\infty)$، وفي $Ox_1x_2x_3$ بالشكل:

$$\mathbf{u}^0=u_i^0\ \mathbf{e}_i \quad , \quad \boldsymbol{\varphi}^0=\varphi_i^0\ \mathbf{e}_i \tag{3.5}$$

$$\boldsymbol{\sigma}^0=\sigma_{ij}^0\ \mathbf{e}_i\otimes\mathbf{e}_j\ , \quad \boldsymbol{\mu}^0=\mu_{ij}^0\ \mathbf{e}_i\otimes\mathbf{e}_j\ , \tag{3.6}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}^0=\varepsilon_{ij}^0\ \mathbf{e}_i\otimes\mathbf{e}_j\ , \quad \boldsymbol{\kappa}^0=\kappa_{ij}^0\ \mathbf{e}_i\otimes\mathbf{e}_j\ , \tag{3.7}$$

علماً أن: $\boldsymbol{\varphi}^0=\frac{1}{2}\,\mathbf{curl}\ \mathbf{u}^0$، وأن المصفوفتين $\left\{\sigma_{ij}^0\right\}_{3\times3}$ و $\left\{\varepsilon_{ij}^0\right\}_{3\times3}$ متناظرتين، بينما المصفوفتان $\left\{\mu_{ij}^0\right\}_{3\times3}$ و $\left\{\kappa_{ij}^0\right\}_{3\times3}$ فهما غير متناظرتان؛

$$\mathbf{u}'=u_i'\ \mathbf{e}_i \quad , \quad \boldsymbol{\varphi}'=\varphi_i'\ \mathbf{e}_i \tag{3.8}$$

$$\boldsymbol{\sigma}'=\sigma_{ij}'\ \mathbf{e}_i\otimes\mathbf{e}_j\ , \quad \boldsymbol{\mu}'=\mu_{ij}'\ \mathbf{e}_i\otimes\mathbf{e}_j\ , \tag{3.9}$$

$$\boldsymbol{\gamma}'=\gamma_{ij}'\ \mathbf{e}_i\otimes\mathbf{e}_j\ , \quad \boldsymbol{\kappa}'=\kappa_{ij}'\ \mathbf{e}_i\otimes\mathbf{e}_j\ , \tag{3.10}$$

حيث المقطعان المتجهيان: $\mathbf{u}'$ و $\boldsymbol{\varphi}'$ مستقلان في $\Omega\times(0,\infty)$، أما المصفوفات الظاهرة في العلاقاتين (3.9) و(3.10) فهي غير متناظرة.

انطلاقاً من نموذج Ignaczak لـ (E-N:6) [7] ، ومن أجل (E-N:6) الذي يملأً R^3، وإجهاداته وحرارته، الخارجية معدومة، تم في [6]، تركيب سلوك Ignaczak لـ (E-N:6) على شكل مجموع سلوكين Ignaczak؛ السلوك الأول هو سلوك Ignaczak لجسم Hooke، أما السلوك الثاني فهو سلوك Ignaczak الدقيق المتمم، الموافق. فيمايلي نعرض أولاً سلوك Ignaczak الأول، المذكور، لـ(E-N:6)، غير المحدود، والخاضع لمؤثرات حرارية، ويشغل R^3، والذي إجهاداته وحرارته، الخارجية، جميعها معدومة (انظر أيضاً [3,4])، ذلك لأجل حالة انعدام مقطع القوة الحجمية، وعندما يكون كلاً من مقطع الإزاحة الهوكي، الابتدائي، وكذلك القيمة الابتدائية لمقطع سرعته، كمونياً. تم في[4] إثبات أن: $e'\equiv 0,\ \theta'\equiv 0$ (حيث e' التمدد الحجمي المتمم). أما في [1] فقد تم اثبات أن: $(\boldsymbol{\varphi}^0,\ \boldsymbol{\mu}^0,\ \boldsymbol{\kappa}^0)=(\mathbf{0})$؛ أي أن سلوك Ignaczak الترموديناميكي الهوكي، هو سلوك ترموديناميكي هوكي، صرف، وبنفس الوقت سلوك Ignaczak الدقيق المتمم، هو سلوك ديناميكي، دقيق صرف. يأخذ كلاً من هذين السلوكين الصرفين الشكل التالي[1]:

– *سلوك* Ignaczak *الهوكي الصرف:*

- معادلات الحقل، الهوكية، الصرفة، المحققة في $\Omega\times(0,\infty)$:

$$\hat{c}_2^2(\hat{R}^0_{i,j}+\hat{R}^0_{j,i})-\ddot{\sigma}^0_{ij}+(\lambda\ddot{e}^0-\nu_T\ddot{\theta}^0)\delta_{ij}=0 \qquad (3.11)$$

$$D\theta^0-\eta_0\dot{e}^0=-\frac{Q}{\kappa} \qquad (3.12)$$

حيث:
$$\hat{c}_2^2=\frac{\mu}{\rho}\quad,\quad \hat{R}^0_i=\sigma^0_{ji,j}$$

علماً أن: $\dot{e}^0=\frac{1}{2\mu+3\lambda}(\dot{\sigma}^0_{kk}+3\nu_T\dot{\theta}^0)$ ،$\ddot{e}^0=\frac{1}{2\mu+3\lambda}(\ddot{\sigma}^0_{kk}+3\nu_T\ddot{\theta}^0)$،

ρ تمثل الكتلة الحجمية للجسم دقيق الاستقطاب، المقدار $\eta_0=\frac{\nu_T\,T_0}{\lambda_0}$ يمثل المعامل الحراري–الميكانيكي للجسم، حيث $\nu_T=(3\lambda+2\mu)\,a_t$، أيضاً: $\mu\ ,\lambda\in R_+$ هما ثابتا Lame الماديان للجسم و a_t معامل التمدد الخطي الحراري للجسم، و λ_0 معامل التوصيل

الحراري لـه. إضـافةً إلـى ماتقـدم ذكـره فـإن: $\kappa = \dfrac{\lambda_0}{c_\varepsilon}, Q = \dfrac{\kappa W}{\lambda_0}$ ، علمـاً أن: c_ε تمثـل الحرارة النوعية للجسم لأجل تشوه ثابت لـه، و W تمثل كمية الحرارة المُشكَّلة في وحدة الحجم ووحدة الزمن، أخيراً Q هي المصادر الحرارية في الجسم دقيق الاستقطاب. الفاصلة الدليلية تدل على المشتق الجزئي بالنسبة لمتحولات الموضع، أما النقطة فتدل على المشتق الجزئي بالنسـبة للـزمن: $\dot{f} \equiv \partial f / \partial t \equiv \partial_t f$. نعتمـد الطريقـة التنسـورية فـي الجمـع (رموز Einstein)، حيث الأدلة اللاتينية $i\ ,\ j\ ,\ k, \ldots$ تأخذ القيم $1, 2, 3$، إضافةً إلى ماتقدم فإن D هو المؤثر الاشتقاقي، الترموديناميكي: $D = \nabla^2 - \frac{1}{\kappa}\,\partial_t$، حيث ∇^2 يمثل مؤثر Laplace الاشتقاقي، السلمي؛ $\nabla^2 f = f_{,ii}$،

- الشروط الحدية، الهوكية، الصرفة:

$$\lim_{\|\boldsymbol{x}\| \to \infty} \sigma^0_{ji} = 0 \quad , \quad \lim_{\|\boldsymbol{x}\| \to \infty} \theta^0 = 0 \tag{3.13}$$

حيث: $\boldsymbol{x} \equiv (x_1, x_2, x_3)\ ;\ \|\boldsymbol{x}\| := (x_i x_i)^{\frac{1}{2}}$ ،

- الشروط الابتدائية الهوكية، الصرفة، المحققة في $\Omega \times \{0\}$:

$$\sigma^0_{ij} = \sigma^{0(0)}_{ij} \quad , \quad \theta^0 = l \quad , \quad \dot{\sigma}^0_{ij} = \dot{\sigma}^{0(0)}_{ij} \, , \tag{3.14}$$

$$\begin{aligned} &\sigma^{0(0)}_{ij} = 2\mu\, \varepsilon^{0(0)}_{ij} + (\lambda\, e^{0(0)} - \nu_T\, l\,)\, \delta_{ij} \ , \\ &\varepsilon^{0(0)}_{ij} = \frac{1}{2}\,(f^0_{i,j} + f^0_{j,i}) \ \ , \ \ e^{0(0)} = f^0_{k,k} \end{aligned} \tag{3.15}$$

$$\begin{aligned} &\dot{\sigma}^{0(0)}_{ij} = 2\mu\, \dot{\varepsilon}^{0(0)}_{ij} + [(\lambda + \nu_T\, \kappa\, \eta_0)\dot{e}^{0(0)} - \nu_T\,(\kappa\, l_{,kk} + Q^{(0)})]\,\delta_{ij} \, , \\ &\dot{\varepsilon}^{0(0)}_{ij} = \frac{1}{2}(g^0_{i,j} + g^0_{j,i}) \ \ , \ \ \dot{e}^{0(0)} = g^0_{k,k} \end{aligned} \tag{3.16}$$

حيث تمثل $Q^{(0)}$ القيمـة الابتدائيـة للمصـادر الحراريـة والتوابـع $[(f^0_i\ , l\ , g^0_i) : \Omega \to R\,]$ مفروضـة، تمثـل فيهـا: f^0_i و g^0_i [2] الجـزء الهـوكي لــ f_i و g_i ، علـى الترتيـب، مـع العلـم بـأن: f_i و g_i معطـات بدورها فـي Ω ، وهـي علـى الترتيب، القيم الابتدائية لمركبـات مقطـع الإزاحة، المتجهي، الكلي، والقيم الابتدائية لسرع هذه المركبات في Ω ، إضافة إلى ماتقدم فإن l هي القيمة الابتدائية للحرارة الكلية في Ω.

---

[2] $f^0_i = \lim\limits_{\alpha \to 0} f_i$ و $g^0_i = \lim\limits_{\alpha \to 0} g_i$ (انظر [3]) .

- العلاقات التأسيسية الهوكية ، الصرفة، محلولـةً بالنسبة للانفعالات الهوكية الصرفة في $\Omega\times[0,\infty)$:

$$2\mu\varepsilon^{0}_{ij}=\sigma^{0}_{ij}-(\lambda e^{0}-\nu_T\,\theta^{0})\,\delta_{ij} \tag{3.17}$$

حيث :

$$e^{0}=\frac{1}{2\mu+3\lambda}\,(\sigma^{0}_{kk}+3\nu_T\,\theta^{0})$$

- العلاقات التي تعطي الإزاحات الهوكية، الصرفة ، وفقاً لطريقةالوصف الإجهادي– الحراري في $\Omega\times[0,\infty)$:

$$u^{0}_{i}=g^{0}_{i}\,t+f^{0}_{i}+\rho^{-1}(t*\hat{R}^{0}_{i}) \tag{3.18}$$

وهنا رمز النجمة * يمثل عملية الطي ([9]):

$$t*f(\boldsymbol{x};t)=\int_{0}^{t}(t-\tau)\,f(\boldsymbol{x};\tau)\,d\tau$$

– *سلوك* Ignaczak *الديناميكي، الدقيق الصرف [1] :*

- معادلات الحقل، الدقيقة، المتممة ، بلغة الإجهادات ، الدقيقة، المتممة في $\Omega\times(0,\infty)$:

$$\rho^{-1}\hat{R}'_{i,j}-J^{-1}\epsilon_{kji}M'_{k}-\{\frac{1}{2\mu}\ddot{\sigma}'_{(ji)}+\frac{1}{2\alpha}\ddot{\sigma}'_{[ji]}\}=0\,, \tag{3.19}$$

$$J^{-1}M'_{i,j}-\{\frac{1}{2\gamma}\ddot{\mu}'_{(ji)}+\frac{1}{2\varepsilon}\ddot{\mu}'_{[ji]}-\frac{\beta}{2\gamma\,(2\gamma+3\beta)}\,\ddot{\mu}'_{kk}\,\delta_{ij}\}=0 \tag{3.20}$$

وهنا: $\hat{R}'_{i}=\sigma'_{ji,j}$, $\hat{M}'_{i}=\epsilon_{ijk}\sigma'_{jk}+\mu'_{ji,j}$, $M'_{i}=\hat{M}'_{i}+Y_{i}$ ،

أما الدليلان (...) ،[...]، على الترتيب، يدلان على الجزء التناظري، والجزء التناظري العكسي للمصفوفة ؛ $\sigma'_{(ji)}:=\frac{1}{2}(\sigma'_{ji}+\sigma'_{ij})$ و $\sigma'_{[ji]}:=\frac{1}{2}(\sigma'_{ji}-\sigma'_{ij})$ ،

كما أن J تمثل العطالة الدورانية للجسم المرن دقيق الاستقطاب ، الرموز ϵ_{ijk} هي المركبات الديكارتية في الجملة المعتبرة، لتنسور Levi-Civitá، أيضاً: (Y_1,Y_2,Y_3) هو مقطع العزم الحجمي، المتجهي،أخيراً: $\alpha,\beta,\gamma,\varepsilon\in R_{+}$ هي الثوابت المادية الدقيقة، الصرفة للجسم، المدروس.

- الشروط الحدية ، الدقيقة، المتممة، بلغة الإجهادات، الدقيقة المتممة:

$$\lim_{\|\mathbf{x}\|\to\infty} \sigma'_{j\,i} = 0 \quad , \quad \lim_{\|\mathbf{x}\|\to\infty} \mu'_{j\,i} = 0 \qquad (3.21)$$

- الشروط الابتدائية، الدقيقة، المتممة، بلغة الإجهادات، الدقيقة المتممة في $\Omega\times\{0\}$:

$$\begin{aligned} \sigma'_{j\,i} &= \sigma'^{(0)}_{j\,i} \quad , \quad \mu'_{j\,i} = \mu'^{(0)}_{j\,i} \\ \dot{\sigma}'_{j\,i} &= \dot{\sigma}'^{(0)}_{j\,i} \quad , \quad \dot{\mu}'_{j\,i} = \dot{\mu}'^{(0)}_{j\,i} \end{aligned} \qquad (3.22)$$

حيث هنا:

$$\begin{aligned} \sigma'^{(0)}_{j\,i} &= 2\mu\,\varepsilon'^{(0)}_{i\,j} + 2\alpha\,[\,\omega'^{(0)}_{i\,j} - \epsilon_{k\,j\,i}\,k'_k\,], \\ \mu'^{(0)}_{j\,i} &= (\gamma+\varepsilon)\,k'_{i\,,\,j} + (\gamma-\varepsilon)\,k'_{j\,,i} + \beta\,k'_{k\,,k}\,\delta_{i\,j} \end{aligned} \qquad (3.23)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon'^{(0)}_{i\,j} &= \frac{1}{2}(f'_{i\,,\,j} + f'_{j\,,\,i})\,,\ \omega'^{(0)}_{i\,j} = \frac{1}{2}(f'_{i\,,\,j} - f'_{j\,,\,i})\,, \\ f'_i &= f_i - f^0_i\,,\ k'_k = k_k\,, \end{aligned} \qquad (3.24)$$

كما أن:

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}'^{(0)}_{j\,i} &= 2\mu\,\dot{\varepsilon}'^{(0)}_{i\,j} + 2\alpha\,[\,\dot{\omega}'^{(0)}_{i\,j} - \epsilon_{k\,j\,i}\,\chi'_k\,], \\ \dot{\mu}'^{(0)}_{j\,i} &= (\gamma+\varepsilon)\,\chi'_{i\,,\,j} + (\gamma-\varepsilon)\,\chi'_{j\,,\,i} + \beta\,\chi'_{k\,,k}\,\delta_{i\,j} \end{aligned} \qquad (3.25)$$

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}'^{(0)}_{i\,j} &= \frac{1}{2}(g'_{i\,,\,j} + g'_{j\,,\,i})\ ,\ \dot{\omega}'^{(0)}_{i\,j} = \frac{1}{2}(g'_{i\,,\,j} - g'_{j\,,\,i})\ , \\ g'_i &= g_i - g^0_i\,,\ \chi'_k = \chi_k\ , \end{aligned} \qquad (3.26)$$

فيما سبق يجب تحقق مايلي: $f_{k\,,\,k} = f^0_{k\,,\,k}$ و $g_{k\,,\,k} = g^0_{k\,,\,k}$؛ أي تحقق: $e^{(0)} = e^{0(0)}$ و $\dot{e}^{(0)} = \dot{e}^{0(0)}$.[3]

- العلاقات التأسيسية الدقيقة ، المتممة، محلولةً بالنسبة للانفعالات الدقيقة، المتممة في $\Omega\times[0\,,\infty)$:

$$\begin{aligned} \gamma'_{j\,i} &= \frac{1}{2\mu}\sigma'_{(j\,i\,)} + \frac{1}{2\alpha}\sigma'_{[\,j\,i\,]}\ , \\ \kappa'_{j\,i} &= \frac{1}{2\gamma}\mu'_{(\,j\,i\,)} + \frac{1}{2\varepsilon}\mu'_{[\,j\,i\,]} - \frac{\beta}{2\gamma\ (2\gamma+3\beta)}\ \mu'_{k\,k}\,\delta_{i\,j} \end{aligned} \qquad (3.27)$$

[3] ينتج ذلك عن المتطابقة $e' \equiv 0$. أي أن التوسع الحجمي الكلي، الابتدائي، يساوي التوسع الحجمي التقليدي، الابتدائي، والسرعة الابتدائية للتوسع الحجمي الكلي، تساوي السرعة الابتدائية للتوسع الحجمي التقليدي.

- العلاقات التي تعطي الإزاحات والدورانات ، الدقيقة المتممة ، بلغة الإجهادات الدقيقة ، المتممة في $\Omega\times[0,\infty)$:

$$u_i' = g_i'\, t + f_i' + \rho^{-1}(t * \hat{R}_i')\,, \tag{3.28}$$

$$\varphi_i' = \chi_i'\, t + k_i' + J^{-1}(t * M_i') \tag{3.29}$$

وفي [1] أيضاً، تم الوصول إلى النتائج التالية، المتعلقة بالمعادلات المستقلة لحقول Ignaczak، الهوكية ، الصرفة ولحقول Ignaczak المتممة، الدقيقة الصرفة في الجسم المعتبر (E-N:6)، الخاضع لمؤثرات حرارية، ولا يخضع لقوة حجمية، ويشغل R^3:

المعادلات المستقلة من أجل الإجهادات الهوكية الصرفة σ^0_{ij} ، والحرارة الهوكية الصرفة θ^0، والمحققة في $\Omega\times(0,\infty)$:

$$D_2\sigma^0_{ij} = -\frac{\nu_T}{\kappa}\left[2\mu Q_{,ij} + \delta_{ij}(\lambda\nabla^2 - \Box_1)Q\right] \tag{3.30}$$

$$D_2\,\theta^0 = -\frac{1}{\kappa}\Box_1 Q \tag{3.31}$$

حيث: $\Box_1 = (\lambda + 2\mu)\nabla^2 - \rho\,\partial_t^2$ و D_2 هو المؤثر المركزي، وهو يعطى بـ $D_2 = D\,\Box_1 - \eta_0\,\nu_T\,\partial_t\nabla^2$.

المعادلات المستقلة من أجل الإجهادات، المتممة، الدقيقة الصرفة σ'_{ji} و μ'_{ji} ، والمحققة في $\Omega\times(0,\infty)$:

$$\begin{aligned}\Box_3 L\,\sigma'_{ji} = 2\alpha\{\,&\Box_3[\,(\mu+\alpha)\epsilon_{isn}Y_{n,sj} + \\ &+(\mu-\alpha)\epsilon_{jsn}Y_{n,si}\,] + \\ &+\epsilon_{ijk}(L_1 Y_{s,sk} - \Box_2\Box_3 Y_k)\}\,,\end{aligned} \tag{3.32}$$

$$\begin{aligned}\Box_3 L\,\mu'_{ji} = -\Big\{&\Box_2\Box_3[\,(\gamma+\varepsilon)Y_{i,j} + (\gamma-\varepsilon)Y_{j,i}\,] \\ &-2\gamma\,L_1 Y_{s,sij} + \beta\,\delta_{ij}\,L\,Y_{s,s}\Big\}\end{aligned} \tag{3.33}$$

وهنا: $L = \Box_2\Box_4 + 4\alpha^2\nabla^2$ ، $L_1 = (\beta+\gamma-\varepsilon)\Box_2 - 4\alpha^2$ ، و $\Box_2 = (\mu+\alpha)\nabla^2 - \rho\,\partial_t^2$ ، $\Box_3 = (\beta+2\gamma)\nabla^2 - 4\alpha - J\,\partial_t^2$ و $\Box_4 = (\gamma+\varepsilon)\nabla^2 - 4\alpha - J\,\partial_t^2$.

وفي [1]، تم تمييز الحالتين التاليتين:

الحالة الأولى: $Y_i = 0,\ Q \neq 0$ و$(f_i' = 0\ ,\ g_i' = 0,\ k_i' = 0\ ,\ \chi_i' = 0\ )$:

في هذه الحالة العملية الترموديناميكية، الدقيقة الصرفة، هي العملية الصفرية؛

$$(\mathbf{u}',\ \boldsymbol{\varphi}',\ \theta',\ \boldsymbol{\sigma}',\ \boldsymbol{\mu}',\ \boldsymbol{\gamma}',\ \boldsymbol{\kappa}') \equiv (\mathbf{0}) \qquad (3.34)$$

ويؤول السلوك الترموديناميكي بالكامل إلى السلوك الهوكي الصرف: $(\mathbf{u}^0,\ \theta^0,\ \boldsymbol{\sigma}^0,\ \boldsymbol{\varepsilon}^0)$ ، ($(\boldsymbol{\varphi}^0,\ \boldsymbol{\mu}^0,\ \boldsymbol{\kappa}^0) \equiv (\mathbf{0})$)، المحقق للمسألة الهوكية، الصرفة، الموافقة، والتي تُهمل فيها البنية الدقيقة للجسم المعتبر، أما المعادلات، الهوكية، الصرفة، المستقلة، فتبقى على وضعها، في الوقت الذي يجب فيه استبدال كل f_i^0 بـ f_i وكل و g_i^0 بـ g_i في المسألة الهوكية الصرفة.

الحالة الثانية: $Y_i \neq 0,\ Q = 0$ و$(f_i^0 = 0\ ,\ g_i^0 = 0,\ l = 0\ )$: في هذه الحالة العملية الترموديناميكية، الهوكية الصرفة، هي العملية الصفرية؛

$$(\mathbf{u}^0,\ \boldsymbol{\varphi}^0,\ \theta^0,\ \boldsymbol{\sigma}^0\ ,\ \boldsymbol{\mu}^0,\ \boldsymbol{\varepsilon}^0,\ \boldsymbol{\kappa}^0) \equiv (\mathbf{0}) \qquad (3.35)$$

ويؤول السلوك الترموديناميكي بالكامل إلى السلوك الدقيق الصرف: $(\mathbf{u}',\ \boldsymbol{\varphi}',\ \theta',\ \boldsymbol{\sigma}',\ \boldsymbol{\mu}',\ \boldsymbol{\gamma}',\ \boldsymbol{\kappa}')$، المحقق للمسألة الدقيقة، الصرفة، الموافقة، والتي تَظهر البنية الدقيقة للجسم المعتبر، أما المعادلات، الدقيقة، الصرفة، المستقلة، فتبقى على وضعها، في الوقت الذي يجب فيه استبدال كل f_i' بـ f_i وكل و g_i' بـ g_i في المسألة الدقيقة الصرفة. كما ستعتمد نتائج بحثنا أيضاً على تحويل Fourier التكاملي،الرباعي،المباشر $\boldsymbol{F}_4$، والعكسي $\boldsymbol{F}_4^{-1}$[9] ،ولهذا السبب سنعرض فيمايلي حاجتنا من ذلك.

تحويلا Fourier التكامليان، المضاعفان، من المرتبة الرابعة، المباشر والعكسي: إذا كانت $f\ (\mathbf{x}\ ,\ t\ )$ (حيث: $\mathbf{x} = (x_1,\ x_2\ ,x_3)$) دالة حقيقية معرفة ومستمرة في R^4 [4]، ولنفرض، أيضاً أنها قابلة للمكاملة، بالإطلاق على R^4. عندها فإن تحويل Fourier

[4] اعتبرنا أن الدالة الحقيقية $f\ (\mathbf{x}\ ,\ t\ )$ معرفة من أجل الجزء السالب للزمن، على نحوٍ تصبح فيه الدالة معرفة ومستمرة في R^4.

التكاملي، المضاعف من المرتبة الرابعة للتابع $f(\mathbf{x},t)$، والذي نرمز له بالرمز $\boldsymbol{F}_4[f(\mathbf{x},t)]$ (أو بالرمز $\bar{f}(\xi,\tau)$)، يكون موجوداً [5]، وبحسب التعريف، يعطى بـ:

$$\boldsymbol{F}_4[f(\mathbf{x},t)] = \bar{f}(\boldsymbol{\xi},\tau) := \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\mathbf{x},t)\, e^{i(\mathbf{x}\cdot\boldsymbol{\xi}+\tau t)}\, d\mathbf{x}\, dt \tag{3.36}$$

حيث هنا: $\mathbf{x}=(x_1,x_2,x_3)$ و $\boldsymbol{\xi}=(\xi_1,\xi_2,\xi_3)$ و $\mathbf{x}\cdot\boldsymbol{\xi} = x_k\xi_k$

و $d\mathbf{x}=dx_1dx_2dx_3$ و $i=\sqrt{-1}$،

كما تكون عندئذ الدالة $\bar{f}(\boldsymbol{\xi},\tau)$، أيضاً معرفة ومستمرة في R^4، وقابلة للمكاملة، بالإطلاق، على R^4، وبالتالي فإن تحويلFourier، التكاملي العكسي، من المرتبة الرابعة، لـ $\bar{f}(\boldsymbol{\xi},\tau)$ ، والذي نرمز له بالرمز $\boldsymbol{F}_4^{-1}[\bar{f}(\boldsymbol{\xi},\tau)]$ (أو بالرمز $f(\mathbf{x},t)$[6])، يكون موجوداً، وهو بحسب تعريفه يعطى بـ:

$$\boldsymbol{F}_4^{-1}[\bar{f}(\boldsymbol{\xi},\tau)] = f(\mathbf{x},t) := \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \bar{f}(\boldsymbol{\xi},\tau)\, e^{-i(\mathbf{x}\cdot\xi+\tau t)}\, d\boldsymbol{\xi}\, d\tau \tag{3.37}$$

حيث: $d\boldsymbol{\xi}=d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3$.

4. النتائج والمناقشة:

في البحث سنركز اهتمامنا على الحالة الأولى حيث سنفترض أن كافة المقاطع التنسورية، الفيزيائية، الهوكية، الصرفة في (E-N:6) المترابط مع حقل درجات حرارة ويشغل R^3، بالمعنى الرياضي، معرَّفة ومعدومة من أجل القيم السالبة لـ t. كما سنفترض أن هذه المقاطع التنسورية المذكورة، والداخلة في المعادلات، الهوكية، الصرفة، المستقلة (3.30) و (3.31) تحقق تلك الشروط التي تسمح بتطبيق تحويل Fourier التكاملي، الرباعي، المباشر $\boldsymbol{F}_4$، وتلك الشروط التي تسمح لنا أيضاً بتطبيق خواص هذا التحويل.

---

[5] الشروط المذكورة أعلاه، التي تحققها الدالة $f(\mathbf{x},t)$، هي شروط كافية من أجل وجود كل من $\boldsymbol{F}_4[f(\mathbf{x},t)]$ و $\boldsymbol{F}_4^{-1}[\bar{f}(\boldsymbol{\xi},\tau)]$ [9].

[6] ينتج ذلك عن أن: $\boldsymbol{F}_4^{-1}$ هو التحويل العكسي لـ $\boldsymbol{F}_4$.

فإذا كانت هذا المقاطع التنسورية، المذكورة عبارة عن توزيعات [8]، فيبقى الكلام السابق صحيحاً؛ أي يمكن تطبيق تحويل Fourier التكاملي، الرباعي، المباشر $\boldsymbol{F}_4$ على المعادلات، الهوكية، الصرفة، المستقلة (3.30) و (3.31)، وتطبيق خواص هذا التحويل، حيث نحصل على النتائج التالية:

$$\bar{\sigma}^{0}_{i\,j} = -\frac{2\,\mu\,m}{\kappa\,W_4(\xi\,,\tau\,)}\,(-i\,\xi_i\,)(-i\,\xi_j\,)\,\bar{Q} - \frac{m\,\delta_{i\,j}}{\kappa\,W_4(\xi\,,\tau\,)}\,\{\,(\lambda+2\,\mu)[\,\xi^{\,2}-\,\sigma_1^2\,(\tau)\,\,]-\lambda\,\xi^{\,2}\}\,\bar{Q}\,, \tag{4. 1}$$

$$\bar{\theta}^{\,0} = \frac{1}{\kappa W_4(\,\xi\,,\tau\,)}\,[\xi^{\,2}-\sigma_1^2\,(\tau)\,]\bar{Q}\,, \tag{4. 2}$$

حيث:

$$c_1 = \sqrt{\frac{\lambda\,+2\,\mu}{\rho}} \quad \text{و} \quad \sigma_1(\tau)\,=\,\frac{\tau}{c_1} \quad \text{و} \quad \xi\,=\,(\,\xi_i\,\xi_i\,)^{\frac{1}{2}}$$

$$\text{و} \qquad q(\tau)\,=\,\frac{i\,\tau}{\kappa} \quad \text{و} \quad m\,=\,\frac{\nu_T}{\lambda\,+2\,\mu} \quad \text{و} \quad \boldsymbol{\varepsilon} = m\,\kappa\,\eta_0 \ \text{،}$$

$$W_4(\,\xi\,,\tau\,) = \xi^{\,4}-[\,\sigma_1^2\,(\tau)\,+\,(1+\boldsymbol{\varepsilon})\,q\,(\tau)\,]\,\xi^{\,2}+q\,(\tau)\,\sigma_1^2\,(\tau)$$

باستخدام تهجين طريقة التراكيب لمعادلات الحركة بالإجهادات والحرارة من نوع Ignaczak مع طريقة التكامل القائمة على تحويل Fourier التكاملي المضاعف من المرتبة الرابعة $\boldsymbol{F}_4$ ، سنوجد الحلول الشاذة، الهوكية، الصرفة للجسم الصلب دقيق الاستقطاب (E−N:6)، الخاضع لحرارة، ويحتل R^3 ، والذي إجهاداته الخارجية، وحقل درجاته، الخارجي، جميعها معدومة في اللانهاية، وذلك من أجل حالة المصادر الحرارية:

$$Q = Q_0\,e^{-i\,\omega t}\;\delta\,(\mathbf{x}-\boldsymbol{\zeta}) \tag{4.3}$$

حيث: $\omega > 0$ ثابت معطى ويرمز للتردد، و $\delta\,(\mathbf{x}-\boldsymbol{\zeta})$ هو توزيع Dirac على R^3 ، [8]، والذي يعطى بحسب تعريفه بالعلاقة: $\delta\,(\mathbf{x}-\boldsymbol{\zeta}) := \delta\,(x_1-\zeta_1)\delta\,(x_2-\zeta_2)\delta\,(x_3-\zeta_3)$ ، حيث $\delta(x_i\,-\zeta_i\,)$ هو توزيع Dirac على R و $\mathbf{x} = (\,x_1,\,x_2\,,x_3)$ و $\boldsymbol{\zeta} = (\,\zeta_1,\,\zeta_2\,,\zeta_3)$ كما أن: Q_0 هو ثابت موجب. ولنوجد الآن العملية الترموديناميكية الشاذة، الهوكية، الصرفة، الموافقة للمصادر الحرارية (4.3).

العملية الترموديناميكية الهوكية، الصرفة، الشاذة، الموافقة للمصادر الحرارية (4.3):

بتعويض(4.3) في (4.2)-(4.1)، وبالأخذ بعين الاعتبار أن [8,9]:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\,i\,\mathbf{x}\cdot\xi}\,\delta(\mathbf{x}-\zeta)\,d\,\mathbf{x} = e^{\,i\,\zeta\cdot\xi} \tag{4.4}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\,i\,(\tau-\omega)\,t}\,d\,t = 2\pi\,\delta(\tau-\omega) \tag{4.5}$$

نحصل على:

تحويل Fourier لإجهادات القوة، الهوكية، الصرفة:

$$\bar{\sigma}^{0}_{i\,j} = -\frac{Q_0}{2\,\pi}\left(\frac{2\,\mu\,m}{\kappa\,W_4(\xi\,,\tau\,)}\,(-i\,\xi_i)(-i\,\xi_j) + \right.$$
$$\left. +\frac{m\,\delta_{i\,j}}{\kappa\,W_4(\xi\,,\tau\,)}\,\{\,(\lambda+2\,\mu)[\,\xi^{\,2}-\sigma_1^2\,(\tau)\;]-\lambda\,\xi^{\,2}\}\right)\delta(\tau-\omega)\,e^{\,i\,\zeta\cdot\xi} \tag{4.6}$$

تحويل Fourier للحرارة الهوكية، الصرفة:

$$\bar{\theta}^{\,0} = \frac{Q_0}{2\,\pi}\,\frac{1}{\kappa W_4(\,\xi\,,\tau\,)}\,[\xi^{\,2}-\sigma_1^2\,(\tau)]\;\delta(\tau-\omega)e^{\,i\,\zeta\cdot\xi} \tag{4.7}$$

وبما أن:

$$\frac{\xi^{\,2}-\sigma_1^2\,(\tau)}{W_4(\xi,\tau)} = \frac{E_1(\tau)}{\xi^{\,2}-\mu_2^2\,(\tau)}-\frac{E_2(\tau)}{\xi^{\,2}-\mu_1^2\,(\tau)}\;, \tag{4.8}$$

$$\frac{\xi^{\,2}}{W_4(\xi,\tau)} = \frac{1}{\mu_1^2\,(\tau)-\mu_2^2\,(\tau)}\left[\frac{\mu_1^2\,(\tau)}{\xi^{\,2}-\mu_1^2\,(\tau)}-\frac{\mu_2^2\,(\tau)}{\xi^{\,2}-\mu_2^2\,(\tau)}\right] \tag{4.9}$$

حيث: $\mu_1^2\,(\tau)$ و $\mu_2^2\,(\tau)$ هي جذور كثير الحدود:

$$W_4(\,\mu\,,\tau\,) = \mu^{\,4}-[\,\sigma_1^2\,(\tau)+(1+\boldsymbol{\varepsilon})\,q\,(\tau)\,]\,\mu^{\,2}+q\,(\tau)\,\sigma_1^2\,(\tau)$$

كما أن:

$$E_1(\tau) = \frac{\sigma_1^2\,(\tau)-\mu_2^2\,(\tau)}{\mu_1^2\,(\tau)-\mu_2^2\,(\tau)}\;,\quad E_2(\tau) = -\frac{\sigma_1^2\,(\tau)-\mu_1^2\,(\tau)}{\mu_2^2\,(\tau)-\mu_1^2\,(\tau)}$$

فبتعويض العلاقات (4.9)-(4.8) في التحولات (4.7)- (4.6)، ومن ثم بتطبيق تحويل Fourier التكاملي، الرباعي العكسي $\boldsymbol{F}_4^{-1}$، على العلاقات الناتجة، وباستخدام خاصة تصفية توزيع Dirac، المتمثلة بالعلاقة:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\delta(t-t_0)\,dt = f(t_0) \tag{4.10}$$

والعلاقات [9]:

$$\boldsymbol{F}_4^{-1}[(-i\xi_j)\,\bar{f}(\boldsymbol{\xi},\tau)] = \partial_j f(\boldsymbol{x},t) \tag{4.11}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-i(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\zeta})\cdot\xi}}{\xi^2-a^2}\,d\boldsymbol{\xi} = 2\pi^2\frac{e^{iaR}}{R} \tag{4.12}$$

حيث: $\partial_j := \dfrac{\partial}{\partial x_j}$ ، و $R := |\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\zeta}|$ ، وحيث a عدد حقيقي أو عقدي، نحصل بالنتيجة على:

- الإجهادات الهوكية، االصرفة، الشاذة، الموافقة، التالية:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}^0 = -\frac{Q_0\,e^{-i\omega t}}{4\pi}\,\frac{m}{\kappa}\Bigg\{ & \frac{2\mu}{\mu_1^2-\mu_2^2}\,\partial_{ij}^2 F_2 + \\ & + \delta_{ij}\left[(\lambda+2\mu)\Gamma_2 - \frac{\lambda}{\mu_1^2-\mu_2^2}\,\frac{\mu_1^2 e^{i\mu_1 R}-\mu_2^2 e^{i\mu_2 R}}{R}\right]\Bigg\} \end{aligned} \tag{4.13}$$

حيث:

$$F_2 = \frac{e^{i\mu_1 R}-e^{i\mu_2 R}}{R} \quad , \quad \Gamma_2 = E_1\frac{e^{i\mu_2 R}}{R} - E_2\frac{e^{i\mu_1 R}}{R} ,$$

كمـا أن: $\sigma_1 = \sigma_1(\omega)$ و $q = q(\omega)$ و $\mu_1 = \mu_1(\omega)$ و $\mu_2 = \mu_2(\omega)$ و $E_1 = E_1(\omega)$ و $E_2 = E_2(\omega)$.

وبما أن:

$$\frac{1}{\mu_1^2-\mu_2^2}\,\frac{\mu_1^2 e^{i\mu_1 R}-\mu_2^2 e^{i\mu_2 R}}{R} = \frac{\sigma_1^2}{\mu_1^2-\mu_2^2}\,F_2 + \Gamma_2 \tag{4.14}$$

فتأخذ العلاقة (4.13) الشكل:

$$\sigma_{ij}^0 = -\frac{Q_0\,e^{-i\omega t}}{4\pi}\,\frac{m}{\kappa}\left[\frac{2\mu}{\mu_1^2-\mu_2^2}\,\partial_{ij}^2 F_2 + \delta_{ij}\left(2\mu\,\Gamma_2 - \frac{\lambda\,\sigma_1^2}{\mu_1^2-\mu_2^2}\,F_2\right)\right] \tag{4.15}$$

- الحرارة الهوكية، الصرفة، الشاذة، الموافقة، التالية:

$$\theta^0 = \frac{Q_0\, e^{-i\,\omega t}}{4\,\pi}\ \frac{1}{\kappa}\ \Gamma_2 \tag{4.16}$$

أما الانفعالات الهوكية، الصرفة، الشاذة، فتحسب بحسب طريقة التراكيب في وصف Ignaczak، بتعويض (4.15) و(4.16) في العلاقة (3.17)، باتباع مايلي. ينتج عن العلاقة:

$$\nabla^2\Big(\frac{e^{\,i\,aR}}{R}\Big) = \nabla^2\Big(\frac{1}{R}\Big) - a^2\,\frac{e^{\,i\,aR}}{R} \tag{4.17}$$

والعلاقة (4.14) أن:

$$e^0 = \frac{1}{2\mu + 3\lambda}\left(\sigma^0_{k\,k} + 3\nu_T\ \theta^0\right) = \frac{Q_0\, e^{-i\,\omega t}}{4\,\pi}\ \frac{m}{\kappa}\left(\frac{\sigma_1^2}{\mu_1^2 - \mu_2^2}\ F_2 + \Gamma_2\right) \tag{4.18}$$

بتعويض (4.15) و(4.16) و(4.18) في (3.17)، نحصل بعد الاختصار، على الانفعالات الهوكية، الصرفة، الشاذة التالية:

$$\begin{aligned} \varepsilon^0_{i\,j} &= \frac{1}{2\,\mu}\,[\,\sigma^0_{i\,j} - (\lambda\, e^0\ - \nu_T\ \theta^0)\ \delta_{i\,j}\,] = \\ &= -\frac{Q_0\, e^{-i\,\omega t}}{4\,\pi}\ \frac{m}{\kappa}\ \frac{1}{\mu_1^2 - \mu_2^2}\ \partial^2_{i\,j}\ F_2 \end{aligned} \tag{4.19}$$

- الإزاحات ، الهوكية، الصرفة الشاذة، الموافقة، تنتج بحسب طريقة التراكيب في وصف Ignaczak، عن تحليل الشروط الابتدائية(3.16)-(3.14)، بمساعدة الحلول، الهوكية، الصرفة، الشاذة (4.15) و(4.16)، وعن العلاقات (3.18) ، باتباع مايلي. بتحليل الشروط الابتدائية (3.16)-(3.14) ، بمساعدة الحلول، الهوكية، الصرفة، الشاذة (4.15) و(4.16)، ومشتقاتها الزمنية(كل ذلك من أجل لحظة البدء $t = 0$)، والعلاقتين(4.14) و(4.17)، وأيضاً باستخدام العلاقين:

$$\frac{1}{4\pi}\,\nabla^2\Big(\frac{1}{R}\Big) = -\ \delta\,(\mathbf{x} - \boldsymbol{\zeta}) \tag{4.20}$$

$$\frac{E_1\,\mu_2^2\, e^{\,i\,\mu_2 R} - E_2\,\mu_1^2 e^{\,i\,\mu_1 R}}{R} = \frac{q\ \boldsymbol{\varepsilon}\,\sigma_1^2}{\mu_1^2 - \mu_2^2}\ F_2 + q\,(1+\boldsymbol{\varepsilon})\ \Gamma_2 \tag{4.21}$$

نصل إلى النتيجة التالية:

$$g_j^0 = -i\,\omega f_j^0 \tag{4.22}$$

حيث:

$$f_j^0 = -\frac{Q_0}{4\pi}\,\frac{m}{\kappa}\,\frac{1}{\mu_1^2-\mu_2^2}\,\partial_j F_2 \tag{4.23}$$

الآن، ينتج عن العلاقات: (4.15) و(4.17) و(4.14)، أن:

$$\hat{R}_i^0 = \sigma_{ji,j}^0 = \frac{Q_0\,e^{-i\,\omega t}}{4\pi}\,\frac{m}{\kappa}\,\frac{\rho\,\omega^2}{\mu_1^2-\mu_2^2}\,\partial_i F_2 \tag{4.24}$$

الآن، بتعويض (4.24)-(4.22) في العلاقة (3.18)، وبالأخذ بعين الاعتبار أن:

$$t * e^{-i\,\omega t} = \omega^{-2}(1 - i\,\omega t - e^{-i\,\omega t}) \tag{4.25}$$

نحصل على الإزاحات الهوكية، الصرفة، الشاذة:

$$u_i^0 = g_i^0\,t + f_i^0 + \rho^{-1}(t * \hat{R}_i^0) = -\frac{Q_0\,e^{-i\,\omega t}}{4\pi}\,\frac{m}{\kappa}\,\frac{1}{\mu_1^2-\mu_2^2}\,\partial_i F_2 \tag{4.26}$$

5. الاستنتاجات والمقترحات:

أولا) الاستنتاجات: لأجل الجسم الترموديناميكي الصلب دقيق الاستقطاب (E-N:6)، غير المحدود، والذي كلاً من إجهاداته وحرارته، الخارجية، معدومة، تم إيجاد السلوك الترموديناميكي الهوكي الصرف، الشاذ للجسم، والموافق، فقط للمصادر الحرارية، المركزة في نقطة ما ξ من R^3، والمتغيرة توافقياً مع الزمن، في الوقت الذي يطابق فيه السلوك الدقيق الصرف السلوك الصفري.

ثانياً) المقترحات: لأجل الجسم الترموديناميكي الصلب دقيق الاستقطاب (E-N:6)، غير المحدود، والذي كلاً من إجهاداته وحرارته، الخارجية، معدومة، يمكن أن نختم هذا البحث باقتراح مسألتين التاليتين للمناقشة:

المسألة الأولى: إيجاد السلوك الترموديناميكي الدقيق الصرف، الشاذ للجسم، والموافق، فقط للعزوم الحجمية، المركزة في نقطة ما ξ من R^3، والمتغيرة توافقياً مع الزمن، في الوقت الذي يطابق فيه السلوك الهوكي الصرف السلوك الصفري.

المسألة الثالثة: استنتاج صيغ Green التي تعطي:

1) العمليتان الترموديناميكيتان، النظاميتان، الهوكية والدقيقة، المتممة، لأجل فقط حالة تأثير قوة حجمية نظامية ،

2) العملية الترموديناميكية، النظامية، الهوكية الصرفة، لأجل فقط حالة تأثير مصادر حرارية نظامية ،

3) العملية الترموديناميكية، النظامية، الدقيقة الصرفة، لأجل فقط حالة تأثير عزم حجمي نظامي .

المراجع

[1] – Nabil Ali and Mountajab Al-Hasan, **2019** – The behavior of unbounded solid with microstructure using the pure Hooke and micropolar differential equations in the cases of body moments and heat sources, Journal of Al-Baath University,Vol.41, Nr.19, p. 73-94.

[2] – Al-Hasan, M. & Ali, N., **2019** – Singular behavior superposition for unbounded elastic body with microstructure governed by differential equations of stresses and temperature unknowns, Journal of Al-Baath University,Vol.41, Nr.10, p. 119-138.

[3] – Al-Hasan, M., **2016** – Studying the behavior of unbounded micropolar elastic body without external stresses, Journal of Al-Baath University, Vol.38, Nr.1, p.35-64.

[4] –Mohammad, K & Al-Hasan, M, **2013** – Studying the isotherm of the complementary Ignaczak solutions for the (E–N:6) micropolar body occupying $\Re^3$, Journal of Al-Baath University,Vol.35, Nr.1, p.205-236.

[5] – Al-Hasan, M., **2008** – The equivalence of solving the stress-temperature description problem and the traditional description problem of elastic body with microstructure, using the superposition method, Journal of Al-Baath University,Vol.30, Nr.12, p.255-278.

[6] – Al -Hasan, M., **2007** – Superposition method for stress-temperature equations of motion, Journal of Al-Baath University, Vol.29, Nr.5, p.53-78.

[7]– Al-Hasan,M., Dyszlewicz,J, **2001** - Stress-temperature equations of motion of Ignaczak type for a three – dimensional problem of micropolar thermoelasticity, Journal of Thermal Stresesses ,24, p. 709 -722.

[8] – Gerrit van Dijk, **2013** - Distribution Theory, De Gtuyter Graduate Lectures, Deutsche Nationalbibliothek, Berlin.

[9] – Debnath, L& Bhatta, D, **2007** – Integral Transforms and their Applications, (Second Edition), CRC Press, Boca Raton, Florida.

[10] –Nowacki, W, **1986** - Theory of Asymmetric Elasticity, Warsaw, PWN.

[11] – Eringen, A . C, **1966** - Linear theory of micropolar elasticity, J.Math. Mech., 15, 909 – 930.