دراسة لعبة Maker-Breaker التوافقية الموضعية على بعض البيانات المترابطة

طالب الماجستير: مالك محمد الخضير

قسم الرياضيات – كلية العلوم – جامعة تشرين

المشرف الرئيسي: د. هديل سمير بربارة[1]

المشرف المشارك: د. رياض خضر الحميدو[2]

الملخص

نسلط الضوء في هذه الورقة البحثية على لعبة Maker-Breaker(الباني_الهادم)، وذلك عندما يُفرض شرط معين على أحد اللاعبَين بالتحرك ضمن مسلك أو مسار، وتكون بيئة العمل ضمن بيان مترابط معطى، ويحاول كل من اللاعبين حيازة أكبر قدر ممكن من الرؤوس من البيان المترابط الذي تمت عليه عملية اللعب.

وقد تم وضع التعاريف والمفاهيم الأساسية اللازمة لهذه الدراسة.

تم اثبات ثلاث مبرهنات حول كيفية اللعب ضمن شروط معينة على أنواع من البيانات المترابطة التي تحتوي مساراً بين كل رأسين من البيان.

الكلمات المفتاحية: ألعاب الباني_الهادم، ألعاب توافقية، ألعاب موضعية، بيان تام، بيان تكعيبي.

[1] مدرس في قسم الرياضيات، كلية العلوم، جامعة تشرين، اللاذقية.

[2] مدرس في قسم الرياضيات، كلية العلوم، جامعة الفرات، ديرالزور.

Study of the positional combinatorial Maker-Breaker game on some connected graphs

Master's Student: Malik Muhammad Al-Khodair

Main Supervisor: Dr. Hadeel Samir Barbara

Co-Supervisor: Dr. Riad Khader Al-Hamido

Abstract

In this research paper, we highlight the Maker - Breaker game, when a certain condition is imposed on one of the players to move within a walk or path, and the work environment is within a graph, and each of the players tries to get as many vertices as possible from graph made on it playing process.

Definitions and basic concepts required for this study have been developed.

Three theorems are proven about how to play under certain conditions on types of connected graphs.

Key words: Maker-Breaker games, combinatorial games, Positional games, Complete graph, Cube graph.

المقدمة:

قُدمت ألعاب Maker-Breaker من قبل Erdös و Selfridge [1] على أنها تعميم للعبة Tic-tac-toe. ومن ثمَّ توالت العديد من النتائج على أنواع من هذا النمط. وفي نسخة قياسية لهذه اللعبة، لتكن X مجموعة منتهية و $\mathcal{F}$ عائلة من المجموعات الجزئية من X، ولتكن a و b أعداد صحيحة موجبة معطاة، في لعبة Maker-Breaker(الباني_الهادم) (a: b) التوافقيّة الموضعيّة والتي يرمز لها بالرمز $(X, \mathcal{F})$، يوجد لاعبَين، أحدهما يدعى Maker (الباني أو الصانع) والآخر يدعى Breaker (الهادم أو المخرب) يأخذ الباني دوره في استدعاء a عنصر من المجموعة X ويأخذ الهادم دوره في استدعاء b عنصر من المجموعة ذاتها. ومن الطبيعي جداً أن تُلعب ألعاب (الباني_الهادم) على أضلاع لبيان معطى G، أي عندما تكون المجموعة X ممثلة بأضلاع البيان المعطى، أي أنَّ $X = E(G)$، ومجموعات الربح هي بُنى معينة في نظرية البيان، كأن تكون أشجار مولدة أو حلقات هاملتونية أو غير ذلك من البنى حسب مقتضيات الدراسة. وبالتالي إذا أخذنا نسخة قياسية تُلعب على بيان تام K_n، فإن كلاً من الباني والهادم يأخذان دورهما في استدعاء أضلاع من الرسم البياني المعطى، حيث يحاول الباني (قد يكون فريق أو مؤسسة أو جيش ...) بناء بنية خاصة من الأضلاع التي استطاع الحصول عليها، بينما ينصب هدف الهادم (أيضاً، قد يكون فريق أو مؤسسة أو جيش ...) على منع الأول من الوصول إلى هدفه.

نعتبر النوع التالي من لعبة Maker-Breaker القياسية، في هذا النوع يقوم Maker، عند حلول دوره في التحرك سواء كان هو من يبدأ اللعبة أم لا، باستدعاء الأضلاع وفقاً لمسلك (Walk) على التوالي، أي أنه عند أي لحظة من اللعبة إذا كان Maker عند رأس v من البيان G وحان دوره في التحرك، فإنه يتحرك على امتداد ضلع $e \in G$

بحيث أنه يحقق شرطين أولهما أن يكون هذا الضلع واقعاً على الرأس v ، وثانيهما أن هذا الضلع لم يتم الاستيلاء عليه من قبل Breaker.

وفي بعض الأحيان يسمح للاعب Breaker القيام بالاستيلاء على أكثر من ضلع في الحركة الواحدة، نرمز لهذه الحالة المتحيزة بالرمز $(1:\alpha)$.

نعتبر في هذا البحث بأن لعبة Maker-Breaker ضمن الشرط الموضح أعلاه، أن هدف Maker هو الحصول على العديد من الرؤوس ما استطاع إلى ذلك سبيلا، بينما يهدف Breaker إلى تقليل عدد الرؤوس الممكن زيارتها من قبل Maker وذلك من خلال الاستيلاء عليها، وتنتهي اللعبة عندما لا يوجد مسلك (ممر) من موضع Maker الحالي إلى أي رأس غير مزار على طول الأضلاع غير المُستدعاة من قبل Breaker.

ومن المسلم به عند دراسة تحرك Maker ضمن مسلك فلا بد من دراسة حركته ضمن مسار، وبالتالي سنعتبر ذلك تنوع آخر من هذه اللعبة، حيث أنَّ Maker لا يستطيع إعادة زيارة رؤوس قد زارها مسبقاً على حين كان يستطيع فعل ذلك عندما كان يتحرك وفق مسلك، وهنا تنتهي اللعبة عندما لا يوجد مسار من موضع Maker الحالي إلى أي رأس غير مزار على طول الأضلاع التي لم يستولي عليها Breaker والرؤوس غير المُزارة مسبقاً من قبل Maker.

ولتجنب الالتباس بين النوعين سنرمز للنوع الأول (الحركة ضمن مسلك) بـِ WMaker-Breaker، وللنوع الثاني (الحركة ضمن مسار) بـِ PMaker-Breaker.

علماً أنَّه قد تمت معالجة ألعاب Maker-Breaker في كتاب Beck[2] وكذلك الدراسة الأخيرة لـِ Hefetz و Krivelevich وآخرون [6].

هدف البحث:

ينصب تركيز البحث عموماً في دراسة لعبة Maker-Breaker وذلك عندما تتقيد حركة Maker ضمن مسلك أو مسار على بيان مترابط، بينما حركة Breaker غير مقيدة بشرط، والبيانات المترابطة التي تم العمل عليها هي البيانات التامة K_n ($n \geq 6$)، والنوع الآخر هي البيانات التكعيبية (n-cube)، ونريد معرفة كم عدد الرؤوس التي يستطيع Maker الحصول عليها.

طرق ومواد البحث:

التعاريف والمفاهيم الأساسية [6],[5],[2]:

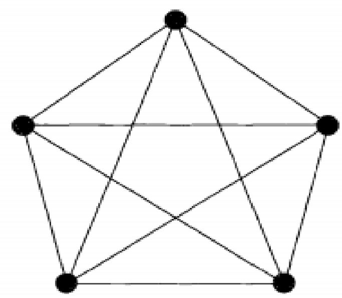
[1] اللعبة التوافقية (Combinatorial Game): تتعامل اللعبة التوافقية مع نوع محدد من الألعاب الثنائية، ويمكن وصفها على النحو التالي:

- هناك لاعبان يتبادلان التحرك.
- لا توجد أدوات حظ مثل حجر النرد أو البطاقات العشوائية.
- هناك معلومات كاملة، أي كلا اللاعبين يعرفان جميع الحركات المتاحة لكلا اللاعبين.
- تنتهي اللعبة في النهاية، حتى ولم يتبادل اللاعبان التحركات.
- تنتهي اللعبة عندما يجد أحد اللاعبين نفسه غير قادر على القيام بأي حركة قانونية.

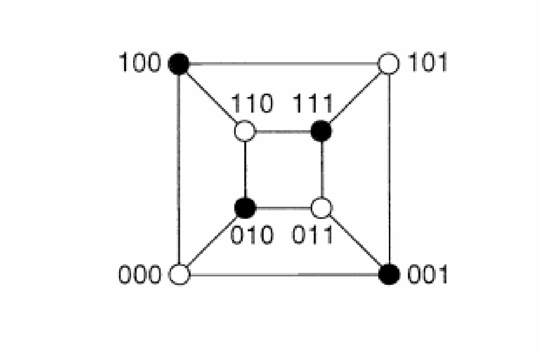
[2] اللعبة الموضعية (Positional Game) : لاعبَين يتبادلان بشغل نقاط جديدة. اللاعب الذي يستطيع أولاً شغل مجموعة ربح (winnig set) هو الفائز، أما إذا لم توجد مجموعة ربح فيعلن عن اللعبة أنها تعادل.

[3] لعبة Maker-Breaker: يتبادل اللاعبان Maker و Breaker بشغل نقاط جديدة. يربح Maker في نهاية اللعبة إذا ما استطاع شَغِل كافة العناصر لأغلب مجموعات الربح، ويربح Breaker إذا ما استطاع شغل عنصر واحد على الأقل من كل مجموعة ربح.(هنا لا يوجد تعادل بين اللاعبين، إما رابح أو خاسر، وبالتالي لعبة Maker–Breaker هي حالة خاصة من الألعاب الموضعية.)

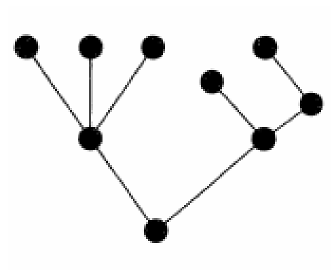
[4] البيان التام ($\mathbf{K_n}$): نقول عن البيان $G(V,E)$ ، حيث V مجموعة الرؤوس و E مجموعة الأضلاع، أنه بيان تام (Complete graph) إذا كان كل رأس في البيان يجاور جميع رؤوس البيان الأخرى، وبالتالي لكل رأس الدرجة n-1.



[5] البيان التكعيبي ($\mathbf{Q_n}$): هو بيان منتظم من المرتبة 2^n والدرجة n ، كما أن رؤوس البيان مرتبة وفق متجه $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ حيث $(a_i = 0 \text{ or } 1)$ لأجل $(i = 1,2, \dots, n)$ ويكون الرأسان متجاورين إذا اختلفا بمركبة واحدة فقط من مركبات متجهي الرأسين. ولهذه البيانات أهمية خاصة وهي تنتج من تعريف الجداء الديكارتي للبيانات ويرمز له بِ Q_n. Q_n (n-cube) يكون K_2 عندما $n = 1$، أي أن $Q_1 = K_2$. إذا كان $n > 1$ نعرف Q_n بشكل متتابع، أي أنَّ $Q_n = Q_{n-1} \times K_2$. حيث أن البيان التكعيبي هو البيان كما في الشكل التالي:



[6] الشجرة (Tree): هي بيان مترابط خالٍ من الحلقات، والبيان غير المترابط الذي لا يحوي حلقات يسمى غابة (forest) وبناءً على تعريف الغابة فإن الشجرة غابة مؤلفة من مركبة وحيدة.



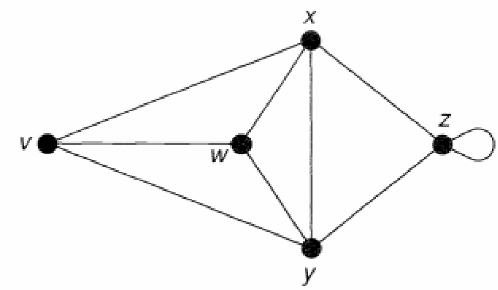
[7] المسلك (Walk): ليكن البيان $G(V,E)$، وليكن u و v رأسين من البيان G (ليس بالضرورة متمايزان). نسمي W=u-v مسلك (walk) من الرأس u إلى الرأس v ، إذا كان W متتالية متناوبة من الرؤوس والأضلاع بالشكل التالي:

$$u = v_0, e_0, v_1, e_1, v_2, \dots, v_{k-1}, e_{k-1}, v_k = v$$

من الممكن تكرار الرؤوس والأضلاع في المسلك.

[8] المسار (Path): هو مسلك شريطة عدم تكرار الرؤوس أو الأضلاع.

مثال: ليكن لدينا البيان التالي:



لدينا المتتالية $v \longrightarrow w \longrightarrow x \longrightarrow y \longrightarrow z \longrightarrow z \longrightarrow y \longrightarrow w$ عبارة عن مسلك (ممر) أما المتتالية $v \longrightarrow w \longrightarrow x \longrightarrow y \longrightarrow z$ فهي عبارة عن مسار.

النتائج والمناقشات:

المبرهنة (1): ليكن البيان $G(V,E)$ عبارة عن بيان تام، حيث أن عدد الرؤوس n يحقق $n \geq 6$ ، وضمن عملية لعب مثالية في لعبة PMaker-Breaker (1:1)، فإنَّ اللاعب Maker يزور كل الرؤوس باستثناء اثنين منها.

المبرهنة (2): ليكن البيان $G(V,E)$ عبارة عن بيان تام، وضمن عملية لعب مثالية في لعبة WMaker-Breaker $(1:\alpha)$ على البيان G بحيث $(n \geq 2\alpha^2)$، فإن Maker يزور $n - 2\alpha + 1$ رأس، حيث $(\alpha \geq 1)$.

المبرهنة (3): ليكن البيان $G(V,E)$ عبارة عن بيان تكعيبي، فإنه ضمن عملية لعب مثالية في لعبة WMaker-Breaker، فإنّ Maker يزور على الأقل 2^{n-2} رأس وعلى الأكثر 2^{n-1} رأس.

بعض الرموز:

لتكن V_t تشير إلى مجموعة الرؤوس التي تمت زيارتها من Maker، ولتكن U_t تشير إلى خلاف ذلك، وذلك بعد قيام Maker بالحركة t. حيث أنَّ Maker يكون عند الرأس

v_{t} وذلك بعد قيامه بالحركة t. نشير إلى البيان المحدث بأضلاع Breaker بـِ Γ_{B} ، وإلى البيان المحدث بأضلاع Maker بـِ Γ_{M}.

إثبات المبرهنة (1): من الواضح أنه في اللحظة t سيكون البيان Γ_{M} عبارة عن مسار. علماً أن المسألة ليست مسألة من يبدأ أولاً بالتحرك، ولإظهار ذلك نفرض أن Maker يبدأ أولاً من أجل أي حد أدنى على عدد الرؤوس التي تمت زيارتها، ويبدأ Breaker من أجل أي حد أدنى على عدد الرؤوس التي تمت زيارتها.

الحد الأدنى: يتبع Maker الاستراتيجية التالية: إذا كان $|\mathrm{U_t}| > 2$ وقام Breaker باختيار f_{t} حيث $f_{\mathrm{t}} \cap V_{\mathrm{t-1}} = \emptyset$، فإنّ Maker يتحرك إلى $v_{\mathrm{t}} \in f_{\mathrm{t}}$. بخلاف ذلك، فإن Maker يتحرك إلى رأس كيفي. وطالما أن Maker قادر على اتباع هذه الاستراتيجية، سيكون لدينا بعد كل تحرك لـ Maker ما يلي:

كل ضلع لـ Breaker يحتوي على عنصر من $\mathrm{V_t}$. (1)

نتحقق الآن فيما إذا كانت هذه الاستراتيجية مجدية لـ $|\mathrm{U_t}| > 2$. نبدأ مع النوع الأول من أضلاع Breaker، والتي تكون منفصلة عن V_{t}. في الحركة t، ليكن $v_{\mathrm{t-1}} = x$ و $v_{\mathrm{t}} = y$. بفرض أن Breaker اختار الضلع $(\mathrm{b_1}, \mathrm{b_2})$ حيث $\mathrm{b_1}, \mathrm{b_2} \notin V_{\mathrm{t}}$، ومن أجل $i = 1,2$ فإن (y, b_i) هو ضلع لـ Breaker. ونعتبر هذه هي المرة الأولى التي يحدث فيها هذا الوضع. ثمَّ نفرض أنَّ (y, b_i) هو الضلع s_i المختار من Breaker (حيث $s_1 < s_2$). فإننا نحصل على تعارض مع العلاقة (1) بعد اختيار الرأس x. وإذا ما تم اختيار الرأس x ، فإنَّ (y, b_i) هو ضلع لـ Breaker والذي لا يحتوي على عناصر من $V_{\mathrm{t-1}}$.

نعتبر الآن الحالة التي يكون فيها ضلع لـ Breaker واقع على عنصر في V_t. العلاقة (1) تشير إلى أنَّ اختيار Breaker هو في الغالب الضلع الثاني بين الرأس v_t والمجموعة U_t. وعلى وجه الخصوص، $|U_t| > 2$ تشير إلى أن Maker بإمكانه التحرك إلى رأس لم تتم زيارته. وبالتالي سينجح Maker بزيارة كل الرؤوس باستثناء اثنين منها.

الحد الأعلى: يلعب Breaker بشكل كيفي لغاية حركته عند الدور $n - 4$، عندما $|U_{n-4}| > 4$. يختار في حركتيه التاليتين ضلعين من تجزئة مستقلة من U_{n-4}. وبعد هاتين الحركتين (مع حركة لـMaker بينهما)، يحين دور Maker، ويتبقى ثلاثة رؤوس غير مُزارة. وأيّاً يكن الرأس من U_{n-3} فإن Maker ربما يختار التحرك إلى الرأس التالي، وهذا الرأس سيكون متجاوراً مع رأس في U_{n-2} على طول أحد ضلعي التجزئة المستقلة لـ Breaker؛ وبالتالي مع وجود حركة إضافية، فإنَّ Breaker سيضمن أنَّ كلاً من الضلعين من الرأس v_{n-2} إلى المجموعة U_{n-2} تكون مشغولة من قِبَلِهِ. □

إثبات المبرهنة (2):

هنا اللاعب Maker غير مقيد بمسار، وإنما تتم حركته وفقاً لمسلك إذ بمقدوره تكرار الرؤوس والأضلاع.

الحد الأدنى: يقوم Maker ببناء شجرة T في جولته الأولى (وهذا طبيعي؛ لأن البيان مترابط)، وليكن الجذر هو الرأس v_1 عند المستوى 0. ومن المعلوم إن التعابير (مستوى/أب/ ابن) تتعلق بالجذر. ليكن $v \in T$ وليكن $w = \pi(v)$ (أي أن الرأس w هو أب للرأس v). إذا كان Maker عند رأس، وليكن x، وَوُجِدَ رأس $y \in U_t$ بحيث أنَّ Breaker لم يستدعي بعد الضلع (x, y) فإنَّ Maker سيتحرك إلى الضلع (x, y). وليكن $x = \pi(y)$. وبخلاف ذلك، إذا لم توجد حركة ممكنة مثل هذه فإنَّ

Maker سيتحرك إلى $\pi(x)$ ويُعيد البحث من جديد عن $y \in \mathrm{U_t}$ في حركته التالية. اللعبة تنتهي عندما يجد Maker نفسه عند v_1 وكل الأضلاع بين v_1 و $\mathrm{U_t}$ تم أخذها من قبل Breaker.

بفرض أنَّ اللعبة تنتهي عندما $|\mathrm{U_t}| = \mathrm{k}$. وبالتالي فإن اللاعب Maker يكون قد صنع $2(\mathrm{n-k-1})$ حركة. وذلك لأن كل ضلع من الشجرة T قد تم عبوره مرتين، الأولى من الجهة الأمامية، أما الثانية فمن الجهة الخلفية. كما انَّ Breaker يكون قد كَسِبَ على الأقل $\mathrm{k(n-k)}$ ضلع وذلك بين T و $\mathrm{U_t}$. وبالتالي لدينا:

$$\mathrm{k(n-k)} \leq 2\alpha(\mathrm{n-k-1})$$

وينتج من هذا أنَّ $\mathrm{k} < 2\alpha$. وهذا يبين أنَّ Maker يزور على الأقل $\mathrm{n} - 2\alpha + 1$ رأس.

الحد الأعلى: معطيات استراتيجية Breaker على النحو التالي: بفرض أنَّ Maker يستهل التحرك أولاً ويستدعي ضلع $\{v_1, v_2\}$، أما اللاعب Breaker فيختار رأس w_1 بحيث $w_1 \notin \{v_1, v_2\}$. سيستهلك Breaker، $\frac{\mathrm{n}-1}{\alpha}$ حركة مما يجعلنا نتأكد بأن Maker ليس بمقدوره زيارة w_1. وفي حركة ما، سيقوم Breaker باستدعاء الضلع من الرأس w_1 إلى الرأس v_t، وهذا عند الضرورة، بالإضافة إلى $\alpha - 1$ ضلع آخر تقع على w_1. وهذا يأخذ ما يقارب $\frac{n-1}{\alpha}$ حركة. بعد ذلك يقوم Breaker باختيار الرأس، غير المزار، ويعمل على حمايته لئلا تتم زيارته مرة ثانية بنفس الطريقة. وهو يفعل هذا لأجل $w_1, w_2, \dots, w_{\alpha-1}$. وبالإجمال، هذا يصنع على الأقل $(\mathrm{n}-(\alpha-1)$ $1)/\alpha$ حركة، ويترك على الأقل $1 + \frac{\mathrm{n}-1}{\alpha}$ رأس غير مزار. بعدها يقوم Breaker باختيار α رأس غير مزار $y_1, y_2, \dots, y_\alpha(\mathrm{n} > 2\alpha^2)$، وكل حركة له تتألف من

□

اكتساب ضلع من الأضلاع (v_t, y_i)، $i = 1,2, \dots, \alpha$. وهذا يحمي الرؤوس $y_\alpha, \dots, y_2, y_1$ وبالتالي فإن Maker يزور على الأكثر $n - 2\alpha + 1$ رأس.

إثبات المبرهنة (3):

الحد الأدنى: نستهل المناقشة هنا بأسلوب مشابه لما رأيناه في القسم الأول من المبرهنة السابقة. يبني Maker شجرة T على مدار جولته الأولى. وللمرة الثانية فإنَّ الأضلاع بين T و U_t ستكون لِ Breaker . والآن لنفرض أنَّ T لديه k رأس، وبالتالي:

$$2(k-1) \geq e(T, U_t) \geq k(n - \log_2 k)$$

الحد الأدنى ينتج من مبرهنة Harber[7]، وعليه فإن:

$$\log_2 k \geq n - 2 + \frac{2}{k}$$

وبالتالي 2^{n-2} رأس على الأقل تكون مأخوذة من قبل Maker.

الحد الأعلى: بفرض أن Maker يبدأ أولاً، وبفرض أنه يبدأ من الرأس $(0,0, \dots ,0)$ وبعجها يتحرك إلى الرأس $(0,1, \dots ,0)$. حيث ان Breaker لن يسمح لخصمه من أخذ أي رأس تكون مركبته الأولى هي 1. عندما يتحرك Maker إلى $(0, x_2, x_3, \dots, x_n)$، فإن Breaker يستولي على الضلع $(1, x_2, x_3, \dots, x_n)(0, x_2, x_3, \dots, x_n)$. ويستطيع Maker اكتساب الضلع $(1,0, \dots ,0)(0,0, \dots ,0)$ في حركته الأخيرة، أو ما قبل الأخيرة. وهذا يوضح بأن 2^{n-1} رأس على الأكثر تمت زيارتها من قبل Maker. $\square$

المراجع:

[1]. P. Erdös AND J. Selfridge, On a combinatorial game, J. Combinatorial Theory Ser. A, 14(1973), pp. 298-301.

[2]. J. Beck, Combinatorial Games: Tic- Tac- Toe Theory, Cambridge Press, Cambridge, UK, 2008.

[3]. D. Clemens, T. Tran, Creating in Walker-Breaker games, Discrete Mathematics 339 (8) (2016), 2113-2126.

[4]. D. Hefetz, M. Krivelevich, M. Stojakovič and and T.Szabó, Fast winning strategies in Maker-Breaker games, Journal of Combinatorial Theory Series B 99 (2009), 39-47.

[5]. D. Hefetz, M. Krivelevich, M. Stojakovič and and T.Szabó, Positional Games, Oberwalfach Seminars 44, Birkhäuser/Springer Basel, 2014.

[6]. D. B. West, Introduction to Graph Theory, Prentice Hall, 2001.