دراسة استقرار المعادلة التفاضلية العادية الخطية بعدة تأخيرات زمنية

طالبة الدراسات العليا: وفاء خضر شحادة كلية العلوم – جامعة البعث

الدكتور المشرف: د. سامح العرجة

ملخص البحث:

في هذاالبحث سيتم دراسة استقرار معادلات تفاضلية ذات تأخير زمني لامحدود باستخدام نظرية النقطة الثابتة من الشكل:

$$\dot{x}(t) = -a(t)x(t) + b(t)x\big(t - g(t)\big) + c(t)\dot{x}\big(t - g(t)\big)$$

ثم نعمم الدراسة إلى دراسة استقرار معادلات تفاضلية بعدة تأخيرات زمنية باستخدام نظرية النقطة الثابتة من الشكل:

$$\dot{x}(t) = -\sum_{J=1}^{N} b_J(t)x\left(t - \tau_J(t)\right) + \sum_{J=1}^{N} c_J(t)\dot{x}\left(t - \tau_J(t)\right)$$

كلمات مفتاحية: معادلات تفاضلية , استقرار تقاربي, نقطة ثابتة , تأخير زمني

Study of the stability of a linear ordinary differential equation with several delays

Abstract

First, we consider the linear neutral differential equation with unbounded delay by using the fixed point theory:

$$\dot{x}(t) = -a(t)x(t) + b(t)x\big(t - g(t)\big) + c(t)\dot{x}\big(t - g(t)\big)$$

In addition, we consider the asymptotic stability of a generalized linear neutral differential equation with variable delays by using the fixed-point theory:

$$\dot{x}(t) = -\sum_{J=1}^{N} b_J(t)x\left(t - \tau_J(t)\right) + \sum_{J=1}^{N} c_J(t)\dot{x}\left(t - \tau_J(t)\right)$$

Key words: asymptotic stability**,** variable delay, fixed-point theory, differential equation.

المشكلة وأهمية البحث:

وجدنا صعوبة بدراسة الاستقرار باستخدام تابع ليبا نوف للمعادلات التفاضلية من الشكل:

$$\dot{x}(t) = -a(t)x(t) + b(t)x\big(t - g(t)\big) + c(t)\dot{x}\big(t - g(t)\big)$$

$$\dot{x}(t) = -\sum_{J=1}^{N} b_J(t)x\left(t - \tau_J(t)\right) + \sum_{J=1}^{N} c_J(t)\dot{x}_J\big(t - \tau(t)\big)$$

لذلك وجدنا أن استخدام مبرهنة النقطة الثابتة أسهل لدراسة الاستقرار لهذا النوع من المعادلات.

دراسة استقرار المعادلة التفاضلية العادية الخطية بعدة تأخيرات زمنية

المقدمة:

منذ أكثر من مائة عام قام العالم ليبانوف بإيجاد الطريقة المباشرة وكان الطريقة الوحيدة لدراسة الاستقرار لفترة طويلة لكن هذه الطريقة تكمن صعوبتها في تشكيل تابع ليبانوف المناسب لكل معادلة تفاضلية وهذا يعتمد على التجريب وليست قابلة للاستخدام بشكل عام لذلك تم مؤخراً دراسة الاستقرار باستخدام النقطة الثابتة وهي أداة قوية لدراسة الاستقرار ومن اوائل الذين درسوا الاستقرار باستخدام مبرهنة النقطة الثابتة بورتن.

وللمعادلات التفاضلية الكثير من الدراسات في ديناميكية علم الأحياء كما لها تطبيقاتها في النماذج الفيزيولوجية وعلم البيئة و تعتبر نموذج لدراسة حركة خلايا الدم الحمراء وتعطى معادلتها بالشكل:

$$\dot{x}(t) = -\gamma(t)\left(\beta(t) + \frac{1}{\beta(t) + x^2(t-\tau(t))}\right)x(t) + \gamma(t)\beta(t)x(t-\tau(t)$$

حيث $\tau(t), \beta(t), \gamma(t) \in C(R, R^+)$.[15]

1− دراسة استقرار المعادلة التفاضلية العادية الخطية مع التأخير اللامحدود

$$\dot{x}(t) = -a(t)x(t) + b(t)x\big(t-g(t)\big) + c(t)\dot{x}\big(t-g(t)\big) \ldots\ldots (1,1)$$

حيث $a(t), b(t)$ توابع مستمرة و $c(t)$ تابع مستمر وقابل للاشتقاق و $g(t) \geq$ $0; t \in R$ تابع مستمر وقابل للاشتقاق مرتين. بسبب وجود المشتق في الطرف الأيمن للمعادلة ذات التأخيرالزمني أصبح من الصعب إيجاد تابع ليبانوف المناسب, لذلك سنقوم بدراسة الاستقرار باستخدام نظرية النقطة الثابتة.

<u>مبرهنة *1*:</u>

بفرض $\grave{g}(t) \neq 1 \ldots\ldots (1.2)$ عندئذ حل للمعادلة *(1,1)* يعطى بالعلاقة:

$$x(t) = \left(x(0) - \frac{c(0)}{1-\grave{g}(0)} x(-g(0)e^{-\int_0^t a(s)ds}\right) + \frac{c(t)}{1-\grave{g}(t)} x\big(t-g(t)\big) - \int_0^t \Big(r(u) - b(u)x\big(u-g(u)\big)e^{-\int_u^t a(s)ds}\Big)\, du \ldots\ldots\ldots (1,3)$$

$$r(u) = \frac{(\grave{c}(u) + c(u)a(u))(1-\grave{g}(u)) + \grave{\grave{g}}(u)c(u)}{\big(1-\grave{g}(u)\big)^2} \ldots\ldots (1,4)$$

البرهان:

بضرب طرفي المعادلة *(1,1)* بالحد $e^{\int_0^t a(s)ds}$ والمكاملة من *0* الى *t* نحصل على:

$$\int_0^t \left[x(u)e^{\int_0^u a(s)ds}\right]' du = \int_0^t \left[b(u)x\big(u-g(u)\big) + c(u)\dot{x}(u - g(u))\right]e^{\int_0^u a(s)ds}\, du$$

$$x(t)e^{\int_0^t a(s)ds} - x(0) = \int_0^t \left[b(u)x\big(u-g(u)\big) + c(u)\dot{x}(u - g(u))\right]e^{\int_0^u a(s)ds} du$$

بالتقسيم على $e^{\int_0^t a(s)ds}$:

$$x(t) = x(0)e^{-\int_0^t a(s)ds} + \int_0^t \left[b(u)x\big(u-g(u)\big) + c(u)\dot{x}\big(u-g(u)\big)\right]e^{-\int_u^t a(s)ds}\,du, \ldots (1,5)$$

نضرب ونقسم على $(1-\dot{g}(u))$

$$\int_0^t c(u)\dot{x}(u-g(u))e^{-\int_u^t a(s)ds}du = \int_0^t \frac{c(u)\dot{x}(u-g(u))(1-\dot{g}(u))}{(1-\dot{g}(u))}e^{-\int_u^t a(s)ds}du$$

نكامل بالتجزئة حيث:

$$U(u) = \frac{c(u)}{1-\dot{g}(u)}e^{-\int_u^t a(s)ds} \qquad , dV = \dot{x}(u-g(u))(1-\dot{g}(u))du$$

نحصل على:

$$\int_0^t c(u)\dot{x}(u-g(u))e^{-\int_u^t a(s)ds}du = \frac{c(u)}{1-\dot{g}(u)}x\big(t-g(t)\big) - \frac{c(0)}{1-\dot{g}(0)}x\big(-g(0)\big)e^{-\int_0^t a(s)ds} - \int_0^t r(u)e^{-\int_u^t a(s)ds}x\big(u-g(u)\big)du \ldots. (1,6)$$

حيث $r(u)$ معطى بالعلاقة *(1.4)* وأخيرا باستبدال *(1.6)* بـ *(1.5)* يتم الاثبات.

ليكن $\psi(t):]-\infty, 0] \to R$ تابع محدود ومستمر , لنعرف $x(t) := x(t,0,\psi)$ حل للمعادلة *(1,1)* ونكتب $t \le 0\;;$ $\qquad x(t) = \psi(t)$.

من أجل $t \geq 0$ نقول إن الحل الصفري لـ *(1,1)* مستقر عند t_0 من أجل $\varepsilon > 0$ يوجد $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ و $\psi:]-\infty, t_0] \to R$ بحيث يكون $|\psi(t)| < \delta$ على المجال $]-\infty, t_0]$ و $t \geq t_0$ يؤدي الى أن $|x(t, t_0, \psi)| < \varepsilon$.

ليكن C فضاء التوابع المستمرة $R \to R$ نعرف المجموعة:

$$S := \{\varphi: R \to R; \varphi(t) = \psi(t) \text{ if } t \leq 0, \varphi(t) \to 0, t \to \infty, \varphi \in C; \|\varphi\| < K < 1\}$$

عندئذ$(S, \|.\|)$ فضاء متري تام مع $\|.\|$ النظيم الاعظمي.

<u>مبرهنة 2:</u> بفرض أن:

$$e^{-\int_0^t a(s)ds} \to 0 \quad ; t \to \infty \quad \ldots (1.7)$$

ومن أجل $\alpha > 0$ فإن:

$$\left|\frac{c(t)}{1 - \grave{g}(t)}\right| + \int_0^t |r(u) - b(u)|\, e^{-\int_u^t a(s)ds} du \leq \alpha < 1 \ldots. (1.8)$$

$$t - g(t) \to \infty; t \to \infty \ldots (1.9)$$

إذا كان *(1.2),(1.7),(1,8),(1.9)* محققة, عندئذً كل حل $x(t, 0, \psi)$ للمعادلة *(1.1)* محدود ويسعى نحو الصفر عندما $t \to \infty$ وبالتالي الحل الصفري مستقر عند $t_0 = 0$.

البرهان: نعرف التطبيق $p: s \to s$ وليكن $(p\varphi)(t) = \psi(t); t \leq 0$

$$(p\varphi)(t) = \left(\psi(0) - \frac{c(0)}{1-\grave{g}(0)}\psi(-\mathrm{g}(0))\right)e^{-\int_0^t a(s)ds} + \frac{c(t)}{1-\grave{g}(t)}\varphi\big(t-g(t)\big) - \int_0^t |r(u)-b(u)|\varphi\big(u-g(u)\big)\, e^{-\int_u^t a(s)ds}du; t \geq 0$$

من أجل $\varphi \in S$ و $p\varphi$ مستمر و $\|\varphi\| \leq K$ حيث K ثابت موجب وليكن $\psi(\mathrm{t})$ تابع ابتدائي مستمر صغير معطى بحيث $|\psi| < \delta$ عندئذ باستخدام (1.8) في علاقة $(p\varphi)(t)$ نحصل على:

$$|p\varphi| \leq \left(\left|\frac{c(0)}{1-\grave{g}(0)}\right|K\right) + \frac{c(t)}{1-\grave{g}(t)}K - \int_0^t |r(u)-b(u)|\, e^{-\int_u^t a(s)ds}du \leq \left|\frac{c(0)}{1-\grave{g}(0)}\right|\delta + \alpha K \ldots..(1.10)$$

باختيار صحيح لـ δ يصبح $\|p\varphi\| \leq K$ وبالتالي $p\varphi(t)$ محدود.

لنثبت أن $(p\varphi)(t) \to 0 \; ; t \to \infty$:

الحد الأول في الطرف الأيمن من $(p\varphi)(t)$ يسعى نحو الصفر، والحد الثاني يسعى نحو الصفر باستخدام *(1,7)* و *(1,9)* و $\varphi \in S$. بقي أن نثبت أن التكامل يسعى نحو الصفر عندما $t \to \infty$

ليكن $\epsilon > 0$ معطاة و $\varphi \in S$ عندئذ يوجد $t_1 > 0$ بحيث إن

$\left|\varphi\big(t-g(t)\big)\right| < \epsilon \quad ; \quad t > t_1$ حسب الشرط (1,7) يوجد $t_2 > t_1$ بحيث

$t > t_2$ وبفرض أن $e^{-\int_{t_1}^t a(s)ds} < \frac{\epsilon}{\alpha K}$ من أجل $\mathrm{t} > t_1$ يكون:

$$\left|\int_0^t |r(u)-b(u)|\varphi\big(u-g(u)\big)\, e^{-\int_u^t a(s)ds} du\right|$$
$$< K\int_0^{t_1} |r(u)-b(u)|\, e^{-\int_u^t a(s)ds} du$$
$$+\epsilon\int_{t_1}^{t} |r(u)-b(u)|\, e^{-\int_u^t a(s)ds} du$$
$$\leq Ke^{-\int_{t_1}^t a(s)ds}\int_0^{t_1} |r(u)-b(u)|\, e^{-\int_u^{t_1} a(s)ds} du+\alpha\epsilon$$
$$\leq K\alpha e^{-\int_{t_1}^t a(s)ds}+\alpha\epsilon\leq \epsilon+\alpha\epsilon$$

عندئذ $(p\varphi)(t)\to 0; t\to\infty$ بقي أن نثبت أن $(p\varphi)(t)$ تطبيق ضاغط مع النظيم الأعظمي.

ليكن $\eta,\xi\in S$ بحيث:

$$|(p\xi)(t)-(p\eta)(t)|$$
$$\leq\left\{\left|\frac{c(t)}{1-\grave{g}(t)}\right|+\int_0^t |r(u)-b(u)|\, e^{-\int_u^t a(s)ds} du\right\}.\|\xi$$
$$-\eta\|\leq\alpha\|\xi-\eta\|$$

باستخدام مبدأ التطبيق الضاغط فإن p يملك نقطة ثابتة وحيدة من S والتي تحقق *(1,1)* محدودة وتسعى نحو الصفر عندما $t\to\infty$. ينتج الاستقرار للحل الصفري عندما $t_0=0$ باستبدال K بـ ϵ سابقاً يتم الاثبات.

مثال 1

لتكن المعادلة التفاضلية العادية الخطية

$$\grave{x}(t)=-2x(t)+C_0\grave{x}\left(t-\frac{t}{2}\right)\ldots..(1.11)$$

حيث C_0 ثابت ,عندئذ $r(u)=-4C_0$ الشرط *(1.8)* محقق من أجل

$$|C_0| \le \frac{\alpha}{4} \quad ; \quad \alpha \in (0,1)$$

ليكن $\psi(t)$ تابع ابتدائي مستمر حيث $|\psi(t)| \le \delta$ وليكن

$$S = \{\varphi: R \to R, \varphi(t) = \psi(t); t \le 0; \varphi(t) \to 0; t \to \infty, \|\varphi\| \le K, \varphi \in C\}$$

نعرف $(p\varphi)(t) = \psi(t) \quad ; t \le 0$

$$(p\varphi)(t) = (1 - 2C_0)(\psi(0)e^{-2t} + 2C_0\varphi\left(\frac{t}{2}\right) + \int_0^t 4C_0\varphi\left(\frac{u}{2}\right)e^{-2(t-u)}du \,; t > 0$$

من أجل $\varphi \in S$ يكون $\|\varphi\| \le K$ حيث $K \ge \frac{1-\alpha}{|1-2C_0|\delta}$ نحصل على $\|(\varphi)(t)\| \le K$ من الواضح أن *(1,9), (1,7)* محققة لاثبات أن p يعرف تطبيق متراص ليكن ξ, η عندئذ

$$|(p\xi)(t) - (p\eta)(t)| \le 2|C_0|.\|\xi - \eta\| + 2|C_0|(1 - e^{-2t})\|\xi - \eta\| \le 4|C_0|.\|\xi - \eta\| \le \alpha.\|\xi - \eta\|$$

بالاعتماد على المبرهنة *1* كل حل $x(t, 0, \psi)$ لـ *(1.11)* حيث التابع الابتدائي المستمر الصغير $\psi(t):]-\infty, 0] \to R$ محدود ويسعى نحو الصفر عندما $t \to \infty$.

2- دراسة استقرار معادلة تفاضلية خطية بعدة تأخيرات زمنية من الشكل:

$$\dot{x}(t) = -\sum_{J=1}^{N} b_J(t)x\left(t - \tau_J(t)\right) + \sum_{J=1}^{N} c_J(t)\dot{x}_J\left(t - \tau(t)\right) \ldots\ldots (2,1)$$

مع الشرط الابتدائي:

$\Psi(t) \in$ حيث $t \in [m(t_0), t_0]$, من أجل $x(t) = \Psi(t)$ ... . (2,2)
. $t_0 \geq 0$ من أجل $C([m(t_0), t_0], R)$

$m(t_0) = min\{m_J(t_0), 1 \leq J \leq$, $m_J(t_0) = inf\{t - \tau_J(t), t \geq t_0\}$
$N\}$.....(2,3)

هدفنا هو دراسة الاستقرار التقاربي للمعادلة (2,1) باستخدام مبدأ التطبيق الضاغط ومقارنة النتائج مع ما سبق.

النتائج الرئيسية:

من أجل كل $(t_0, \Psi) \in R^+ \times C([m(t_0), t_0], R)$

ليكن التابع المستمر $\alpha > 0$; $x: [m(t_0), t_0 + \alpha[\to R^n$ إن $x(t)$ حل للمعادلة *(2,1)* على المجال $[t_0, t_0 + \alpha[$ و $x = \Psi$ على المجال $[m(t_0), t_0]$.نعرف $x(t) = x(t, t_0, \Psi)$.

من أجل كل (t_0, Ψ) يوجد حل وحيد $x(t) = x(t, t_0, \Psi)$ للمعادلة (2,1) معرف على $[t_0, \infty[$ من أجل t_0 مثبتة نعرف

.$\|\Psi\| = max\{|\Psi(t)|: m(t_0) \leq t \leq t_0\}$

مبرهنة3:

بفرض τ_J قابل للاشتقاق مرتين و $\dot{\tau}(t) \neq 1$ و بفرض $\propto \in]0,1[$ من أجل

$t \geq 0$ توجد توابع مستمرة $h_J: [m_J(t_0), \infty[\to R, J = 1,2, \dots, N$ من أجل
$t \geq 0$

$$\left|\lim_{t\to\infty} inf \int_0^t H(s)ds\right| < \infty \ldots (2,4)$$

$$\sum_{J=1}^{N}\left|\frac{c_J(t)}{1-\grave{\tau}_J(t)}\right| + \sum_{J=1}^{N}\int_{t-\tau_J(t)}^{t}\left|h_J(s)\right|ds + \sum_{J=1}^{N}\int_0^t e^{-\int_s^t H(u)du}\left|-b_J(s) + \left[h_J\left(s-\tau_J(s)\right)\right](1 - \grave{\tau}_J(s)) - r(s)\right|ds + \sum_{J=1}^{N}\int_0^t e^{-\int_s^t H(u)du}|H(s)|\left(\int_{s-\tau_J(s)}^{s}\left|h_J(u)\right|du\right)ds \le \alpha \ldots\ldots (2,5)$$

حيث

$$H(t) = \sum_{J=1}^{N} h_j(t)$$

$$\mathrm{r}_j(t) = \frac{\left[c_j(t)H(t) + \grave{c}_j(t)\right]\left(1-\grave{\tau}_j(t)\right) + c_j(t)\grave{\grave{\tau}}_j(t)}{(1-\grave{\tau}_j(t))^2}$$

عندئذ الحل الصفري للمعادلة (2,1) مستقر تقاربياً, إذا وفقط إذا تحقق:

$$.\ \int_0^t H(s)ds \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} \infty, \ldots.(2,6)$$

الاثبات:

بفرض أن (2,6) محققة من أجل $t_0 > 0$ وبجعل

$$K = \sup_{t\ge 0} e^{-\int_0^t H(s)ds}, \ldots (2,7)$$

ليكن $\Psi \in C([m(t_0), t_0], R)$ نعرف S فضاء متري متراص حيث

بالشكل: $\rho(x,y)=\sup_{t\geq t_0}\{|x(t)-y(t)|\}$

$$S=\left\{\varphi\in C([m(t_0),\infty[,R):\varphi(t)\underset{t\to\infty}{\longrightarrow}0\,,\varphi(t)=\Psi(t);t\in[m(t_0),t_0]\right\}$$

نضرب طرفي المعادلة $(2,1)$ بـ $e^{\int_{t_0}^{t}H(u)du}$ ثم نكامل من t_0 الى t نحصل على :

$$\begin{aligned}x(t)=\Psi(t_0)e^{-\int_{t_0}^{t}H(u)du}&+\int_{t_0}^{t}e^{-\int_{s}^{t}H(u)du}\sum_{j=1}^{N}h_J(s)x(s)ds\\&-\int_{t_0}^{t}e^{-\int_{s}^{t}H(u)du}\sum_{j=1}^{N}b_J(s)x\left(s-\tau_J(s)\right)ds\\&+\int_{t_0}^{t}e^{-\int_{s}^{t}H(u)du}\sum_{j=1}^{N}c_J(s)\dot{x}\left(s-\tau_J(s)\right)ds\\&=\Psi(t_0)e^{-\int_{t_0}^{t}H(u)du}+\sum_{j=1}^{N}\int_{t_0}^{t}e^{-\int_{s}^{t}H(u)du}h_J(s)x(s)ds\\&-\sum_{j=1}^{N}\int_{t_0}^{t}e^{-\int_{s}^{t}H(u)du}b_J(s)x\left(s-\tau_J(s)\right)ds\\&+\sum_{j=1}^{N}\int_{t_0}^{t}e^{-\int_{s}^{t}H(u)du}c_J(s)\dot{x}\left(s-\tau_J(s)\right)ds\end{aligned}$$

نكامل بالتجزئة :

$$x(t) = \Psi(t_0)e^{-\int_{t_0}^{t} H(u)du} + \sum_{j=1}^{N}\int_{t_0}^{t} e^{-\int_s^t H(u)du} d\left(\int_{s-\tau_J(s)}^{s} h_J(u)x(u)du\right) + \sum_{j=1}^{N}\int_{t_0}^{t} e^{-\int_s^t H(u)du}\Big\{-b_J(s) + h_j\left(s-\tau_J(s)\right)\left(1-\grave{\tau}_j(s)\right)\Big\} x\left(s-\tau_J(s)\right)ds + \sum_{j=1}^{N}\int_{t_0}^{t}\frac{c_j(s)}{1-\grave{\tau}_j(s)} e^{-\int_s^t H(u)du} dx\left(s-\tau_J(s)\right)$$

$$= \left\{\Psi(t_0) - \sum_{j=1}^{N}\frac{c_j(t_0)}{1-\grave{\tau}_j(t_0)}\Psi\left(t_{0-}\tau_J(t_0)\right) - \sum_{j=1}^{N}\int_{t_0-\tau_J(s)}^{t_0} h_J(s)\Psi(s)ds\right\} e^{-\int_{t_0}^{t} H(u)du} + \sum_{j=1}^{N}\frac{c_j(t)}{1-\grave{\tau}_j(t)} x\left(t_{-}\tau_J(t)\right) + \sum_{j=1}^{N}\int_{t-\tau_J(t)}^{t} h_J(s)x(s)ds + \sum_{j=1}^{N}\int_{t_0}^{t} e^{-\int_s^t H(u)du}\Big\{-b_J(s) + h_j\left(s-\tau_J(s)\right)\left(1-\grave{\tau}_j(s)\right) - r_j(s)\Big\} x\left(s-\tau_J(s)\right)ds - \sum_{j=1}^{N}\int_{t_0}^{t} e^{-\int_s^t H(u)du} H(s)\left(\int_{s-\tau_J(s)}^{s} h_J(u)x(u)du\right) \ldots\ldots (2,8)$$

باستخدام (2,8) نعرف المؤثر $p: S \to S$ بالشكل:

$$(p\varphi)(t) = \Psi(t) \quad ; \qquad t \in [m(t_0), t_0]$$

$$\begin{aligned}(p\varphi)(t)\\ &= \left\{\Psi(t_0) - \sum_{j=1}^{N} \frac{c_j(t_0)}{1-\grave{\tau}_j(t_0)}\Psi\left(t_{0-}\tau_J(t_0)\right)\right.\\ &\left.- \sum_{j=1}^{N}\int_{t_0-\tau_J(s)}^{t_0} h_J(s)\Psi(s)ds\right\} e^{-\int_{t_0}^{t} H(u)du}\\ &+ \sum_{j=1}^{N}\frac{c_j(t)}{1-\grave{\tau}_j(t)}\varphi\left(t_{-}\tau_J(t)\right) + \sum_{j=1}^{N}\int_{t-\tau_J(t)}^{t} h_J(s)\varphi(s)ds\\ &+ \sum_{j=1}^{N}\int_{t_0}^{t} e^{-\int_s^t H(u)du}\left\{-b_J(s) + h_j\left(s-\tau_J(s)\right)\left(1-\grave{\tau}_j(s)\right)\right.\\ &\left.- r_j(s)\right\}\varphi\left(s-\tau_J(s)\right)ds\\ &- \sum_{j=1}^{N}\int_{t_0}^{t} e^{-\int_s^t H(u)du} H(s)\left(\int_{s-\tau_J(s)}^{s} h_J(u)\varphi(u)du\right)ds \ldots (2,9)\end{aligned}$$

من الواضح أن $(p\varphi)(t) \in C([m(t_0),\infty[,R)$. لقد رأينا أن: $(p\varphi)(t) \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$

$\varphi(t) \to 0$ و $t-\tau_J(t) \xrightarrow[t\to\infty]{} \infty$, من أجل كل $\varepsilon > 0$ يوجد $T_1 > t_0$ بحيث أن $s \ge T_1$ يؤدي $\left|x\left(s_{-}\tau_J(s)\right)\right| < \varepsilon\ ;\ j = 1,2,\ldots,N$. من أجل $t \ge T_1$ الحد الأخير من (2,9) يحقق:

$$|I_5| = \left|\sum_{j=1}^{N}\int_{t_0}^{t} e^{-\int_s^t H(u)du} H(s)\left(\int_{s-\tau_J(s)}^{s} h_J(u)\varphi(u)du\right)ds\right|$$

$$\leq \sum_{j=1}^{N} \int_{t_0}^{T_1} e^{-\int_s^t H(u)du} H(s) \left(\int_{s-\tau_J(s)}^{s} h_J(u)\varphi(u)du \right) ds$$
$$+ \sum_{j=1}^{N} \int_{T_1}^{t} e^{-\int_s^t H(u)du} H(s) \left(\int_{s-\tau_J(s)}^{s} h_J(u)\varphi(u)du \right) ds$$

$$\leq \sup_{\sigma \geq m(t_0)} |\varphi(\sigma)| \sum_{j=1}^{N} \int_{t_0}^{T_1} e^{-\int_s^t H(u)du} H(s) \left(\int_{s-\tau_J(s)}^{s} h_J(u)du \right) ds$$
$$+ \varepsilon \sum_{j=1}^{N} \int_{T_1}^{t} e^{-\int_s^t H(u)du} H(s) \left(\int_{s-\tau_J(s)}^{s} h_J(u)du \right) ds$$

باستخدام *(2,6)* يوجد $T_2 \geq T_1$ بحيث أن $t \geq T_2$ يؤدي:

$$\sup_{\sigma \geq m(t_0)} |\varphi(\sigma)| \sum_{j=1}^{N} \int_{t_0}^{T_1} e^{-\int_s^t H(u)du} H(s) \left(\int_{s-\tau_J(s)}^{s} h_J(u)du \right) ds < \varepsilon$$

بتطبيق *(2,5)* نحصل على:

$$|I_5| < \varepsilon + \alpha\epsilon < 2\varepsilon$$

وبالتالي $I_5 \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0$ نرى بأن بقية الحدود في *(2,9)* تسعى نحو الصفر عندما $t \to \infty$ وبالتالي $(p\varphi)(t) \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0$ هذا يعني أن

$p\varphi \in S$.باستخدام *(2,5)* وبما أن p تطبيق متراص مع الثابت α وباستخدام مبدأ التطبيق الضاغط, فإن p يملك نقطة ثابتة وحيدة $x \in S$ وهو حل للمعادلة *(3,1)* حيث:

$x(t) = \Psi(t)\ ;\ t \in [m(t_0), t_0]$ و $x(t) = x(t, t_0, \Psi) \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

للحصول على الاستقرار التقاربي علينا إثبات أن الحل الصفري لـ$(2,1)$ مستقر. ليكن $\varepsilon > 0$ نختار $\delta > 0$ ومن أجل $\delta < \varepsilon$ يكون $2\delta K e^{\int_0^t H(u)du} + \alpha\varepsilon < \varepsilon$.

إذا كان $x(t) = x(t, t_0, \Psi)$ حل للمعادلة *(2,1)* حيث$\|\Psi\| < \delta$ عندئذ $x(t) = (px)(t)$ وبالتالي $|x(t)| < \varepsilon$ عندما $t \geq t_0$. نلاحظ أن

$|x(s)| < \varepsilon \ \ ; s \in [m(t_0), t_0]$.

إذا وجد $t^* > t_0$ بحيث إن $x(t^*) = \varepsilon$ و $|x(s)| < \varepsilon$ من أجل

$s \in [m(t_0), t^*[$ عندئذ :

$$\begin{aligned}
x(t^*) \leq \|\Psi\| &\left(1 + \sum_{j=1}^{N} \frac{c_j(t_0)}{1 - \grave{\tau}_j(t_0)} \right. \\
&\left. + \sum_{j=1}^{N} \int_{t_0 - \tau_J(s)}^{t_0} \left| h_J(s) \right| ds \right) e^{-\int_{t_0}^{t^*} H(u)du} \\
&+ \epsilon \sum_{j=1}^{N} \frac{c_j(t^*)}{1 - \grave{\tau}_j(t^*)} + \epsilon \sum_{j=1}^{N} \int_{t^* - \tau_J(t^*)}^{t^*} \left| h_J(s) \right| ds \\
&+ \epsilon \sum_{j=1}^{N} \int_{t_0}^{t^*} e^{-\int_s^{t^*} H(u)du} \left\{ -b_J(s) \right. \\
&\left. + h_j\left(s - \tau_J(s)\right)\left(1 - \grave{\tau}_j(s)\right) - r_j(s) \right\} ds \\
&- \epsilon \sum_{j=1}^{N} \int_{t_0}^{t^*} e^{-\int_s^{t} H(u)du} |H(s)| \left(\int_{s - \tau_J(s)}^{s} \left| h_J(u) \right| du \right) ds \\
&\leq 2\delta K e^{-\int_0^{t_0} H(u)du} + \alpha\varepsilon < \epsilon
\end{aligned}$$

وهذا يناقض التعريف على t^* وبالتالي فإن $|x(t)| < \varepsilon$ من أجل $t \geq t_0$ والحل الصفري ل *(2,1)* مستقر وبالتالي مستقر تقاربياً إذا تحققت *(2,6)*.

وبالعكس: بفرض (2,6) غيرمحققة. باستخدام*(2,4)* يوجد متتالية $\{t_n\}$ حيث t_n $\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}\infty$ بحيث أن:

$\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{t_n} H(s)ds = l, l\in R^+$. نختار ثابت موجب J يحقق:

$$-J \le \int_0^{t_n} H(s)ds \le J, n \ge 1$$

للتبسيط ومن أجل كل $s \ge 0$ نكتب:

$$w(s) = \sum_{j=1}^{N}\left[\left|-b_J(s) + h_j\left(s-\tau_J(s)\right)\left(1-\dot{\tau}_j(s)\right) - r_j(s)\right| + |H(s)|\left(\int_{s-\tau_J(s)}^{s}\left|h_J(u)\right|du\right)\right]$$

باستخدام (2,5) لدينا: $\int_0^{t_n} e^{-\int_s^{t_n} H(u)du} w(s)ds \le \alpha$ ومنه ينتج :

$$\int_0^{t_n} e^{\int_0^s H(u)du} w(s)ds \le \alpha e^{\int_0^{t_n} H(u)du} \le J$$

المتتالية $\left\{\int_0^{t_n} e^{\int_0^s H(u)du} w(s)ds\right\}$ محدودة, لذلك يوجد متتالية جزئية متقاربة بحيث :

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{t_n} e^{\int_0^s H(u)du} w(s)ds = \gamma \quad ; \gamma \in R^+$$

باختيار عدد صحيح موجب m كبير جداً:

$$\int_{t_m}^{t_n} e^{\int_0^s H(u)du} w(s)ds < \frac{\delta_0}{4K}$$

من أجل $n \ge m$ حيث $\delta_0 \ge 0$ يحقق$2\delta_0 K e^J + \alpha \le 1$.

نفرض أن الحل $x(t)=x(t,t_m,\Psi)$ حل للمعادلة *(3,1)* حيث $\Psi(t_m)=\delta_0$ و $|\Psi(s)|\le\delta_0$ من أجل $s\le t_m$ نختار Ψ بحيث أن $|x(t)|\le 1$ من أجل $t\ge t_m$:

$$\Psi(t_m)-\sum_{j=1}^{N}\left[\frac{c_j(t_m)}{1-\grave{\tau}_j(t_m)}\Psi\left(t_{m\_}\tau_J(t_m)\right)+\int_{t_m-\tau_J(t_m)}^{t_m}h_J(s)\varphi(s)ds\right]\ge\frac{1}{2}\delta_0$$

ينتج من $(2,9)$ حيث $x(t)=(px)(t)$ ومن أجل $n\ge m$ أن:

$$\left|x(t_n)-\sum_{j=1}^{N}\left[\frac{c_j(t_n)}{1-\grave{\tau}_j(t_n)}\Psi\left(t_{n\_}\tau_J(t_n)\right)+\int_{t_n-\tau_J(t_n)}^{t_n}h_J(s)\varphi(s)ds\right]\ge\frac{1}{2}\delta_0e^{-\int_{t_m}^{t_n}H(u)du}-\int_{t_m}^{t_n}e^{\int_s^{t_n}H(u)du}w(s)ds\right|$$

$$=e^{-\int_{t_m}^{t_n}H(u)du}\left(\frac{1}{2}\delta_0-e^{-\int_0^{t_m}H(u)du}\int_{t_m}^{t_n}e^{\int_0^{s}H(u)du}w(s)ds\right)$$

$$\ge e^{-\int_{t_m}^{t_n}H(u)du}\left(\frac{1}{2}\delta_0-K\int_{t_m}^{t_n}e^{\int_0^{s}H(u)du}w(s)ds\right)$$

$$\ge\frac{1}{4}\delta_0e^{-\int_{t_m}^{t_n}H(u)du}\ge\frac{1}{4}\delta_0e^{-2J}>0\ldots(3,10)$$

من ناحية أخرى, إذا كان الحل الصفري للمعادلة $(2,1)$ مستقر تقاربياً فإن $x(t)=x(t,t_m,\Psi)\underset{t\to\infty}{\longrightarrow}0$

بحيث $t_n-\tau_J(t_n)\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}\infty$ وتحققت*(2,5)* فإن:

$$x(t_n)-\sum_{j=1}^{N}\left[\frac{c_j(t_n)}{1-\dot{\tau}_j(t_n)}x\left(t_{n\_}\tau_J(t_n)\right)+\int_{t_n-\tau_J(t_n)}^{t_n}h_J(s)x(s)ds\right]\xrightarrow[n\to\infty]{}0$$

وهذا يناقض (2,10) وبذلك يكون الشرط (2,6) شرط لازم من أجل الاستقرار التقاربي للحل الصفري للمعادلة (2,1).

البديهية2:

من أجل $N=2,\tau_1=0,\tau_2=\tau,b_1=a,c_1=0,c_2=c$ بفرض أن τ قابل للاشتقاق مرتين $\dot{\tau}(t)\neq 1$ من أجل كل $t\geq 0$ و بفرض $\propto\in(0,1)$, من أجل $t\geq 0$ توجد توابع مستمرة:

$$t\geq 0 \text{ من أجل } \text{بحيث إنه } h_J:\ \left[m_J(t_0),\infty\right[\to R\quad;\ J=1,2$$

$$\left|\lim_{t\to\infty}inf\int_0^t H(s)ds\right|<\infty$$

$$\sum_{J=1}^{N}\left|\frac{c(t)}{1-\dot{\tau}(t)}\right|+\int_{t-\tau(t)}^{t}|h_2(s)|ds+\int_0^t e^{-\int_s^t H(u)du}\big(|-a(s)+h_1(s)|+\left|-b(s)+h_2\big(s-\tau(s)\big)\big(1-\dot{\tau}(s)\big)-r(s)\right|\big)ds+\int_0^t e^{-\int_s^t H(u)du}|H(s)|\left(\int_{s-\tau_J(s)}^{s}|h_2(u)|du\right)ds\leq\alpha\ldots\ldots(2,11)$$

حيث

$$H(t)=\sum_{J=1}^{2}h_j(t)$$

$$\mathrm{r}(t) = \frac{[c(t)H(t) + \grave{c}(t)]\big(1 - \grave{\tau}(t)\big) + c_j(t)\grave{\grave{\tau}}(t)}{(1 - \grave{\tau}(t))^2}$$

الحل الصفري لـ $(2,1)$ مستقر تقاربياً إذا وفقط إذا كان

$\int_0^t H(s)ds \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} \infty$.

<u>**ملاحظة :**</u> عندما $h_1(s) = a(s)\ , h_2(s) = h(s) - a(s)$. البديهية*2* تنتج من المبرهنة*1* .

من أجل الحالة الخاصة: $c_j(t) = 0$ نحصل على:

<u>**البديهية*3*:**</u> بفرض τ_j قابل للاشتقاق مرتين توجد توابع مستمرة:

$$h_J:\ \ [m_J(t_0), \infty[\to R, J = 1,2, \dots , N$$

$$\left|\lim_{t\to\infty} inf \int_0^t H(s)ds\right| < \infty$$

$$\sum_{j=1}^{N} \int_{t-\tau(t)}^{t} \left|h_j(s)\right| ds + \sum_{j=1}^{N} \int_0^t e^{-\int_s^t H(u)du} \Big| -b_j(s) + h_j\left(s - \tau_j(s)\right)\left(1 - \grave{\tau}(s)\right)\Big| + \int_0^t e^{-\int_s^t H(u)du} |H(s)| \left(\int_{s-\tau_J(s)}^{s} \left|h_j(u)\right| du\right) ds \le \alpha$$

حيث $H(t) = \sum_{j=1}^{2} h_j(t)$, عندئذ الحل الصفري لـ $(1,1)$مستقر تقاربياً إذا وفقط إذا:

$$\int_0^t H(s)ds \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} \infty$$

ملاحظة: عندما $h_j(s) = b_j\big(g_j(s)\big) \quad ; \quad j = 1,2, \dots , N$ البديهية *3* تعميم للمبرهنة*1*.

مثال*2* ليكن: $\acute{x}(t) = -b_1(t)x\big(t - \tau_1(t)\big) - b_2(t)x\big(t - \tau_2(t)\big) \dots . (2,12)$

حيث $\tau_1(t) = 0.273t \quad \tau_2(t) = 0.289t \quad b_1(t) = \frac{1}{1.454t+2} \quad b_2(t) = \frac{1}{1.422t+2}$

عندئذ الحل الصفري للمعادلة*(2,12)* مستقر تقاربياً.

البرهان: باختيار $h_1(t) = h_2(t) = \frac{0.62}{t+1}$ وبذلك يكون $H(t) = \frac{1.24}{t+1}$

$$\sum_{j=1}^{2} \int_{t-\tau_j(t)}^{t} \left|h_j(s)\right| ds = \int_{0.727t}^{t} \frac{0.62}{s+1} ds + \int_{0.711t}^{t} \frac{0.62}{s+1} ds$$
$$= 0.62ln\left(\frac{t+1}{0.727t+1}\right) + 0.62ln\left(\frac{t+1}{0.711t+1}\right) < 0.4092$$

$$\sum_{j=1}^{2} \int_{0}^{t} e^{-\int_s^t H(u)du} |H(s)| \left(\int_{s-\tau_J(s)}^{s} \left|h_j(u)\right| du \right) ds$$
$$< \int_0^t e^{-\int_s^t 1.24/(u+1) du} \frac{1.24}{1+s} . o.4092 ds < 0.4092$$

$$\sum_{j=1}^{2} \int_{0}^{t} e^{-\int_s^t H(u)du} \left|-b_j(s) + h_j\left(s - \tau_j(s)\right)\left(1 - \dot{\tau}(s)\right) - r_j(s)\right| ds$$

$$\frac{1}{2}\int_0^t e^{-\int_s^t \frac{1.24}{u+1}du}\,\frac{1-1.24\times 0.727}{1+0.727}\,ds + \frac{1}{2}\int_0^t e^{-\int_s^t 1.24/(u+1)\,du}\,\frac{1-1.24\times 0.711}{1+0.711s}\,ds$$

$$\leq \frac{1}{2}\left(\frac{1-1.24\times 0.727}{1.24\times 0.727}+\frac{1-1.24\times 0.711}{1.24\times 0.711}\right)$$

$$\int_0^t e^{-\int_s^t 1.24/(u+1)\,du}\,\frac{1.24}{s+1}\,ds < 0.1218$$

نرى أن شروط البديهية 3 محققة حيث:

$$\alpha = 0.4092 + 0.4092 + 0.1218 = 0.9402 < 1$$

وهذا يؤدي أن الحل الصفري لـ (2.12) مستقر تقاربياً.

المقترحات: دراسة استقرار المعادلات التفاضلية اللاخطية باستخدام النقطة الثابتة.

المراجع

1] T.A. Burton, Stability by Fixed Point Theory for Functional Differential Equations, Dover Publications, New York, 2006.

[2] T.A. Burton, Liapunov functionals, fixed points, and stability by Krasnoselskii's theorem, Nonlinear Studies 9 (2001) .

[3] T.A. Burton, Stability by fixed point theory or Liapunov's theory: a comparison, Fixed Point Theory 4 (2003) .

[4] T.A. Burton, Fixed points and stability of a nonconvolution equation, Proceedings of the American Mathematical Society 132 (2004).

[5] T.A. Burton, T. Furumochi, A note on stability by Schauder's theorem, Funkcialaj Ekvacioj 44 (2001) .

[6] T.A. Burton, T. Furumochi, Fixed points and problems in stability theory, Dynamical Systems and Applications 10 (2001) .

[7] T.A. Burton, T. Furumochi, Asymptotic behavior of solutions of functional differential equations by fixed point theorems, Dynamic Systems and Applications 11 (2002).

[8] T.A. Burton, T. Furumochi, Krasnoselskii's fixed point theorem and stability, Nonlinear Analysis 49 (2002).

[9] Y.M. Dib, M.R. Maroun, Y.N. Raffoul, Periodicity and stability in neutral nonlinear differential equations with functional delay, Electronic Journal of Differential Equations 2005 (142) (2005) .

[10] A. Djoudi, R. Khemis, Fixed point techniques and stability for neutral nonlinear differential equations with unbounded delays, Georgian Mathematical Journal 13 (1) (2006).

[11] C.H. Jin, J.W. Luo, Stability in functional differential equations established using fixed point theory, Nonlinear Analysis 68 (2008).

[12] C.H. Jin, J.W. Luo, Fixed points and stability in neutral differential equations with variable delays, Proceedings of the American Mathematical Society136 (3) (2008).

[13] Y.N. Raffoul, Stability in neutral nonlinear differential equations with functional delays using fixed-point theory, Mathematical and Computer

Modelling 40 (2004).

[14] B. Zhang, Fixed points and stability in differential equations with variable delays, Nonlinear Analysis 63 **(2005)**.

[**15**] MENG FAN, ZHINAN XIA AND HUAIPING ZHU, ASYMPTOTIC STABILITY OF DELAYDIFFERENTIAL

EQUATIONS VIA FIXEDPOINT THEORY AND APPLICATIONS Volume 18, Number 4 (2010).

[**16**] T.A. Burton Stability by fixed point theory for functional differential equations (2013).

[**17**]Mouataz Billah Mesmouli, Abdlouaheb Ardjouni, Ahcene Djoudi Stability In Neutral Nonlinear Differential Equations **(2017)**.

[18] M. B. Mesmouli, A. Ardjouni, A. DjoudiStudy of Stability in Nonlinear Neutral Differential Equations with Variable Delay Using Krasnoselskii–Burton's Fixed- Point(2016).