دراسة في انتظام التوابع الكواترنيونية وفقاً لنظام الشرائح

طالب الدكتوراه : أنس فوزي خلوف

المشرف: أ.د.إبراهيم إبراهيم

جامعة البعث – كلية العلوم – قسم الرياضيات

الملخص

يقدم هذا البحث تعميماً لمفهوم الهولومورفية والتوابع النظامية بمتغير كواترنيوني, عن طريق عدة مؤثرات تفاضلية. لنصل إلى أفضل تعميم للتوابع النظامية للاستفادة منها في دراسة بعض النظائر لاسيما مبرهنة كوشي من التحليل العقدي إلى التحليل الكواترنيوني , بالإضافة إلى معاملات الحدود القصوى والدنيا. كما يعرض البحث أيضاً أهم العمليات الجبرية على هذه التوابع .

كلمات مفتاحية:

الكواترنيون – التابع بمتغير كواترنيوني – مؤثرات فويتر وكولن – التابع النظامي بمتغير كواترنيوني – العمليات على التوابع النظامية .

A Study in the Regularity of Quaternion Functions According to the Slice System

PhD student: Anas Fawzi Khallouf

Supervisor: Prof. Dr. Ibrahim Ibrahim

Al-Baath University - College of Science - Department of Mathematics

Summary

This investigate presents a generalization of the concept of holomorphic and regular functions with a quaternion variable, through several differential operators. In order to reach the best generalization of the systematic functions to benefit from it in the study of some analogs, especially Cauchy's theory, from the complex analysis to the quaternion analysis, in addition to the coefficients of the maximum and minimum terms. The investigate also presents the most important algebraic operations on these functions.

Keywords:

Quaternion - Function with a quaternion variable - Regular function with a quaternion variable - Operations on regular functions.

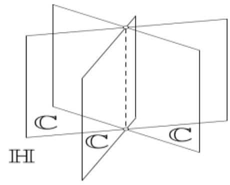
1- مقدمة:

إنّ البحث عن تعريف الانتظام للتوابع ذات القِيم الكواترنيونية لمتغير كواترنيوني كان محط اهتمامٍ للكثير من الرياضيين من حوالي قرنٍ من الزمن وحتى الآن. كانت هناك مناهج مختلفة ولّدت نظريات مختلفة, أشهرها بالتأكيد نظرية فويتر للانتظام. والذي قدمها فويتر في ثلاثينيات القرن الماضي [10]. إن صف التوابع النظامية وفق فويتر عُرّفت عن طريق معادلة كوشي ريمان , والذي يشمل بالفعل على العديد من الخصائص الرئيسية للتوابع الهولومورفية من متغير عقدي واحد. وعلى سبيل المثال نذكر نظرية كوشي وصيغ كوشي التكاملية , وقد عُمّمت هذه الدراسة من قِبل (رمضانوف–Ramadanoff) و (لافيل– Laville) [11]. ومع ذلك لا تزال نظرية فويتر للتوابع النظامية غير مكتملة وتواجه العديد من العوائق لتعميمها على الكواترنيون.

ولكون H (مجموعة الأعداد الكواترنيونية) مُتماثلة جبرياً مع الفضاء الإقليدي رباعي البُعد R^4 , بالتالي أي تحليل على هذه التوابع يجب أن يتم بلغة حساب التفاضل والتكامل على المُنطويات (manifolds). من هنا تأتي أهمية الهندسة التفاضلية والتفاضل والتكامل الخارجي في فهم الخصائص التحليلية لمثل هذه التوابع والمرجع [15] يُقدّم لنا معلومات في هذا المجال. بالإضافة إلى أهمية جبر كليفورد (Clifford Algebra) لتطوير مفهوم التوابع على الفضاءات مُتعددة الأبعاد [5] .ويُعد (سادبيري–Sudbery) من أهم العلماء الذين قاموا ببناء التحليل الكواترنيوني مُعتمداً على الفهم الهندسي والجبري للمشتق وتطبيقاته لتوفير أهم النظائر من التحليل العقدي إلى التحليل الكواترنيوني[8].

وفي عام2006 , قدم كل من (جنتيلي–Gentili) و (ستروبّا – Struppa) مفهوماً جديداً للانتظام في الأعداد الكواترنيونية , مُستوحاً من العمل الذي قام به (كولن–Cullen) [9]. والذي أسماه بـ انتظام الشرائح (Slice regularity) , وذلك عن طريق

إعادة صياغة تعريف كولن للانتظام من خلال الخصائص الجبرية لـ H[12]. إنهم يعتبرون الجبر الحقيقي رباعي الأبعاد H على أنه اجتماع للمستويات العقدية $L_I = R + RI \approx C$ والتي تُدعى أيضاً بالشرائح, أي: $H = \bigcup_{I \in S}(R + RI) = \bigcup_{I \in S} L_I$



حيث تتقاطع جميع هذه الشرائح بالمحور الحقيقي . وكل واحدة منها يتم تحديدها بواسطة وحدة تخيلية I . إن مجموعة جميع الوحدات التخيلية عبارة عن كرة ثنائية البُعد يرمز لها بـ S , حيث $S = \{q \in H; q^2 = -1\}$ وتقع ضمن فضاء ثلاثي الأبعاد من العناصر الكواترنيونية التخيلية البحتة. وتَلعب هذه المجموعة دوراً رئيسياً في نظرية التوابع النظامية.

إن نظرية التوابع النظامية وفقاً للشرائح والغنية بالفعل, هي في تطور مستمر. وعلى الرغم من خصائصها المتنوعة , أثبتت التوابع النظامية وفقاً للشرائح أنها جيدة ومرشحةً أن تلعب دوراً في الأعداد الكواترنيونية مشابه لدور التوابع الهولومورفية في الأعداد العقدية. يمكننا أن نذكر على سبيل المثال , نظائرها في نظرية كوشي.

1- هدف البحث:

يهدف البحث إلى تقديم تعميمٍ لمفهوم انتظام التوابع من الساحة العقدية إلى الساحة الكواترنيونية والاعتماد على أفضل تعميم لمفهوم الانتظام في إيجاد بعض النظائر المتعلقة بالتوابع العقدية إلى التوابع الكواترنيونية.

2- مشكلة البحث:

تكمن مشكلة البحث الرئيسة في عدم تحقق الخاصة التبديلية في عملية الضرب بين عنصرين من الكواترنيون , وبالتالي صعوبة دراسة التوابع الكواترنيونية دراسة تحليلية, لاسيما قابلية الإشتقاق . وهذا يتطلب منا إيجاد آلية مختلفة للتعامل معها, وهو ما سيتطرق له البحث.

3- طرائق البحث (تعاريف ومفاهيم أساسية):

1) الكواترنيون:

تعني كلمة (كواترنيون- Quaternion) المجموعة المكونة من أربعة عناصر. وهو المصطلح المعتمد للأعداد التي تلي العقدية مباشرةً . كما يُقدم الكواترنيون بأكثر من صيغة وهيئة وهو الأمر الذي جعلنا نعتمد على مصطلح الكواترنيون بدلاً عن الرباعيات في بحثنا, كما سنرمز لمجموعة الأعداد الكواترنيونية بالرمز H نسبة إلى مكتشفها هاملتون. ويُعرّف الكواترنيون بالشكل:

$$H=\left\{q=a+bi+cj+dk \;\; ;a,b,c,d\in R\right\}$$

حيث $i^2=j^2=k^2=-1$ و

$$\begin{aligned} jk&=-kj=i\\ ki&=-ik=j\\ ij&=-ji=k \end{aligned}$$

ويمكننا أيضاً أن نقدم الكواترنيون كزوج من الأعداد العقدية, كالتالي:

$$H=\{\gamma_1+\gamma_2 j \;\; ; \;\; \gamma_1,\gamma_2\in C\}$$

حيث من أجل $\gamma_1=a+bi \;,\; \gamma_2=c+di \;\; ;a,b,c,d\in R$ يكون:

$$q = \gamma_1 + \gamma_2 j$$
$$q = (a+bi)+(c+di)j$$
$$q = a+bi+cj+dk \;; ij = k$$

كما نعرف مرافق الكواترنيون $q = a+bi+cj+dk$ بالشكل: $\bar{q} = a-bi-cj-dk$ ونظيمه بالعلاقة: $|q| = \sqrt{q_0^2+q_1^2+q_2^2+q_3^2}$. أما مقلوبه فهو $q^{-1} = \dfrac{\bar{q}}{|q|^2}$. وللاطلاع على المزيد من بنية الكواترنيون وصيغه المختلفة وخواصه, يُمكن العودة للمراجع [1−2−3− 4−14−18].

2) التابع الكواترنيوني

نقول عن تابع ما f إنه تابع كواترنيوني إذا كان معرف على H أو أي مجموعة جزئية منها ويأخذ قيمه من H .

3) الشرائح – Slices

ليكن Ω نطاق في H بحيث يتقاطع مع المحور الحقيقي. ندعو Ω بنطاق **شريحة** إذا كان من أجل أي $I \in S$, مقصورها Ω_I مع المستوي العقدي L_I هو نطاق في L_I .

4- النتائج ومناقشتها:

<u>قابلية الاشتقاق في H</u>:

تكمن إحدى نقاط البداية الأكثر منطقية فيما يتعلق بنظرية التوابع النظامية هو الاشتقاق. وتقود دراسة قابلية الاشتقاق لتابع إلى دراسة نهاية نسبة. فمن أجل تابع $f : C \to C$, نقول عن f إنه اشتقاقي إذا كانت النهاية $\lim_{h\to 0} h^{-1}[f(x+h)-f(x)] \;; h \in C$ موجودة , ومن كون عملية الضرب تبديلية في C, فالنهاية السابقة تكافئ النهاية $\lim_{h\to 0}[f(x+h)-f(x)]h^{-1} \;; h \in C$. ولكن ماذا لو كان $h \in H$ والتابع $f : H \to H$ ؟

كما نعلم إن عملية الضرب في H غير تبديلية, فكيف لنا أن نعرف قابلية اشتقاق تابع بمتغير من H ؟ هذا يقودنا بشكلٍ منطقي إلى أن نعرف قابلية الاشتقاق بالاتجاهين (من اليمين ومن اليسار).

تعريف (1): ليكن لدينا التابع $f : H \to H$ بمتغير كواترنيوني عندئذٍ نقول إن التابع **(اشتقاقي من اليسار)** إذا كانت النهاية التالية $\lim\limits_{h\to 0} h^{-1}[f(q+h)-f(q)] \; ; h\in H$ موجودة

ونرمز لهذه النهاية عندئذٍ بـ $\dfrac{\partial f_\ell}{\partial q}$ أو f'_ℓ . وبشكلٍ مشابه نعرف التابع على أنه **(اشتقاقي من اليمين)** إذا كانت النهاية التالية $\lim\limits_{h\to 0}[f(q+h)-f(q)]h^{-1} \; ; h\in H$ موجودة. ونرمز لهذه النهاية عندئذٍ بـ $\dfrac{\partial f_r}{\partial q}$ أو f'_r .

يبدو أن التعريف السابق حل مشكلة عدم التبادلية في H بأن نقدم تعريف التابع الاشتقاقي دوماً إلى تابع اشتقاقي من اليمين وتابع اشتقاقي من اليسار, وبالتالي سيكون علينا دوماً أن نكرر الدراسة لتطوير أي مفهوم من مفاهيم التحليل العقدي إلى التحليل الكواترنيوني مرتين , وهذا لا يبدو مشجعاً. لذلك بقي الكواترنيون مهملاً لفترة طويلة منذ اكتشافه, وانحصرت دراسته على البنى الجبرية له دون الخوض في دراسته تحليلياً.

فمن أجل التابع $f(q)=q^2$ وبافتراض أن الضرب من اليسار نجد إن :

$$f(q+h)=(q+h)^2=(q+h)(q+h)=q(q+h)+h(q+h)=q^2+qh+hq+h^2$$

ومنه يكون:

$$h^{-1}[f(q+h)-f(q)]=h^{-1}(q^2+qh+hq+h^2-q^2)=h^{-1}(qh+hq+h^2)=h^{-1}qh+q+h$$

وبسبب الخاصة غير التبديلية في الضرب لا يمكن تبسيط الناتج أكثر من ذلك, مما يجعل النهاية $\lim\limits_{h\to 0} h^{-1}[f(q+h)-f(q)] \; ; h\in H$ غير موجودة. وبشكلٍ مشابه أيضاً

نتوصل إلى أن النهاية $\lim_{h\to 0}[f(q+h)-f(q)]h^{-1}\ ;h\in H$ غير موجودة في حال افترضنا أن الضرب من اليمين . وبذلك نجد أن مفهوم الاشتقاق لتابع كواترنيوني لا يمكن أن نعامله كتابع بمتغير عقدي أمام اعتمادنا على مفهوم اشتقاقية التابع على وجود نهاية النسبة .فالمبرهنة التالية تعطينا صيغة التوابع الكواترنيونية الاشتقاقية وفقاً لتعريف نهاية النسبة.

مبرهنة(1) [13]: بفرض لدينا التابع الكواترنيوني f المعرف والاشتقاقي من اليسار ضمن المجموعة $U\subset H$ المفتوحة والمترابطة, عندئذٍ يكون للتابع الكواترنيوني f في U الشكل التالي : $f(q)=a+qb$ وذلك من أجل بعض $a,b\in H$.

وبذلك نجد أن التابع الكواترنيوني لكي يكون اشتقاقياً يجب أن يكون تابع تآلفياً , وهذا ما يُقيد الدراسة التحليلية للكواترنيون .وبتغيير أسلوب دراسة قابلية الاشتقاق إلى الاعتماد على قابلية نشر التابع وفق سلسلة تايلور في جوار نقطة ما ربما يساعد في دراسة تحليلية التابع الكواترنيوني. فكما نعلم , نقول عن التابع $f:C\to C$ إنه تحليلي على منطقة $U\subset C$ إذا كان بالإمكان أن نكتب التابع f من أجل أي $z_0\in U$ على شكل سلسلة قوى $\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n$, وهذه السلسلة متقاربة . باتباع نهج مشابه فيما يتعلق بالتوابع الكواترنيونية , فمن أجل $q=t+ix+jy+kz$ متغير كواترنيوني عشوائي, يمكننا

أن نعبر عن المركبات t,x,y,z بدلالة q كالتالي [16]:

$$t=\frac{1}{4}(q-iqi-jqj-kqk) \qquad x=\frac{1}{4i}(q-iqi+jqj+kqk)$$

$$y=\frac{1}{4j}(q+iqi-jqj+kqk) \qquad z=\frac{1}{4k}(q+iqi+jqj-kqk)$$

المعادلات السابقة تعني أن كل كثير حدود حقيقي $p(t,x,y,z):R^4 \to R^4$ يمثل كثير حدود كواترنيوني بدلالة المتغير q. مما يعني أنه لا يمكن الحصول على بُنية إضافية فيما يتعلق بتحليل التوابع ذات القيمة الكواترنيونية عن طريق التحقق في سلسلة قوى كواترنيونية , وهذا يختلف في حالة التوابع ذات القيمة العقدية بمتغير عقدي , على وجه الخصوص كثير الحدود $P(x,y):C \to C$ والذي يتطلب وجود كل من $\bar{z},z$, كون $\bar{z},z$ تُعتبر توابع خطية مستقلة بدلالة y,x [16] . ومنه نستنتج أن تقديم مفهوم قابلية الاشتقاق عن طريق نهاية النسبة أو سلسلة القوى لا يمكن تطبيقها عل التوابع بمتغيرات كواترنيونية للحصول على تعميم ناجح للتحليل العقدي . وهذا ما يتطلب اتباع مستوى جديد في التعامل مع H يختلف عمّا هو R في أو في C .

<u>الانتظام في H</u>:

المحاولة الأولى الناجحة للحصول على أسلوب تحليلي يختلف عن الذي تم تقديمه سابقاً جاءت في عام 1935على يد العالم الرياضي السويسري (رودولف فويتر Rudolph – Fueter) . حيث قدّم ما أسماه بالتوابع (النظامية) عن طريق تعميم معادلات كوشي

ريمان , وهذا ما جعل تعريف فويتر للانتظام مرغوباً به, ونتيجةً لذلك تم تحديد العديد من التعريفات البديلة الأخرى للانتظام المقترحة في العقود التي تلت ذلك, أشهرها كان لـ (كولن – Cullen).

وقبل البدء بتعريف الانتظام لابد من تقديم عدة رموز . من أجل $q = t + ix + jy + kz$ متغير كواترنيوني عشوائي نُعرف المُؤثرات التالية:

مؤثر كوشي ريمان فويتر الأيسر المرافق: $\bar{\partial}_\ell = \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial t} + i\frac{\partial}{\partial x} + j\frac{\partial}{\partial y} + k\frac{\partial}{\partial z})$

مؤثر كوشي ريمان فويتر الأيمن المرافق: $\bar{\partial}_r = \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}i + \frac{\partial}{\partial y}j + \frac{\partial}{\partial z}k)$

كما نعرف أيضاً مُؤثرين آخرَين مشابهين وهما:

مؤثر كوشي ريمان فويتر الأيسر: $\partial_\ell = \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial t} - i\frac{\partial}{\partial x} - j\frac{\partial}{\partial y} - k\frac{\partial}{\partial z})$

مؤثر كوشي ريمان فويتر الأيمن: $\partial_r = \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}i - \frac{\partial}{\partial y}j - \frac{\partial}{\partial z}k)$

والهدف من ذلك هو إيجاد تعميم لمؤثرات كوشي ريمان:

$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y})$ و $\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y})$ والمعرفين في التحليل العقدي.

وبالاعتماد على المؤثرات $\partial_\ell, \bar{\partial}_\ell, \bar{\partial}_r, \partial_r$ يمكننا استنتاج المؤثر التقليدي Δ (مؤثر لابلاس) والمعرف بالشكل[8] :

$$\Delta f = \frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\right) = \frac{1}{4}\partial_r \bar{\partial}_r f = \frac{1}{4}\partial_\ell \bar{\partial}_\ell f$$

سعى كولن إلى تبسيط تعريفات انتظام فويتر حيث تجاوز التمييز بين المؤثر اليساري واليميني لتبسيط تحليل انتظام فويتر وقد نجح في ذلك, فقدم كولن مؤثر اشتقاقي عرّفه بالعلاقة : $\partial_c = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\operatorname{Im}(q)}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)$

والذي سندعوه بمؤثر كولن التفاضلي, حيث $\operatorname{Im}(q) = ix + jy + kz$ و $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$.

من خلال المؤثرات السابقة $\bar{\partial}_\ell, \bar{\partial}_r, \partial_\ell, \partial_r, \partial_c, \Delta$ مع ملاحظة إمكانية الاستغناء عن الأمثال $\frac{1}{2}$ أو $\frac{1}{4}$ من تعريفاتها لعدم تأثيرها على دراسة الانتظام سنقدم التعريفات التالية.

تعريف(2): نقول عن التابع $f : H \to H$ إنه **توافقي** إذا حقق الشرط : $\Delta f = 0$

تعريف(3): نقول عن التابع $f : H \to H$ إنه **نظامي من اليسار وفق فويتر** عند $q \in H$ إذا تحقق $\bar{\partial}_\ell f(q) = 0$. ونقول أنه **نظامي من اليمين وفق فويتر** عند $q \in H$ إذا تحقق $f(q)\bar{\partial}_r = 0$.

تعريف(4): نقول عن التابع $f: H \to H$ إنه **نظامي وفق كولن** عند $q \in H$ إذا تحقق الشرط $\partial_c f(q) = 0$.

تعريف(5): من أجل U مجموعة مفتوحة ومحتواة في H وتابع $f: H \to H$. نقول إن f **تابع هولومورفي وفق فويتر** إذا تحقق الشرط: $\overline{\partial}_\ell \Delta f(q) = 0, \ \forall q \in U$. ونقول إنه **هولومورفي وفق كولن** إذا تحقق الشرط: $\partial_c \Delta f(q) = 0, \ \forall q \in U$.

إن التعاريف السابقة المتعلقة بانتظام التوابع والتي تأتي تعميماً لما هو في التحليل العقدي لا تتطابق فيما بينها [7], والمبرهنة التالية توضح العلاقة بين صف التوابع النظامية وفق فويتر والتي نرمز لها بـ$R_F(H)$ وصف التوابع النظامية وفق كولن والتي نرمز لها بـ$R_C(H)$ وصف التوابع الهولومورفية والتي نرمز له بـ$Hol(H)$.

مبرهنة(2): ليكن لدينا التابع $f: H \to H$ ومجموعة صفوف التوابع $R_F(H)$ و $R_C(H)$ و $Hol(H)$, عندئذٍ العلاقة بينهما كالتالي:

$$1 - R_F(H) \subset Hol(H)$$

$$2 - R_C(H) \subset Hol(H)$$

$$3 - R_F(H) \neq R_C(H)$$

الإثبات: لنثبت كلاً على حدا.

$1-$ ليكن f تابع نظامي وفق فويتر فيكون $\overline{\partial}_\ell f = 0$ وبالتالي:

$$\bar{\partial}_\ell \Delta(f) = \bar{\partial}_\ell \partial_\ell \bar{\partial}_\ell f = \bar{\partial}_\ell \partial_\ell (0) = 0$$

وهذا يعني أن f هولومورفي . ومنه $R_F(H) \subset Hol(H)$.

2- ليكن f تابعاً نظامياً وفق كولن فيكون $\partial_c f = 0$ وبالتالي:

$$\partial_c \Delta f(q) = \partial_c[\partial_c^2(f)] = \partial_c^2[\partial_c f] = \partial_c^2(0) = 0$$

وهذا يعني أن f هولومورفي , ومنه $R_C(H) \subset Hol(H)$.

3- ولإثبات عدم المساواة بين $R_F(H)$ و $R_C(H)$, يكفي أن يكون هناك تابع كواترنيوني ينتمي إلى أحدهما دون الآخر, وهذا نجده في التابع المطابق $f(q) = q$. فهو نظامي وفق كولن لكنه ليس نظامي وفق فويتر, ولنبين ذلك.

من أجل $q = t + ix + jy + kz \in H$ لدينا:

$$\bar{\partial}_\ell(q) = (\frac{\partial}{\partial t} + i\frac{\partial}{\partial x} + j\frac{\partial}{\partial y} + k\frac{\partial}{\partial z})(q) = (\frac{\partial}{\partial t} + i\frac{\partial}{\partial x} + j\frac{\partial}{\partial y} + k\frac{\partial}{\partial z})(t + ix + jy + kz)$$

$$= 1 + i(i) + j(i) + k(k) = 1 - 1 - 1 - 1 = -2$$

أما من أجل حساب $\partial_c(q) = \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\mathrm{Im}(q)}{r}\frac{\partial}{\partial r})(q)$, فسنكتب التابع $f(q) = q$ بالصيغة القطبية [16], بالشكل: $f(q) = g(t,r) + h(t,r)(\frac{\mathrm{Im}(q)}{r})$ حيث:

$h(t,r) = r$ و $g(t,r) = t$ و $\frac{\mathrm{Im}(q)}{r}$ و هو متجه وحدة يقع في الكرة التخيلية البحتة ($2-Sphere$)التي نصف قطرها r ويحقق: $\left(\frac{\mathrm{Im}(q)}{r}\right)^2 = -1$ ومنه:

$$\partial_c(q)=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\operatorname{Im}(q)}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)\left(g(t,r)+h(t,r)\frac{\operatorname{Im}(q)}{r}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial t}g(t)+(\frac{\operatorname{Im}(q)}{r})^2\frac{\partial}{\partial r}g(r)\right)=\frac{1}{2}\left(1+(-1)(1)\right)=0$$

وهذا يعني أن التابع المطابق هو تابع نظامي وفق كولن , لكنه ليس بتابع نظامي وفق فويتر . وهذا يثبت صحة عدم المساواة بين $R_C(H)$ و $R_F(H)$ ومنه يتم الإثبات. □

الانتظام وفقاً للشرائح:

تمهيدية(1): من أجل أي $q\in H\setminus R$, توجد قيم حقيقية محددة ووحيدة التعيين $x,y\in R\ ;y>0$ و $I\in S$, عندها يكتب q بالشكل: $q=x+yI$.

تعريف(6): ليكن Ω نطاقاً في H . نقول عن التابع الاشتقاقي الحقيقي $f:\Omega\to H$ أنه **نظامي وفق كولن** (للاقتضاب نكتفي بالنظامي) إذا كان من أجل كل $I\in S$, مقصوره f_I على الخط العقدي $L_I=R+RI$ المار بنقطة الأصل والحاوي على 1 و I هولومورفي على $\Omega\cap L_I$.

تعريف(7): ليكن Ω نطاقاً في H **,** وليكن $f:\Omega\to H$ تابعاً اشتقاقياً حقيقياً. من أجل كل $I\in S$ و أي نقطة $q=x+yI$ في Ω وحيث $x,y\in R$, نُعرف **المشتق** $-I$ للتابع f عند q بالعلاقة: $\partial_I f(x+yI)=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}-I\frac{\partial}{\partial y}\right)f_I(x+yI)$.

من خلال دراستنا لكثيرات الحدود وسلاسل القوى في q , نجد أن الحد $q^n a : a\in H$ نظامي وفقاً للتعريف السابق للانتظام, من هنا يكون مجموع توابع نظامية هو تابع نظامي

وبالتالي نستنتج أن سلاسل القوى من الشكل $\sum_{n=0}^{\infty} q^n a_n$ هي توابع نظامية .

سنمنح فضاء التوابع النظامية مع التقارب المنتظم على المجموعات المتراصة نفس الحجج الموجودة في سلاسل القوى العقدية, والمبرهنة التالية تعطينا نظيرة (مبرهنة هابيل) من أجل السلاسل العقدية إلى السلاسل الكواترنيونية.

مبرهنة(3)[12]:(مبرهنةهابيل)

من أجل كل سلاسل القوى $\sum_{n=0}^{\infty} q^n a_n$ يوجد عدد $R\ ;\ 0 \le R \le \infty$, يدعى بنصف قطر تقاربها , من أجله تتقارب السلاسل مطلقاً من أجل كل q يحقق $|q| < R$ وبانتظام من أجل كل q يحقق $|q| \le \rho < R$. علاوةً على ذلك, من أجل $|q| > R$ السلسلة تكون متباعدة.

النتيجة الأولى المهمة لتعريفنا الانتظام هي من أجل التوابع النظامية ، يمكننا تقديم مفهوم المشتق من خلال التعريف التالي.

تعريف(8): ليكن Ω نطاق في H , وليكن $f : \Omega \to H$ تابع نظامي. إن **مشتق كولن** لـ f , $\partial_C f$, يعرف كما يلي: $\partial_C f(q) = \begin{cases} \partial_I f(q) & ; q = x + yI, y \neq 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial x}(x) & ; q = x \in R \end{cases}$.

ملاحظة(1) [12]: ليكن f تابعاً نظامياً, بما أنه من أجل كل $I \in S$ يكون $\bar{\partial}_I(\partial_C(f)) = \partial_C(\bar{\partial}_I(f)) = 0$ وبالتالي نتوصل إلى أن مشتق كولن لتابع نظامي هو أيضاً تابع نظامي. ونلاحظ أيضًا أن سلسلة القوى تقبل الاشتقاق حداً حداً وذلك بسبب التقارب المنتظم , ومنه نجد العلاقة التالية:

$$\partial_C f(q)\left(\sum_{n=0}^{\infty} q^n a_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1} n a_n$$

وهذه السلسلة الجديدة تمتلك نصف قطر تقارب مساوٍ لنصف قطر التقارب للسلسلة الأصلية.

لدراسة التوابع النظامية، سنحتاج إلى تمثيل بسيط لمقصور التابع النظامي كزوج من التوابع الهولومورفية. للقيام بذلك سنحتاج إلى التمهيديات التالية:

تمهيدية(2): ليكن $I = iI_1 + jI_2 + kI_3$ و $J = iJ_1 + jJ_2 + kJ_3$ عنصرين من S, وليكن:

$$\langle I, J \rangle = I_1J_2 + I_2J_2 + I_3J_3 \quad \in R$$

الجداء الداخلي الإقليدي لإحداثياتها. وليكن:

$$I \times J = i(I_2J_3 - I_3J_2) + j(I_3J_1 - I_1J_3) + k(I_1J_2 - I_2J_1) \quad \in R.S$$

يمثل الجداء المتجهي . عندئذٍ الجداء الكواترنيوني IJ يُحدّد من خلال الصيغة التالية :

$$IJ = -\langle I, J \rangle + I \times J$$

الإثبات:

نحصل عليه مباشرةً من خلال نشر $I = iI_1 + jI_2 + kI_3$ مع $J = iJ_1 + jJ_2 + kJ_3$ □

نلاحظ من التمهيدية السابقة ، أن حاصل جداء عنصرين متعامدين من S هو عنصر ثالث يعامدهما ويقع في S.سنستخدم هذه الحقيقة البسيطة لبناء قواعد متعامدة في S والتي سنقدمها بالتمهيدية التالية.

تمهيدية(3)[7]: ليكن I و J عنصرين متعامدين من S, وليكن $K = IJ$. عندئذٍ:

1- $K = IJ = -JI$ هو عنصر من عناصر S

2- K يُعامد كل من I و J

3- $JK = I = -KJ$ و $KI = J = -IK$.

بالرغم من بساطة التمهيدية(3) وسهولة إثباتها. إلّا أنها هامة كونها تُظهر لنا إمكانية استخدام I و J و K كقاعدة لـ S , علاوة على ذلك , من أجل أي عنصر I من S , يمكننا دائماً بناء مثل هذه القاعدة.

التمهيدية التالية لها أهمية كبيرة في بحثنا وهي التي تفتح لنا أبواب التعميم وإيجاد الكثير من النظائر من التحليل العقدي إلى التحليل الكواترنيوني.

تمهيدية(4):(تمهيدية التقسيم)

ليكن f تابعاً نظامياً على $B = B(0,R)$, عندئذٍ من أجل كل $I \in S$ وكل $J \in S$ ويعامد I , يوجد عندئذٍ تابعان هولومورفيان $F,G : B \cap L_I \to L_I$ يحققان من أجل أي $z = x + yI$ أن:

$$f_I(z) = F(z) + G(z)J$$

الإثبات: ليكن لدينا زوج من المتجهات المتعامدة $I, J \in S$, وليكن العنصر الثالث هو K والذي يُشكل مع I, J القاعدة المتعامدة في S, ولنكتب التابع $f_I(x+yI)$ بالشكل:

$$f = f_0 + If_1 + Jf_2 + Kf_3$$

ومن كون f نظامي, فيكون $(\frac{\partial}{\partial x} + I\frac{\partial}{\partial y}) f_I(x+yI) = 0$, وبالتالي:

$$\frac{\partial f_0}{\partial x} + I\frac{\partial f_1}{\partial x} + J\frac{\partial f_2}{\partial x} + k\frac{\partial f_3}{\partial x} + I\left(\frac{\partial f_0}{\partial y} + I\frac{\partial f_1}{\partial y} + J\frac{\partial f_2}{\partial y} + K\frac{\partial f_3}{\partial y}\right) = 0$$

وبالإستفادة من خصائص الوحدات التخيلية العلاقة السابقة تُكتب بالشكل:

$$\frac{\partial f_0}{\partial x}-\frac{\partial f_1}{\partial y}+I\left(\frac{\partial f_0}{\partial y}+\frac{\partial f_1}{\partial x}\right)+J\left(\frac{\partial f_2}{\partial x}-\frac{\partial f_3}{\partial y}\right)+K\left(\frac{\partial f_3}{\partial x}+\frac{\partial f_2}{\partial y}\right)=0$$

وهذا يؤدي إلى أن التابعين f_0+If_1 و f_2+If_3 يحققان شرطي كوشي ريمان , لذلك فهما تابعين هولومورفيين. وبوضع $F=f_0+If_1$ و $G=f_2+If_3$. فنتوصل إلى أن:

$$f_I(x+yI)=F(x+yI)+G(x+yI)$$

وبذلك يتم إثبات صحة التمهيدية بوضع $z=x+yI$ □

باعتبار F و G تابعان هولومورفيان على المستوي $R+RI$, فمن المعروف أنه يمكن تمثيلهما وفق سلسلة قوى موسعة(غير منتهية) بدلالة المتغير العقدي z , ولكن ماذا عن التابع f الكواترنيوني, هل من الممكن تمثيله وفق سلسلة قوى بالمتغير الكواترنيوني q ؟

المبرهنتين التاليتين تجيبان على السؤال.

مبرهنة(4): ليكن $f:B\to H$ تابعاً نظامياً . عندئذٍ من أجل أي $n\in N$ يكون مشتق كولن له $\partial_C^n f:B\to H$ نظامي , ويحقق :

$$\partial_C^n f(x+yI)=\frac{\partial^n f}{\partial x^n}(x+yI).$$

الإثبات: من تعريف التابع النظامي , يتضح مباشرة أن $\partial_C^n f$ يكون نظامي , ولنثبت من المبرهنة صحة العلاقة $\partial_C^n f(x+yI)=\frac{\partial^n f}{\partial x^n}(x+yI)$ وذلك عن طريق الاستقراء الرياضي

لثبت صحة العلاقة من أجل $n=1$, لدينا :

$$\partial_C f(x+yI)=\frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x}-I\frac{\partial}{\partial y})f(x+yI)=\frac{1}{2}(\frac{\partial f}{\partial x}-I\frac{\partial f}{\partial y})(x+yI)$$

$$=\frac{1}{2}\left((\frac{\partial f}{\partial x})(x+yI)-(I)(\frac{\partial f}{\partial y})(x+yI)\right)=\frac{1}{2}\left((\frac{\partial f}{\partial x})(x+yI)+(\frac{\partial f}{\partial x})(x+yI)\right)$$

$$=\frac{\partial f}{\partial x}(x+yI)$$

ولنفرض صحة العلاقة من أجل n ولنثبت صحتها من أجل $n+1$, لدينا :

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}+I\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial^n f}{\partial x^n}\right)=\frac{\partial^{n+1} f}{\partial x^{n+1}}+I\frac{\partial^{n+1} f}{\partial x^n \partial y}\ =\frac{\partial^n}{\partial x^n}\left(\frac{\partial f}{\partial x}+I\frac{\partial f}{\partial y}\right)=0$$

وهذا يعني $\frac{\partial^{n+1} f}{\partial x^{n+1}}=-I\frac{\partial^{n+1} f}{\partial x^n \partial y}$ وبالتالي:

$$\partial_C^{n+1} f=\partial_C(\partial_C^n f)=\partial_c\left(\frac{\partial^n f}{\partial x^n}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}-I\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial^n f}{\partial x^n}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^{n+1} f}{\partial x^{n+1}}-I\frac{\partial^{n+1} f}{\partial x^n \partial y}\right)\ =\frac{\partial^{n+1} f}{\partial x^{n+1}}$$

ومنه العلاقة صحيحة من أجل $n+1$ فهي صحيحة من أجل كل $n\in N$ □

مبرهنة(5): التابع $f:B(0,R)\to H$ نظامي إذا وفقط إذا كان له تمثيل على هيئة سلسلة موسعة بالشكل:

$$f(q)=\sum_{n=0}^{\infty} q^n \frac{1}{n!}\frac{\partial^n f}{\partial x^n}(0)$$

وكانت تلك السلسلة متقاربة في B . وعلى وجه التحديد من أجل f النظامي يكون عندئذٍ قابلاً للاشتقاق عدداً غير منتهٍ من المرات في B .

الإثبات: من أجل المستوي العقدي L_I و القرص الدائري Δ_I الذي مركزه المبدأ ونصف قطره r حيث $0<r<R$, وبالاعتماد على تمهيدية التقسيم , نجد التمثيل التكاملي لـ f_I ضمن Δ_I. ومن كون كل من F و G توابع هولومورفية ضمن النطاق $B\cap L_I$ من المستوي العقدي L_I مع قِيم في نفس المستوي العقدي L_I , فنحصل من أجل أي $(\lambda \neq z)\in B\cap L_I$ على أن:

$$(\lambda-z)^{-1}F(z)=F(z)(\lambda-z)^{-1} \quad \text{و} \quad (\lambda-z)^{-1}G(z)=G(z)(\lambda-z)^{-1}$$

لذلك من أجل أي z من Δ_I لدينا :

$$f_I(z)=\frac{1}{2\pi\, I}\int_{\partial\Delta_I}\frac{F(\lambda)}{\lambda-z}d\lambda+\left(\frac{1}{2\pi\, I}\int_{\partial\Delta_I}\frac{G(\lambda)}{\lambda-z}d\lambda\right)J$$

يمكن الآن تحويل كل من هذين التكاملين إلى سلسلة قوى كما هو معروف في التحليل العقدي التقليدي. فمن أجل التكامل الأول من العلاقة السابقة (بشكل مشابه للتكامل الثاني) ومن أجل $z\in\Delta_I$, لدينا:

$$\int_{\partial\Delta_I}\frac{F(\lambda)}{\lambda-z}d\lambda=\int_{\partial\Delta_I}\frac{1}{1-\frac{z}{\lambda}}\frac{F(\lambda)}{\lambda}d\lambda=\int_{\partial\Delta_I}\sum_{n\geq 0}(\frac{z}{\lambda})^n\frac{F(\lambda)}{\lambda}d\lambda=\sum_{n\geq 0}z^n\left(\int_{\partial\Delta_I}\frac{F(\lambda)}{\lambda^{n+1}}d\lambda\right)$$

وبالتالي نستنتج أن:

$$f_I(z)=\sum_{n\geq 0}z^n\frac{1}{n!}\frac{\partial^n F}{\partial z^n}(0)+\sum_{n\geq 0}z^n\frac{1}{n!}\frac{\partial^n G}{\partial z^n}(0)\; J$$

$$=\sum_{n\geq 0}z^n\frac{1}{n!}\left(\frac{\partial^n(F+GJ)}{\partial z^n}(0)\right)=\sum_{n\geq 0}z^n\frac{1}{n!}\left(\frac{\partial^n f}{\partial z^n}(0)\right)$$

و بالاستفادة من المبرهنة السابقة, تصبح المعادلة السابقة بالشكل:

$$f_I(z)=\sum_{n\geq 0} z^n \frac{1}{n!}\left(\frac{\partial^n f}{\partial z^n}(0)\right)=\sum_{n\geq 0} z^n \frac{1}{n!}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}-I\frac{\partial}{\partial y}\right)\right)^n f(0)=\sum_{n\geq 0} z^n \frac{1}{n!}\frac{\partial^n f}{\partial x^n}(0)$$

وهذا يبين على أن $f_I(z)$ له تمثيل وفق سلسلة قوى بدلالة z^n مع الأمثال $a_n=\frac{1}{n!}\frac{\partial^n f}{\partial x^n}(0)$

والتي لا تتعلق باختيار I , وبالتالي يكون التمثيل صحيحاً من أجل أي $I\in S$. □

نتيجة(1): ليكن $f:B(0,R)\to H$ تابع نظامي , إذا وُجد $I\in S$ يحقق $f(L_I)\subseteq L_I$, عندئذٍ سلسلة القوى لـ f : $f(q)=\sum_{n=0}^{\infty} q^n \frac{1}{n!}\frac{\partial^n f}{\partial x^n}(0)$, جميع معاملاتها تقع في L_I .

الإثبات: من أجل $I\in S$ وفرضاً $f(L_I)\subseteq L_I$, عندئذٍ من أجل أي عدد حقيقي x لدينا:

$f(x)=f_I(x)\in L_I$, لذلك $\frac{\partial^n f}{\partial x^n}(x)\in L_I$ من أجل أي $n\in N$ و $x\in R$. □

مبرهنة(6):(مبدأ المطابقة)

ليكن f,g تابعين نظاميين على نطاق شريحة Ω. إذا كان من أجل بعض $I\in S$, كل من f و g متطابقين على مجموعة جزئية من Ω_I, ويمتلكان نقطة تراكم في Ω_I, عندئذٍ $f=g$ في Ω .

الإثبات: المقصورات f_I,g_I هي توابع هولومورفية. وحسب الفرض فإن كل من f_I و g_I يجب أن يتطابقا في Ω_I. على وجه التحديد , يجب أن يتطابق f مع g في $\Omega\cap R$. من أجل جميع $K\in S$, التقاطع $\Omega\cap R$ هو مجموعة جزئية من Ω_K والذي يمتلك نقطة تراكم في Ω_K. لهذا $f_K=g_K$ في Ω_K من أجل جميع $K\in S$, ومن نستنتج أن $f=g$ في $\Omega\bigcup_{K\in S}\Omega_k$. □

نقدم الآن إحدى خواص التوابع النظامية والتي تسمح بتحديد النظائر الكواترنيونية على

نطاقات الهولومورفية. فخاصية القوى الكواترنيونية هي نتيجة مباشرة لنظرية ذات الحدين للحالة العقدية.

ملاحظة(2): لكل $x, y \in R$, توجد متتاليات $\{\alpha_n\}_{n\in N}, \{\beta_n\}_{n\in N} \subset R$ تُحقق من أجل جميع $I \in S$ أن: $(x + yI)^n = \alpha_n + \beta_n I$

نتيجة لذلك , من أجل التابع النظامي $f(q) = \sum_{n\in N} q^n a_n$ يصبح لدينا:

$$f(x + yI) = \sum_{n\in N} \alpha_n a_n + I \sum_{n\in N} \beta_n a_n$$

ولتلك الصيغة معنى هندسي . فمقصور التابع f على الكرة $x + yS = \{x + yI \ ; \ I \in S\}$ هو تابع تآلفي بالنسبة للوحدة التخيلية I, من هنا يوجد $b, c \in H$ بحيث :

$$f(x + yI) = b + Ic \quad ; \forall I \in S$$

لكن هذا لا ينطبق فقط على سلاسل القوى ، بل على جميع التوابع النظامية على نطاقات الشرائح التي لها الخاصية التالية والتي سنقدمها في التعريف التالي.

تعريف(9): نقول عن المجموعة $T \subseteq H$ أنها **متماثلة محورياً** إذا كان من أجل جميع النقاط $x + yI \in T$ حيث $x, y \in R$ و $I \in S$, المجموعة T تحوي كامل الكرة $x + yS$.

في حال عدم الالتباس نكتفي بأن ندعوها بالمُتماثلة . والحالة الأكثر عمومية للتمثيل التآلفي نقدمها من خلال المبرهنة التالية:

مبرهنة(7)(التمثيل التآلفي):

ليكن f تابعاً نظامياً على نطاق الشريحة المتماثلة Ω وليكن $x + yS \subset \Omega$. من أجل جميع $I, J, K \in S$ بحيث $J \neq K$ لدينا :

$$f(x+yI)=(J-K)^{-1}\left[Jf(x+yJ)-Kf(x+yK)\right]+I(J-K)^{-1}\left[f(x+yJ)-f(x+yK)\right]$$

حيث الكواترنيون $b=(J-K)^{-1}\left[Jf(x+yJ)-Kf(x+yK)\right]$

و $c=(J-K)^{-1}\left[f(x+yJ)-f(x+yK)\right]$

لا يتعلقان بـ J و K بل فقط بـ xو y .

الإثبات: ليكن لدينا $J,K\in S$ بحيث $J\neq K$, والمجموعة :

$$\varphi(x+yI)=(J-K)^{-1}\left[Jf(x+yJ)-Kf(x+yK)\right]+I(J-K)^{-1}\left[f(x+yJ)-f(x+yK)\right]$$
$$=\left[(J-K)^{-1}J+I(J-K)^{-1}\right]f(x+yJ)-\left[(J-K)^{-1}K+I(J-K)^{-1}\right]f(x+yK)$$

من أجل جميع $I\in S$ و $x,y\in R$ بحيث $x+yS\subset\Omega$. وبإعادة حساب الصياغة السابقة بوضع $y=0$ يتبين لنا من أجل جميع $x\in\Omega\cap R$ أن $\varphi(x)=f(x)$.إذا أثبتنا أن φ نظامي في Ω , نستنتج عندئذٍ من مبدأ المطابقة أن $\varphi\equiv f$. ولنثبت الآن أن φ تابع نظامي.

$$\frac{\partial\varphi(x+yI)}{\partial x}=\left[(J-K)^{-1}J+I(J-K)^{-1}\right]\frac{\partial f(x+yJ)}{\partial x}-\left[(J-K)^{-1}K+I(J-K)^{-1}\right]\frac{\partial f(x+yK)}{\partial x}$$

و

$$I\frac{\partial\varphi(x+yI)}{\partial y}=\left[I(J-K)^{-1}J-(J-K)^{-1}\right]\frac{\partial f(x+yJ)}{\partial y}-\left[I(J-K)^{-1}K-(J-K)^{-1}\right]\frac{\partial f(x+yK)}{\partial y}$$
$$=-\left[I(J-K)^{-1}+(J-K)^{-1}J\right]\frac{\partial f(x+yJ)}{\partial x}+\left[I(J-K)^{-1}+(J-K)^{-1}K\right]\frac{\partial f(x+yK)}{\partial x}$$

ومنه: $$\frac{\partial\varphi(x+yI)}{\partial x}+I\frac{\partial\varphi(x+yI)}{\partial y}=0$$

وبالتالي التابع φ نظامي . وبسبب عشوائية اختيار كل من $J,K\in S$ فالتمثيل التآلفي مستقل عن J و K ولا يتعلق بهما. وبذلك يتم الإثبات. □

ونتيجة للمبرهنة السابقة نتوصل إلى علاقات ذات أهمية في المواضيع القادمة نقدمها في النتيجتين التاليتين:

نتيجة (2) [12]: ليكن f تابع نظامي على نطاق الشريحة المتماثلة Ω و ليكن $x+yS\subset\Omega$. من أجل جميع $I,J\in S$ لدينا:

$$f(x+yJ)=\frac{1-JI}{2}f(x+yI)+\frac{1+JI}{2}f(x-yI)$$

$$=\frac{1}{2}\left[f(x+yI)+f(x-yI)\right]+\frac{JI}{2}\left[f(x-yI)-f(x+yI)\right]$$

النتيجة التالية تعطينا صيغة بديلة , تُثبت لنا إن مقصور f عل الكرة $x+yS\subset\Omega$ هو بالفعل تابع تآلفي بالمتغير q.

نتيجة(3):ليكن f تابعاً نظامياً على نطاق الشريحة المتماثلة Ω ولتكن $W=x+yS\subset\Omega$ من أجل أي $q,q_1,q_2\in S$ بحيث $q_1\neq q_2$, لدينا:

$$f(q)=(q_1-q_2)^{-1}\left[\bar{q}_2f(q_2)-\bar{q}_1f(q_1)\right]+q(q_1-q_2)^{-1}\left[f(q_1)-f(q_2)\right]$$

حيث: $A=(q_1-q_2)^{-1}\left[f(q_1)-f(q_2)\right]$ و $B=(q_1-q_2)^{-1}\left[\bar{q}_2f(q_2)-\bar{q}_1f(q_1)\right]$

لا يتعلقان بـ q_1,q_2 بل فقط على W.

الإثبات: إذا كان $q=x+yI$ و $q_1=x+yJ$ و $q_2=x+yK$, عندئذٍ بالاعتماد على مبرهنة التمثيل التآلفي نجد:

$$f(x+yI)=(J-K)^{-1}\left[Jf(x+yJ)-Kf(x+yK)\right]+I(J-K)^{-1}\left[f(x+yJ)-f(x+yK)\right]$$

$$=(q_1-q_2)^{-1}\left[yJf(q_1)-yKf(q_2)\right]+yI(q_1-q_2)^{-1}\left[f(q_1)-f(q_2)\right]$$
$$=(q_1-q_2)^{-1}\left[yJf(q_1)-yKf(q_2)\right]+(x+yI)(q_1-q_2)^{-1}\left[f(q_1)-f(q_2)\right]$$
$$-x(q_1-q_2)^{-1}\left[f(q_1)-f(q_2)\right]$$

$$=(q_1-q_2)^{-1}\left[(-x+yJ)f(q_1)+(x-yK)f(q_2)\right]+q(q_1-q_2)^{-1}\left[f(q_1)-f(q_2)\right]$$

$$=(q_1-q_2)^{-1}\left[\bar{q}_2 f(q_2)-\bar{q}_1 f(q_1)\right]+q(q_1-q_2)^{-1}\left[f(q_1)-f(q_2)\right]$$

العمليات الجبرية على التوابع النظامية:

من أجل f,g تابعان نظاميان على Ω نجد بالاعتماد على تعريف التابع النظامي أن $f+g$ هو أيضاً تابع نظامي على Ω. لكن جداؤهما $f.g$ ليس بالضرورة أن يكون نظامي [12], ومثال على ذلك:

من أجل $a\in H\setminus R\ ,f(q)=qa$ و $g(q)=q$ يكون $f(q).g(q)=qaq$ تابعاً غير نظامي. لذلك سنستخدم عملية الجداء في كثيرات الحدود المتبعة في الجبر غير التبديلي [17], والتعريف التالي يوضح لنا هذا الجداء.

تعريف(10): ليكن $f,g:B(0,R)\to H$ تابعان نظاميان معرفان كما يلي:

$$g(q)=\sum_{n\in N}q^n b_n \quad \text{و} \quad f(q)=\sum_{n\in N}q^n a_n$$

عندئذٍ نُعرّف **الجداء النظامي** بين f و g بأنه تابع نظامي يكتب بالشكل :

$$f*g(q)=\sum_{n\in N}q^n\sum_{k=0}^{n}a_k b_{n-k}$$

وذلك على نفس الكرة $B(0,R)$.

ملاحظة(3)[12]: من أجل $\forall n\in N$, $a_n\in R$ تتحقق المساواة $f*g(q)=f(q).g(q)$, وتُصبح بذلك مجموعة التوابع النظامية على الكرة $B(0,R)$ تُشكّل حلقة مع العمليتان $(*),(+)$, وعملية الضرب هذه يمكن أن تمتد لتشمل جميع التوابع النظامية على نطاقات الشرائح المتماثلة. والمبرهنة التالية توضح لنا إمكانية تمديد مجموعة التعريف إلى أي نطاق شريحة متماثلة.

مبرهنة(8)[12]: ليكن Ω نطاق شريحة متماثلة, عندئذٍ يتحقق تعريف الجداء النظامي فيها. كما تُشكل مجموعة التوابع النظامية على Ω حلقة غير تبديلية مع العمليتان $(*),(+)$.
التعريف التالي يُقدم تعريفاً آخر للجداء النظامي بالاعتماد على التوابع الهولومورفية.

تعريف(11): ليكن f,g تابعين نظاميين على نطاق شريحة متماثلة Ω, ولنختر $I,J\in S$ بحيث $I\perp J$, ولتكن F,G,H,K توابع هولومورفية من Ω_I إلى L_I , حيث, $f_I=F+GJ$ و $g_I=H+KJ$ نعتبر التابع الهولومورفي المعرف على Ω_I بالشكل:

$$f_I*g_I(z)=\left[F(z)H(z)-G(z)\overline{K(\bar{z})}\right]+\left[F(z)K(z)+G(z)\overline{H(\bar{z})}\right]J$$

إنه نظامي موسّع $ext(f_I*g_I)$ ندعوه بالجداء النظامي أو بـ **الجداء** $-*$ لـ f و g ونرمز لذلك بـ $f*g$.

تعريف(12): التابع النظامي $f:\Omega\to H$ الذي يحقق $\forall I\in S$ $f(\Omega_I)\subseteq L_I$ يدعى بالتابع النظامي **المحافظ للشريحة**.

بالاعتماد على التعريف السابق نقدم المبرهنتين التاليتين.

مبرهنة(9): ليكن f, g تابعين نظاميين على نطاق الشريحة المتماثلة Ω, إذا كان f محافظاً للشريحة , عندئذٍ $f.g$ هو تابع نظامي على Ω و $f * g = f.g$.

الإثبات: من أجل أي $I, J \in S$ بحيث $I \perp J$ ولتكن F, G, H, K توابع هولومورفية من Ω_I إلى L_I , حيث $f_I = F + GJ$ و $g_I = H + KJ$, إذا كان $f(\Omega_I) \subseteq L_I$ عندئذٍ يجب أن ينعدم G , لذلك نكتب:

$$f_I(z)g_I(z) = F(z)H(z) + F(z)k(z)J$$

ومن كون FH و FK تابعان هولومورفيان من Ω_I إلى L_I و $f_I g_I = (fg)_I$ هولومورفي. ولكون I متغير عشوائي من S , نجد بالاعتماد على تمهيدية التقسيم أن $f.g : \Omega \to H$ نظامي. ومن خلال المعادلة السابقة وبتحديد $I \in S$ لدينا:

$$(fg)_I = FH + FKJ = f_I * g_I$$

من هنا fg و $f * g = ext(f_I.g_I)$ تابعان نظاميان على Ω ويتطابقان في Ω_I.
واعتماداً على مبدأ المطابقة يجب إن يتطابقا أيضا في Ω □

لدينا بشكلٍ عام تركيب تابعين نظاميين ليس بالضرورة نظامي, والمبرهنة التالية تعطينا شرط أن يكون تركيب تابعين نظاميين هو تابع نظامي.

مبرهنة(10) [12]: ليكن $f : \Omega \to \Omega' \subseteq H$ و $g : \Omega' \to H$ تابعان نظاميان. إذا كان f تابع محافظ للشريحة , عندئذٍ تركيبهما , أي $f \circ g$ هو تابع نظامي.

التعريف التالي يُقدم لنا عمليتين إضافيتين على التوابع النظامية .

تعريف(13): ليكن $f : B(0,R) \to H$ تابعاً نظامياً , ولتكن $f(q) = \sum_{n\in N} q^n a_n$ سلسلة قوة موسّعة. **المرافق النظامي** لـ f هو تابع نظامي معرف بالشكل **:** $f^c(q) = \sum_{n\in N} q^n \overline{a_n}$ وعلى نفس الكرة $B(0,R)$ نُعرف **تابع التناظر** لـ f بالشكل**:** $f^s = f * f^c = f^c * f$ كذلك يُعرف تابع التناظر f^s بشكل مشابه تماماً بنفس العلاقة إذا كان مُعرف على نطاق شريحة متماثلة Ω.

مما سبق نتوصل إلى مجموعة من الخواص والتي تتعلق بالتعريفات السابقة, نوجزها بالمبرهنة التالية:

مبرهنة(11)[12]: ليكن f, g تابعين نظاميين على نطاق الشريحة المتماثلة Ω, عندئذٍ يتحقق ما يلي:

1- $(f * g)^c = g^c * f^c$

2- $(f * g)^s = f^s . g^s = g^s . f^s$

3- $(f * g)' = f' * g + f * g'$

4- إذا كان f محافظ للشريحة عندئذٍ:

$$f^s(q) = f(q)^2 \quad \forall q \in \Omega \qquad \text{و} \qquad f^c(q) = f(q)$$

وهنا لا بد أن نقدم أحد التعريفات الهامة للتوابع النظامية وهو النظامي المعاكس

تعريف(14): ليكن Ω نطاق شريحة متماثلة و $f : \Omega \to H$ تابع نظامي لا يطابق الصفر, عندئذٍ نُعرف التابع **المقلوب النظامي** له $f^{-*} : \Omega \setminus Z_{f^s} \to H$ بالشكل:

$$f^{-*} = \frac{1}{f^s} f^c$$

يتمتع النظامي المعاكس بعدة خواص, نقدم أهمها في المبرهنة التالية:

مبرهنة(11)[12]: لتكن Ω نطاق شريحة متماثلة و ليكن لدينا التابعين النظاميين $f,g:\Omega\to H$, والمحافظين للشريحة. إذا لم يكن لـ f أصفار في Ω, يتحقق عندئذٍ ما يلي:

1- f^{-*} تابع نظامي على نطاقه

2- $f^{-*}*f=f*f^{-*}=1$

3- من أجل جميع $q\in B\setminus Z_f$ يتحقق : $(f*g)(q)=f(q)g(f(q)^{-1}qf(q))$

و : $f^{-*}(q)=f(f^{c}(q)^{-1}qf^{c}(q))^{-1}$

<u>بعض نظائر نظرية كوشي للتوابع النظامية وفقاً لنظام الشرائح:</u>

تُعمّم على التوابع الكواترنيونية النظامية مبرهنة كوشي من خلال التوابع الهولومورفية . مُعتمدين في ذلك على تمهيدية التقسيم بشكلٍ كبير في إيجاد نظائر مبرهنة كوشي من التحليل العقدي إلى التحليل الكواترنيوني. وللبدئ في ذلك ننطلق من الملاحظة التالية:

ملاحظة(4)[12]: ليكن $\gamma_I:[0,1]\to L_I$ منحني قابل للقياس دُعامته تقع في المستوي L_Iمن أجل بعض $I\in S$, وليكن Γ_I جواراً لـγ_Iفي L_I , ولتكن $f,g:\Gamma_I\to H$ توابع مستمرة . إذا كان $J\perp I\ ;\ J\in S$, عندئذٍ $L_I+L_IJ=H=L_I+JL_I$ و توجد توابع مستمرة $F,G,V,W:\Gamma_I\to L_I$ تُحقق: $f=F+GJ$ و $g=V+JW$ في Γ_I . ونكتب:

$$\int_{\gamma_I} g(s)dsf(s)=\int_{\gamma_I} H(s)dsF(s)+\int_{\gamma_I} V(s)dsG(s)J+J\int_{\gamma_I} W(s)dsF(s)+J\int_{\gamma_I} W(s)dsG(s)J$$

مبرهنة(12): ليكن f تابعاً نظامياً على النطاق Ω. وليكن من أجل $I\in S$ النطاق Ω_I بسيط الاتصال و γ_Iمنحني مغلق قابل للتقويم في Ω_I .عندئذٍ: $\int_{\gamma_I} dsf(s)=0$

الإثبات: لنختار $J \in S$ بحيث $J \perp I$. وبالاعتماد على تمهيدية التقسيم , فإنه توجد توابع هولومورفية $F, G, : \Omega_I \to L_I$, لأجلها يكون $f_I = F + GJ$ وبالتالي:

$$\int_{\gamma_I} dsf(s) = \int_{\gamma_I} dsF(s) + \int_{\gamma_I} dsG(s)J$$

وبالاعتماد على مبرهنة كوشي في التحليل العقدي لدينا: $\int_{\gamma_I} dsF(s) = 0$ و $\int_{\gamma_I} dsG(s) = 0$

وبالتالي يتحقق أن $\int_{\gamma_I} dsf(s) = 0$ □

المبرهنة التالية تُقدم لنا رؤيتها في مبرهنة موريرا.

مبرهنة(13): ليكن Ω نطاقاً في H وليكن $f : \Omega \to H$. إذا كان من أجل $I \in S$ مقصور f على Ω_I مُستمراً ويُحقق : $\int_{\gamma_I} dsf(s) = 0$

من أجل جميع المنحنيات المغلقة القابلة للتقويم $\gamma_I : [0,1] \to L_I$, فيكون عندئذٍ f تابعاً نظامياً في Ω .

الإثبات: ليكن $I, J \in S$ بحيث $J \perp I$, وليكن F, G تابعين على Ω_I يحققان $f_I = F + GJ$ في Ω_I . ومن استمرارية f_I نجد أيضاً أن كل من F و G توابع مستمرة. علاوةً على ذلك, من أجل جميع المنحنيات المغلقة القابلة للقياس $\gamma_I : [0,1] \to L_I$ تتحقق علاقة التكافؤ:

$$\int_{\gamma_I} dsf(s) = 0 \Leftrightarrow \int_{\gamma_I} dsF(s) + \int_{\gamma_I} dsG(s)J = 0$$

لذلك يكون: $\int_{\gamma_I} dsF(s) = 0$ و $\int_{\gamma_I} dsG(s) = 0$

وبالاعتماد على مبرهنة موريرا في التحليل العقدي , تكون كل من F و G توابع هولومورفية. من هنا يكون f_I تابعاً هولومورفياً في Ω_I. وبما أن I كان عشوائياً , نستنتج أن f_I تابع نظامي في Ω. □

قبل البدء بصيغة كوشي التكاملية نقدم التمهيدية التالية:

تمهيدية(5): ليكن f تابعاً نظامياً على نطاق الشريحة المتماثلة Ω, لتكن $I \in S$, وليكن U_I نطاق جوردن محدود في L_I , بحيث $\overline{U_I} \subset \Omega_I$. إذا كان ∂U_I قابلاً للتقويم, عندئذٍ: $f(z) = \frac{1}{2\pi I} \int_{\partial U_I} \frac{ds}{s-z} f(s)$, وذلك من أجل جميع $z \in U_I$.

الإثبات: لنختار $J \in S$ بحيث $J \perp I$. وحسب تمهيدية التقسيم , فإنه توجد توابع هولومورفية $F, G : \Omega_I \to L_I$ تُحقق $f_I = F + GJ$.

وبالاعتماد على صيغة كوشي التكاملية العقدية لدينا:

$$F(z) = \frac{1}{2\pi I} \int_{\partial U_I} \frac{ds}{s-z} F(s) \quad \text{و} \quad G(z) = \frac{1}{2\pi I} \int_{\partial U_I} \frac{ds}{s-z} G(s)$$

وذلك من أجل جميع $z \in U_I$, وهذا يؤدي إلى صحة التمهيدية انطلاقاً من كون $f(z) = F(z) + G(z)J$ □

والآن نُقدم صيغة كوشي التكاملية من خلال المبرهنة التالية.

مبرهنة(14): ليكن f تابعاً نظامياً على نطاق الشريحة المتماثلة Ω. إذا كانت U مجموعة مفتوحة متماثلة ومحدودة وتحقق $\overline{U} \subset \Omega$, وإذا كانت $I \in S$ و ∂U_I هو اجتماع منتهٍ لمنحنيات جوردان القابلة للتقويم, عندئذٍ, من أجل $q \in U$ لدينا :

$$f(q)=\frac{1}{2\pi}\int_{\partial U_I}(s-q)^{-*}\,ds_I\,f(s)$$

حيث $ds_I=-Ids$ و $(s-q)^{-*}$ يُرمز للمقلوب النظامي لـ $f(q)=s-q$ ويعطى بالعلاقة :

$$(s-q)^{-*}=(|s|^2-q2\operatorname{Re}(s)+q^2)^{-1}(\bar{s}-q)$$

الاثبات: بالاعتماد على ( ), إذا كان $q=x+yJ$ و $z=x+yI$, عندئذٍ :

$$f(q)=\frac{1}{2}\left[f(z)+f(\bar{z})\right]+\frac{JI}{2}\left[f(\bar{z})-f(z)\right]$$

ومن كون U مجموعة متماثلة تحوي q , فإن شريحتها U_I تحوي على كل من z و $\bar{z}$. وبتطبيق مبرهنة كوشي على كل مُركب متصل من U_I لا يحوي z وبالاعتماد على التمهيدية(5), نجد أن :

$$f(z)=\frac{1}{2\pi}\int_{\partial U_I}\frac{1}{s-z}\,ds_I\,f(s)$$

وبشكل مشابه أيضا لدينا:

$$f(\bar{z})=\frac{1}{2\pi}\int_{\partial U_I}\frac{1}{s-\bar{z}}\,ds_I\,f(s)$$

ومن ثُمّ نجد:

$$f(q)=\frac{1}{2\pi}\int_{\partial U_I}\left\{\frac{1}{2}\left[\frac{1}{s-z}+\frac{1}{s-\bar{z}}\right]+\frac{JI}{2}\left[\frac{1}{s-\bar{z}}-\frac{1}{s-z}\right]\right\}ds_I\,f(s)$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{\partial U_I}(s-q)^{-*}\,ds_I\,f(s)$$

آخذين بعين الاعتبار أن:

$$(s-q)^{-*}=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{s-z}+\frac{1}{s-\bar{z}}\right]+\frac{JI}{2}\left[\frac{1}{s-\bar{z}}-\frac{1}{s-z}\right]$$

وذلك بالاستفادة من النتيجة (2). □

كما في التحليل العقدي , فإن صيغ كوشي تسمح بحساب شريحة المشتقات للتوابع النظامية في التحليل الكواترنيوني. وهذا نجد في التمهيدية والمبرهنة التاليتين:

تمهيدية(6): ليكن f تابعاً نظامياً على نطاق الشريحة المتماثلة Ω, لتكن $I \in S$, وليكن U_I نطاق جوردن محدود في L_I , بحيث $\overline{U_I} \subset \Omega_I$. إذا كان ∂U_I قابلاً للتقويم, عندئذٍ:

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi\ I} \int_{\partial U_I} \frac{ds}{(s-z)^{n+1}} f(s)$$

وذلك من أجل جميع $z \in U_I$ و كل $n \in N$.

الإثبات : لنختار $J \in S$ بحيث $J \perp I$, وليكن F, G تابعان هولومورفيان يحققان $f_I = F + GJ$. ومن حقيقة أن:

$$f^{(n)}(z) = \frac{\partial^n F}{\partial z^n}(z) + \frac{\partial^n G}{\partial z^n}(z) J$$

حيث:

$$\frac{\partial^n F}{\partial z^n}(z) = \frac{n!}{2\pi\ I} \int_{\partial U_I} \frac{ds}{(s-z)^{n+1}} F(s)$$

و

$$\frac{\partial^n G}{\partial z^n}(z) = \frac{n!}{2\pi\ I} \int_{\partial U_I} \frac{ds}{(s-z)^{n+1}} G(s)$$

نجد أن:

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi\ I} \int_{\partial U_I} \frac{ds}{(s-z)^{n+1}} F(s) + \left(\frac{n!}{2\pi\ I} \int_{\partial U_I} \frac{ds}{(s-z)^{n+1}} G(s) \right) J$$

$$= \frac{n!}{2\pi\ I} \int_{\partial U_I} \frac{ds}{(s-z)^{n+1}} (F(s) + G(s)) J$$

$$=\frac{n!}{2\pi\ I}\int_{\partial U_I}\frac{ds}{(s-z)^{n+1}}\ f(s) \qquad \square$$

مبرهنة(15): ليكن f تابعاً نظامياً على نطاق شريحة متماثلة Ω. إذا كانت U مجموعة مفتوحة متماثلة ومحدودة تُحقق $\overline{U}\subset\Omega$, وإذا كان $I\in S$, و ∂U_I اجتماع منتهٍ لمنحنيات جوردن المنفصلة القابلة للتقويم, عندئذٍ , من أجل $q\in U$ لدينا :

$$f^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi\ I}\int_{\partial U_I}(s-q)^{*(-n-1)}\ ds_I\ f(s)$$

حيث $ds_I=-Ids$ و $(s-q)^{*(-n-1)}$ يدل عل المقلوب النظامي لـ $(s-q)^{*(n+1)}$,
والذي هو: $(s-q)^{*(-n-1)}=(|s|^2-q2\operatorname{Re}(s)+q^2)^{-n-1}(\bar{s}-q)^{*(n+1)}$

الإثبات: ليكن $q=x+yJ$ و $z=x+yI$, عندئذٍ بالاعتماد على النتيجة (2), لدينا:

$$f^{(n)}(q)=\frac{1-JI}{2}\ f^{(n)}(z)+\frac{1+JI}{2}\ f^{(n)}(\bar{z})$$

و

$$(s-q)^{*(-n-1)}=\frac{1-JI}{2}\frac{1}{(s-z)^{n+1}}+\frac{1+JI}{2}\frac{1}{(s-\bar{z})^{n+1}}$$

وبالتالي نجد:

$$f^{(n)}(q)=\frac{1-JI}{2}\frac{n!}{2\pi I}\int_{\partial U_I}\frac{ds}{(s-z)^{n+1}}\ f(s)+\frac{1+JI}{2}\frac{n!}{2\pi I}\int_{\partial U_I}\frac{ds}{(s-\bar{z})^{n+1}}f(s)$$

$$=\frac{1-JI}{2}\frac{n!}{2\pi}\int_{\partial U_I}\frac{-Ids}{(s-z)^{n+1}}\ f(s)+\frac{1+JI}{2}\frac{n!}{2\pi}\int_{\partial U_I}\frac{-Ids}{(s-\bar{z})^{n+1}}f(s)$$

$$=\frac{n!}{2\pi}\left[\int_{\partial U_I}\frac{1-JI}{2}\frac{ds_I}{(s-z)^{n+1}}\ f(s)+\frac{1+JI}{2}\int_{\partial U_I}\frac{1+JI}{2}\frac{ds_i}{(s-\bar{z})^{n+1}}f(s)\right]$$

$$=\frac{n!}{2\pi}\left[\int_{\partial U_I}\left(\frac{1-JI}{2}\frac{1}{(s-z)^{n+1}}+\frac{1+JI}{2}\frac{1}{(s-z)^{n+1}}\right)ds_I\ f(s)\right]$$

$$= \frac{n!}{2\pi}\left[\int_{\partial U_I} (s-q)^{*(-n-1)}\, ds_I\, f(s) \right] \qquad \square$$

تسمح لنا النتائج السابقة في تقدير شريحة المشتقات للتابع النظامي , وذلك من خلال المبرهنتين التاليتين:

مبرهنة(16) (تقديرات كوشي):

ليكن $f:\Omega \to H$ تابعاً نظامياً و ليكن $p \in \Omega$. إذا كان $p \in L_I$, عندئذٍ من أجل جميع الأقراص $\Delta_I = \Delta_I(p,R)$,التي نصف قطرها $R>0$ و $\overline{\Delta_I} \subset \Omega_I$ تتحقق العلاقة التالية:

$$\left| f^{(n)}(p) \right| \le \frac{n!}{R^n} \max_{\partial \Delta_I} |f|$$

الإثبات: لدينا:

$$\left| f^{(n)}(p) \right| = \left| \frac{n!}{2\pi I} \int_{\partial \Delta_I} \frac{f(s)}{(s-p)^{n+1}} ds \right| \le \frac{n!}{2\pi} \int_{\partial \Delta_I} \frac{|f(s)|}{|(s-p)|^{n+1}} ds$$

ولكن في $\partial \Delta_I(p,R)$ $\frac{1}{|s-p|^{n+1}} \le \frac{1}{R^{n+1}}$ و $|f(s)| \le \max |f|$ وبالتالي:

$$\frac{n!}{2\pi} \int_{\partial \Delta_i} \frac{|f(s)|}{|(s-p)|^{n+1}} \le \frac{n!}{2\pi} \int_{\partial \Delta_I} \frac{\max|f|}{R^{n+1}} ds = \frac{n!}{2\pi} \frac{\max|f|}{R^{n+1}} (2\pi R) = \frac{n!}{R^n} \max|f|$$

ومنه $\left| f^{(n)}(p) \right| \le \frac{n!}{R^n} \max_{\partial \Delta_I} |f|$. $\square$

كحالة خاصة من تقديرات كوشي نتوصل إلى صحة المبرهنة التالية.

مبرهنة(17)(ليوفيل):

ليكن $f : H \to H$ تابعاً نظامياً على كامل H ومحدود, أي $\left(\exists M > 0; \left|f(q)\right| \le M \;\; \forall q \in H\right)$ عندئذٍ يكون f تابعاً ثابتاً.

الإثبات: منطلقين من المتراجحة $\left|f^{(n)}(p)\right| \le \dfrac{n!}{R^n} \max\limits_{\partial \Delta_I} |f|$ بجعل $R \to \infty$ و بوضع $p = 0$ نتوصل إلى انعدام شريحة المشتقات $f^{(n)}(0)$ من أجل جميع $n \in N$, ومنه نجد لكل $q \in H$ أن :

$$f(q) = \sum_{n \in N} q^n \frac{1}{n!} f^{(n)}(0) = f(0) \qquad \square$$

5- الاستنتاجات والتوصيات:

استنتجنا من البحث صعوبة تعميم مفهوم قابلية الإشتقاق وفق فويتر على التوابع. كما استنتجنا وجود اختلاف لمفهوم نظامية التوابع الكواترنيونية والهلومورفية , وقمنا بتجاوز هذا الأمر بالاعتماد على نظام الشرائح وعلى تجزئة التابع الكواترنيوني إلى تابعين عقديين هولومورفيين , وهذا ما ساعد في إيجاد آلية تعميم جيدة وواعدة في دراسة التوابع الكواترنيونية النظامية. كما نوصي بالاعتماد على هذه الآلية في تعميم نظائر أخرى من التحليل العقدي إلى التحليل الكواترنيوني, بالإضافة إلى دراسة وتعميم بعض التحويلات الشهيرة .

6- المراجع:

[1] Andrew J.Hanson (2006).Visualizing Quaternions. by Elsevier Inc.

[2]J.Pedromorais, S.Georgiev, W.Sprobig (2014).Real quaternionic calculus handbook. By Springer Basel.

[3] J.Voight (2014).The arithmetic of quaternion algebras.

[4] D.Massenger (2014). Quaternion algebras: History, Construction and Application.

[5] Porteous,Ianr (1995). Clifford Algebras and the Classical Group. Cambridge University press.

[6] Dominic Widdows (2006). Quaternion Algebraic Geometry. Doctoral dissertation ,Oxford University.

[7]C. Gentili and D. Struppa (2007). A new theory of regular functions of a quaternionic variable, Advances in Mathematics, Vol. 216," pp 279-301, Elseiver Inc.

[8] T. Sudbury (1979). Quaternionic Analysis. Mathematical **.** Proceedings of the Cambridge Philosophical Society Vol. 85

Cambridge University Press.

[9] C.G. Cullen (1965). An integral theorem for analytic intrinsic functions on quaternions. Duke Mathematical Journal Vol. 32,

pp 139-148.

[10] R. Fueter (1939). Uber vier fachperiodische Funktionen. Montsh. Math. Phys., Vol.48 pp 161-169.

[11] G. Laville, I. Ramadonoff(2005).Holomorphic cliffordian functions. Preprint submitted to the arXiv. Accessed online via : http://arxiv.org/pdf/1203.5619.

[12] C. Gentilli ,C. Stoppato and D. Struppa(2013).Regular Functions of a Quaternionic Variable. Springer Monographs in Mathematics, Berlin-Heidelberg.

[13] Ch. Stover(2014).A Survey of Quaternionic Analysis.

[14] D .Eberly (2010) .Quaternion Algebra and Calculus Accessed online via :http://www.lce.hut.fi/ssarkka/pub/quat.pdf.

[15] R. Sjamaar (2006).Manifolds and Differential Forms. Department of Mathematics, Cornell University, Ithaca, New York.

[16] S. Bedding, ,K. Briggs(1996).Iteration of Quaternion Functions .The American Mathematical Monthly, Vol. 103, No. 8,pp 654 - 664.

[17] T.Y. Lam (1991).A first course in noncommutative rings. Graduate Texts in Mathematics,Vol.131,Springer ,New York.

[18] J. Voight (2021). Quaternion Algebras.Hanover,NH,USA.