دراسة التقارب المطلق لمتسلسلة معاملات فورييه – هاآر المضاعفة في صف معمم W

د. منير مخلوف [1]

ملخص البحث

ندرسُ في هذا البحث التقارب المطلق لمتسلسلة معاملات فورييه – هاآر المضاعفة في صف معمم W، وتحديد الشروط الكافية التي تضمن هذا التقارب .

وقد تمَّ الإثبات على صحة المبرهنة الآتية:

- **مبرهنة (1)** : لتكن الدالة $f(x_1,x_2)$ معرفة على I^2 وتنتمي إلى الصف W ، وبفرض أن $\beta \geq 1$ والمتسلسلات الآتية متقاربة:

$$\sum_{n_1=1}^{\infty}\sum_{n_2=1}^{\infty}\left[\frac{\left[E_{n_1,\infty}^{(2)}(f,H)\right]^2+\left[E_{\infty,n_2}^{(2)}(f,H)\right]^2-\left[E_{n_1,n_2}^{(2)}(f,H)\right]^2}{n_1 n_2}\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\sum_{n_1=1}^{\infty}\frac{E_{n_1,\infty}^{(2)}(f,H)}{\sqrt{n_1}} \quad , \quad \sum_{n_2=1}^{\infty}\frac{E_{\infty,n_2}^{(2)}(f,H)}{\sqrt{n_2}}$$

عندئذ تتقارب المتسلسلة : $\sum_{n_1=0}^{\infty}\sum_{n_2=0}^{\infty}\left|c_{n_1,n_2}(f,H)\right|^{\beta}$

حيث $c_{n_1,n_2}(f,H)$ معاملات فورييه – هاآر للدالة $f(x_1,x_2)$.

[1] ـ أستاذ مساعد في كلية العلوم – جامعة البعث.

Studing absolute Convergence of the Double Series of Fourier - Haar coefficients in the generalized class W

Dr. Moner . M. Makhlouf [1]

Abstract

In this paper we study the absolute convergence of the double Series Of Fourier- Haar coefficients in the generalized class W

The following 0n theorem will be proved:

Theorem (1): *Let* $f(x_1, x_2) \in W$, $\beta \geq 1$, *and convergence of series* :

$$\sum_{n_1=1}^{\infty}\sum_{n_2=1}^{\infty}\left[\frac{\left[E_{n_1,\infty}^{(2)}(f,H)\right]^2+\left[E_{\infty,n_2}^{(2)}(f,H)\right]^2-\left[E_{n_1,n_2}^{(2)}(f,H)\right]^2}{n_1 n_2}\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\sum_{n_1=1}^{\infty}\frac{E_{n_1,\infty}^{(2)}(f,H)}{\sqrt{n_1}} \quad , \quad \sum_{n_2=1}^{\infty}\frac{E_{\infty,n_2}^{(2)}(f,H)}{\sqrt{n_2}}$$

:*Then the series* **:**

$$\sum_{n_1=0}^{\infty}\sum_{n_2=0}^{\infty}\left|c_{n_1,n_2}(f,H)\right|^{\beta}$$

convergence , where : $c_{n_1,n_2}(f,H)$ *the Fourier - Haar coefficeints of function* $f(x_1, x_2)$.

[1]- **De Pr. of Mathematics, Faculty of Science Al- Baath University , Homs, Syria**

1- مقدمة البحث:

بدأ العالم هآر (Haar) في عام1910 م البحث في تقارب متسلسلات هآر للدوال الحقيقية ، وقد أثبت أنَّ هذه المتسلسلات تتقارب بانتظام من دالة مستمرة وتتقارب تقريباً في كل مكان من دالة جموعية على المجال $[0,1]$. (انظر [1] ,[2])

ودرس التقارب المطلق وغير المشروط تقريباً في كل مكان لمتسلسلات فورييه – هاآر، حيث التقارب يتم في مجموعة جزئية E من $[0,1]$ مقيسة لوبيغياً وذات قياس موجب، كما أنّه حدّد العلاقة بين هذين التقاربين. [3]

بعد ذلك اهتمّ بدراسة التقارب غير المشروط لمتسلسلات هاآر بشكل عام في الفضاءات $L^p(0,1)$, $1 \leq p < +\infty$.

كان ب. ل. أوليانوف من السباقين في دراسة تقارب متسلسلات هاآر ومتسلسلة المعاملات في جملة هاآر ضمن مجموعات مقيسة لوبيغياً وذات قياس موجب واهتم أيضاً بدراسة قابلية جمع متسلسلات هاآر وفق طرائق تجميع خطية وخطية نظامية. (انظر [4])

ولقد قام ب. ي. كالوبوف بدراسة تقارب متسلسلات فورييه – هاآر لدوال ثابتة وتحديد الشروط التي تضمن هذا التقارب. (انظر [6] , [7])

ثم عمّم هذه الدراسة ف. غ. كروتوف من خلال دراسة تقارب هذا النوع من المتسلسلات لأجل دالة ما ذات مشتقة مستمرة على $[0,1]$ ربما باستثناء مجموعة عدودة. (انظر [8])

وبعد ذلك عمّم هذه المسألة غ. آ. تشخايدزه بدراسة تقارب وقابلية جمع متسلسلات هاآر وفق طرائق تجميع خطيّة نظامية (مثل: سيزارو وآبل وغيرها) في الفضاء $\mathbb{R}^n \left(n \geq 2 \right)$. (انظر [12])

أثبتَ برنشتاين (C . N . Brenshtain) أنه إذا كانت الدالة $f(x)$ مستمرة ودورية بدور قدره 2π ، فإنه من تقارب المتسلسلات:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{E_n(f)}{\sqrt{n}} \quad , \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\omega\left(f, \frac{1}{n} \right)}{\sqrt{n}}$$

ينتج التقارب المطلق لمتسلسلة معاملات فورييه للدالة $f(x)$.

حيث إن : $E_n(f)$ قيمة أفضل تقريب وسطياً للدالة f بكثيرة حدود درجتها أقل من n أو تساويها ، و $\omega\left(f, \frac{1}{n} \right)$ معامل الاستمرار للدالة f . (انظر [3,2])

لقد أثبت غريغوريان (*Grigorian .M .G*) بأنه لكل $0 < \varepsilon < 1$ توجد مجموعة مقيسة لوبيغياً $E \subset [0,1]$ بحيث يكون : $|E| > 1 - \varepsilon$ ، ولكل دالة مثل: $f(x) \in L^1[0,1]$ يمكن إيجاد دالة أخرى $g(x) \in L^1[0,1]$ تطابق $f(x)$ علـ ى E ومتسلسلة فورييه– هاآر لها متقاربة مطلقاً في الفضاء $L^p[0,1]$, $0 < p < 1$. (انظر [13])

2- هدف البحث:

نقوم في هذا البحث بدراسة التقارب المطلق لمتسلسلات معاملات فورييه – هاآر $(Haar)$ المضاعفة وذلك باستخدام طريقة التقريب بكثيرات حدود هاآر في صف معمم W ، ونحدد الشروط الكافية التي تضمن هذا النوع من التقارب، علماً أن هذه المتسلسلات يمكن أن تختلف من حيث الجوهر عن المتسلسلات المثلثية.

ويمكن ذلك من خلال إثبات صحة المبرهنة الآتية :

- **مبرهنة(1):** لتكن الدالة $f(x_1,x_2)$ معرفة على المربع $I^2 = [0,1] \times [0,1]$ وتنتمي إلى الصف W، وبفرض أن المتسلسلات الآتية متقاربة :

$$\sum_{n_1=1}^{\infty}\sum_{n_2=1}^{\infty}\left[\frac{\left[E_{n_1,\infty}^{(2)}(f,H)\right]^2+\left[E_{\infty,n_2}^{(2)}(f,H)\right]^2-\left[E_{n_1,n_2}^{(2)}(f,H)\right]^2}{n_1 n_2}\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\sum_{n_1=1}^{\infty}\frac{E_{n_1,\infty}^{(2)}(f,H)}{\sqrt{n_1}} \quad , \quad \sum_{n_2=1}^{\infty}\frac{E_{\infty,n_2}^{(2)}(f,H)}{\sqrt{n_2}}$$

عندئذ تتقارب المتسلسلة : $\beta \geq 1$, $\displaystyle\sum_{n_1=1}^{\infty}\sum_{n_2=1}^{\infty}\left|c_{n_1,n_2}(f,H)\right|^{\beta}$

حيث $c_{n_1,n_2}(f,H)$ معاملات فورييه – هاآر للدالة $f(x_1,x_2)$.

لنستعرض الآن بعض المفاهيم الأساسية والتعاريف و الرموز التي نحتاج إليها في هذا البحث :

- **تعريف** (1)[2,3,15]: الفضاء $L_2(I^2)$ هو مجموعة كل الدوال المقيسة والمحدودة $f(x_1, x_2)$ المعرفة على المربع: $I^2 = [0,1] \times [0,1]$ والمحققة للشرط الآتي: $\int_0^1 \int_0^1 |f(x_1, x_2)|^2 dx_1 dx_2 < \infty$.

(وهذا يتحقق بحكم الاستمرار أو الاستمرار تقريباً في كل مكان ، وبالتالي تكون مقيسة حسب ليبيغ على I^2 ومحدودة عليه والتي تعتبر من الشروط الأساسية لوجود تكامل ليبيغ المضاعف) .

- **تعريف** (2): إن جملة الدوال المعرفة على المربع :$I^2 = [0,1] \times [0,1]$ بالشكل: $\{H_{n_1}(x_1) \times H_{n_2}(x_2) : n_\mu = 0,1,2,...., (\mu = 1,2)\}$

تسمى جملة هاآر (Haar) المضاعفة والتي تمثل جملة متعامدة نظامية وتامة. (انظر [5,14 ,15]) ، حيث:

$$H_{n_\mu}(x_\mu) = H_{k_\mu}^{(m_\mu)}(x_\mu) =$$
$$= \begin{cases} 2^{\frac{k_\mu}{2}} & , \quad if \quad x_\mu \in \Delta_{k_\mu+1}^{\left(2^{m_\mu-1}\right)} \\ -2^{\frac{k_\mu}{2}} & , \quad if \quad x_\mu \in \Delta_{k_\mu+1}^{\left(2^{m_\mu}\right)} \\ 0 & , \quad if \quad x_\mu \notin \Delta_{k_\mu}^{-(m_\mu)} \end{cases}$$

إذ إن : $\bar{\Delta}_{k_\mu}^{(m_\mu)} = \left[\frac{m_\mu - 1}{2^{k_\mu}}, \frac{m_\mu}{2^{k_\mu}}\right] \quad , n_\mu = 2^{k_\mu} + m_\mu$

$$1 \leq m_\mu \leq 2^{k_\mu} \;\; ; \mu = 1,2 \; ; \; k_\mu = 0,1,2,\ldots ; \; (m_1 = i \; ; m_2 = j\,)$$

- **تعريف** (3) (انظر[3]): ليكن النشر المعطى بالشكل :

$$\begin{aligned} & a_{0,0}^{(0,0)} H_0^{(0)}(x_1) H_0^{(0)}(x_2) \\ & \quad + \sum_{m_1=0}^{\infty} \sum_{i_1=1}^{2^{m_1}} a_{m_1,0}^{(i_1,0)} H_{m_1}^{(i_1)}(x_1) H_0^{(0)}(x_2) \\ & \quad + \sum_{m_2=0}^{\infty} \sum_{i_2=1}^{2^{m_2}} a_{0,m_2}^{(0,i_2)} H_0^{(0)}(x_1) H_{m_2}^{(i_2)}(x_2) \\ & \quad + \sum_{m_1=0}^{\infty} \sum_{m_2=0}^{\infty} \sum_{i_1=1}^{2^{m_1}} \sum_{i_2=1}^{2^{m_2}} a_{m_1,m_2}^{(i_1,i_2)} H_{m_1}^{(i_1)}(x_1) H_{m_2}^{(i_2)}(x_2) \qquad (1) \end{aligned}$$

حيث إن : $a_{m_1,m_2}^{(i_1,i_2)}$ أعداد حقيقية و $H_{m_\mu}^{(i_\mu)}$, $(\mu = 1,2)$ دوال هاآر.

هذا النشر يسمى نشر هاآر، وإذا احتوى فقط الحدود ذات الدرجات:

$k_2, k_1,$ m_2, m_1 ، حيث : $\left(1 \leq k_2 \leq 2^{m_2} \;\; , 1 \leq k_1 \leq 2^{m_1}\right)$ فإنه يؤول إلى كثيرة الحدود $P_{m_1,m_2}^{(k_1,k_2)}$ التي تسمى كثيرة حدود هاآر .

وتجدر الإشارة إلى أنه عند تغيير المعاملات $a_{m_1,m_2}^{(i_1,i_2)}$ نحصل على نشور مختلفة والذي ينتج عنه أيضاً كثيرات حدود هاآر $P_{m_1,m_2}^{(k_1,k_2)}(x_1, x_2)$ مختلفة .

- **تعريف**(4)(انظر[3,7]): لتكن $f(x_1, x_2) \in L_2(I^2)$ ،وبفرض أن : $n_2\,, n_1$ أي عددين طبيعيين ، عندئذ :

$$S_{n_1,n_2}^{(2)}(f,H) = \inf_{a_{\mu_1,\mu_2}^{(i_1,i_2)}} \left\| f(x_1,x_2) - P_{m_1,m_2}^{(k_1,k_2)}(x_1,x_2) \right\|_{L_2}$$

يسمى أفضل قيمة تقريبية كلية وسطياً للدالة $f(x_1,x_2)$ بكثيرات حدود هاآر حيث: $a_{\mu_1,\mu_2}^{(i_1,i_2)}$ هي معاملات كثيرة الحدود $P_{m_1,m_2}^{(k_1,k_2)}$ والأعداد $k_1,\ k_2,\ m_1,\ m_2$ تؤخذ بحيث يكون : $n_1 = 2^{m_1} + k_1 , n_2 = 2^{m_2} + k_2$.

وبصورة خاصة ، إذا كان :

$$P_{m_1,\infty}^{(k_1)}(x_1,x_2) =$$

$$= a_0^{(0)}(x_2) H_0^{(0)}(x_1) + \sum_{\mu_1=0}^{m_1} \sum_{i_1=0}^{2^{\mu_1}} a_{\mu_1}^{(i_1)}(x_1) H_{\mu_1}^{(i_1)}(x_1) +$$

$$+ \sum_{i_1=0}^{k_1} a_{m_1+1}^{(i_1)}(x_2) H_{m_1+1}^{(i_1)}(x_1)$$

حيث إن المعاملات $a_{\mu_1}^{(i_1)}(x_1)$ تنتمي إلى الفضاء L_2 والعدد k_1 يحقق المتباينة : $1 \le k_1 \le 2^{m_1}$ ، فإننا نسمي القيمة:

$$S_{n_1,\infty}^{(2)}(f,H) = \inf_{a_{\mu_1}^{(i_1)}(x_2)} \left\| f(x_1,x_2) - P_{m_1,\infty}^{(k_1)}(x_1,x_2) \right\|_{L_2}$$

أفضل قيمة تقريبية جزئية وسطياً للدالة $f(x_1,x_2)$ بكثيرات حدود هاآر بالنسبة للمتغير x_1.

- **تعريف**(5) : [2,3,4 ,6] إن الصف Lip_α $(0 < \alpha < 1)$ هو مجموعة كل الدوال $f(x_1,x_2)$ المعرفة على I^2 التي تحقق الشرط:

$$\left\| f(x_1+h, x_2+\lambda) - f(x_1,x_2) \right\|_c = O\left(h^2+\lambda^2\right)^{\frac{\alpha}{2}}$$

وسوف نرمز بـ$C(I^2)$ لفضاء كل الدوال $f(x_1,x_2)$المضاعفة المستمرة على I^2 والمزود بالنظيم:

$$\|f\|_c = \max_{(x_1,x_2)\in I^2} |f(x_1,x_2)|$$

- **تعريف**(6): [7,10] تسمى الدالة الحقيقية : $f:[0,1]\times[0,1]\to\mathbb{R}$ محدودة التغير جزئياً على I^2 إذا وجد ثابت موجب k بحيث أنه لأجل أي تجزئتين مختلفتين :

$$\Delta_1 = \{0 \le x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n \le 1\}$$

$$\Delta_2 = \{0 \le y_0 < y_1 < y_2 < \cdots < y_m \le 1\}$$

يكون:

$$V_1(f)_2 = \sup_{0\le y\le 1} \sup_{\Delta_1} \sum_{j=0}^{n-1} |f(x_i,y) - f(x_{i+1},y)|^2 \le k$$

$$V_2(f)_2 = \sup_{0\le x\le 1} \sup_{\Delta_2} \sum_{j=0}^{m-1} |f(x,y_i) - f(x,y_{j+1})|^2 \le k$$

وسوف نرمز لفضاء كل الدوال المحدودة التغير جزئياً على I^2 بـ $PBV_2(I^2)$.

- **تعريف**(7):[2,3,5] لتكن الدالة $f \in L_2(I^2)$ ، وبفرض أن: $0 < \delta_m < 1$

$(m = 1,2)$. عندئذ المعامل الجزئي المتكامل للاستمرارية البحت والمختلط للدالة $f(x_1,x_2)$ بالنسبة لـx_2,x_1 يعطى بالشكل :

$$\omega_1(f,\delta_1)_2 = \sup_{(x_1,x_2)\in I^2}\{\|f(x_1+u_1,x_2) - f(x_1,x_2)\|_{L_2}\}$$

$$\omega_{2}(f,\delta_2)_2 = \sup_{(x_1,x_2)\in I^2}\{\|f(x_1,x_2+u_2)-f(x_1,x_2)\|_{L_2}\}$$

$$\omega_{1,2}(f,\delta_1,\delta_2)_2 = \sup_{(x_1,x_2)\in I^2}\{\|f(x_1+u_1,x_2+u_2)- f(x_1+u_1,x_2) - f(x_1,x_2+u_2)+f(x_1,x_2)\|_{L_2}\}$$

على الترتيب . حيث : $|u_m| \le \delta_m$, $(m=1,2)$

- **تعريف** (8): إن الصف المعمم W معرف كما يلي :

$$W = \{f(x_1,x_2) : f \in L_2(I^2) \ or \ f \in PBV_2(I^2)\}$$

وسوف نرمز بـ: $E_{m_1,m_2}^{(k_1,k_2)}(f) = E_{n_1,n_2}(f,H)$, $H_{m_\mu}^{(k_\mu)}(x_\mu) = H_{n_\mu}(x_\mu)$

$$E_{\infty,m_2}^{(k_2)}(f) = E_{\infty,n_2}(f,H) \ , \ E_{m_1,\infty}^{(k_1)}(f) = E_{n_1,\infty}(f,H)$$

$$n_\mu = 2^{m_\mu} + k_\mu \ , (m_\mu = 0,1,2,3,\dots; \ 1 \le k_\mu \le 2^{m_\mu}; \mu = 1,2)$$

والتي تمثل على الترتيب دوال هاآر، وقيمة أفضل تقريب كلي وسطياً، وقيمة أفضل تقريب جزئي وسطياً بالنسبة للمتغيرين x_2, x_1 الموافقة للدالة :

$$f(x_1,x_2) \in W(I^2) \ , \ I^2 = [0,1]\times[0,1]$$

مع الأخذ بالحسبان أن:

$$E_{\infty,n_2}(f,H) = \lim_{n_1 \longrightarrow \infty} E_{n_1,n_2}(f,H)$$
$$E_{n_1,\infty}(f,H) = \lim_{n_2 \longrightarrow \infty} E_{n_1,n_2}(f,H)$$

3- **المناقشة والنتائج** : لإثبات المبرهنة (1) نحتاج إلى التمهيدية الآتية :

تمهيدية (1): (انظر [8]) إذا كان: $f \in PBV_2(I^2)$ فإن :

$$\omega_{\mu}(f,\delta)_2 \le \sqrt{3\delta}\; V_{\mu}(f)_2 \quad (\mu = 1,2) \quad ,0 < \delta < 1$$

حيث : $V_{\mu}(f)_2$ هو التغير الجزئي للدالة f بالنسبة للمتغير x_{μ}.

إثبات المبرهنة (1) : إذا كان $f \in W(I^2)$ ، فإننا نميز حالتين :

<u>الحالة الأولى</u>: إذا كان $f \in L_2(I^2)$ ، فإنه حسب مساواة بارسيفال يكون لدينا:

$$\begin{aligned}
&\int_0^1\int_0^1 \left[f(x_1,x_2) - E_{n_1,n_2}(f,H)\right]^2 dx_1 dx_2 \\
&= \sum_{i_1=n_1+1}^{\infty}\sum_{i_2=0}^{n_2} c_{i_1,i_2}^2(f,H) + \sum_{i_1=0}^{n_1}\sum_{i_2=n_2+1}^{\infty} c_{i_1,i_2}^2(f,H) \\
&+ \sum_{i_1=n_1+1}^{\infty}\sum_{i_2=n_2+1}^{\infty} c_{i_1,i_2}^2(f,H) \\
&= \sum_{i_1=n_1+1}^{\infty}\sum_{i_2=0}^{\infty} c_{i_1,i_2}^2(f,H) + \sum_{i_1=0}^{\infty}\sum_{i_2=n_2+1}^{\infty} c_{i_1,i_2}^2(f,H) \\
&- \sum_{i_1=n_1+1}^{\infty}\sum_{i_2=n_2+1}^{\infty} c_{i_1,i_2}^2(f,H) \qquad (1)
\end{aligned}$$

ومن جهة ثانية على اعتبار أنه يمكن إيجاد من بين كثيرات حدود هاآر واحدة على الأقل أفضل تقريب وسطياً لها والتي تمثل مجاميع فورييه – هاآر الجزئية للدالة $f(x_1,x_2)$ فإن:

$$\begin{aligned}
&\left[E_{n_1,n_2}^{(2)}(f,H)\right]^2 = \\
&= \int_0^1\int_0^1 \left[f(x_1,x_2) - S_{n_1,n_2}(f,H)\right]^2 dx_1 dx_2 \qquad (2)
\end{aligned}$$

$$\left[E^{(2)}_{n_1,\infty}(f,H)\right]^2 =$$
$$= \int_0^1\int_0^1 \left[f(x_1,x_2) - S_{n_1,\infty}(f,H)\right]^2 dx_1 dx_2$$

$$\left[E^{(2)}_{\infty,n_2}(f,H)\right]^2 =$$
$$= \int_0^1\int_0^1 \left[f(x_1,x_2) - S_{\infty,n_2}(f,H)\right]^2 dx_1 dx_2 \qquad (3)$$

الآن حسب العلاقة (3) ومساواة بارسيفال نستطيع أن نكتب :

$$\left[E^{(2)}_{n_1,\infty}(f,H)\right]^2 = \sum_{i_1=n_1+1}^{\infty} \sum_{i_2=0}^{\infty} c^2_{i_1,i_2}(f,H)$$
$$\left[E^{(2)}_{\infty,n_2}(f,H)\right]^2 = \sum_{i_1=0}^{\infty} \sum_{i_2=n_2+1}^{\infty} c^2_{i_1,i_2}(f,H) \qquad (4)$$

الآن لو أخذنا بالحسبان العلاقات (2) ,(4) و المتراجحة (1) نحصل على:

$$\sum_{i_1=n_1+1}^{\infty} \sum_{i_2=n_2+1}^{\infty} c^2_{i_1,i_2}(f,H) = \left[E^{(2)}_{n_1,\infty}(f,H)\right]^2 + \left[E^{(2)}_{\infty,n_2}(f,H)\right]^2 -$$
$$-\left[E^{(2)}_{n_1,n_2}(f,H)\right]^2 \qquad (5)$$

لإتمام الإثبات نحتاج إلى تقارب المتسلسلة :

$$\sum_{i_1=0}^{\infty}\sum_{i_2=0}^{\infty}\left|c_{i_1,i_2}(f,H)\right| = \sum_{i_1=0}^{1}\sum_{i_2=0}^{1}\left|c_{i_1,i_2}(f,H)\right| + \sum_{i_1=2}^{\infty}\sum_{i_2=0}^{1}\left|c_{i_1,i_2}(f,H)\right| + \sum_{i_1=0}^{1}\sum_{i_2=2}^{\infty}\left|c_{i_1,i_2}(f,H)\right| + \sum_{i_1=2}^{\infty}\sum_{i_2=2}^{\infty}\left|c_{i_1,i_2}(f,H)\right| \qquad (6)$$

لكن يمكن التحقق من أن:

$$\sum_{i_1=2}^{\infty}\sum_{i_2=2}^{\infty}\left|c_{i_1,i_2}(f,H)\right| = \sum_{i_1=2}^{\infty}\sum_{i_2=2}^{\infty}\sum_{n_1=1}^{i_1-1}\sum_{n_2=1}^{i_2-1}\frac{\left|c_{i_1,i_2}(f,H)\right|}{(i_1-1)(i_2-1)}$$

$$= \sum_{n_1=1}^{\infty}\sum_{n_2=1}^{\infty}\sum_{i_1=n_1+1}^{\infty}\sum_{i_2=n_2+1}^{\infty}\frac{\left|c_{i_1,i_2}(f,H)\right|}{(i_1-1)(i_2-1)}$$

$$\le \sum_{n_1=1}^{\infty}\sum_{n_2=1}^{\infty}\left[\sum_{i_1=n_1+1}^{\infty}\sum_{i_2=n_2+1}^{\infty}\frac{1}{(i_1-1)^2(i_2-1)^2}\right]^{\frac{1}{2}}\cdot\left[\sum_{i_1=n_1+1}^{\infty}\sum_{i_2=n_2+1}^{\infty}c_{i_1,i_2}^2(f,H)\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\le 0(1)\sum_{n_1=1}^{\infty}\sum_{n_2=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n_1n_2}}\left[\sum_{i_1=n_1+1}^{\infty}\sum_{i_2=n_2+1}^{\infty}c_{i_1,i_2}^2(f,H)\right]^{\frac{1}{2}}$$

الآن لو أخذنا بالحسبان الفرض و العلاقة (5) نجد أن :

$$\sum_{i_1=2}^{\infty}\sum_{i_2=2}^{\infty}\left|c_{i_1,i_2}(f,H)\right| \le$$

$$\le 0(1)\sum_{n_1=1}^{\infty}\sum_{n_2=1}^{\infty}\left[\frac{\left[E_{n_1,\infty}^{(2)}(f,H)\right]^2 + \left[E_{\infty,n_2}^{(2)}(f,H)\right]^2 - \left[E_{n_1,n_2}^{(2)}(f,H)\right]^2}{n_1n_2}\right]^{\frac{1}{2}} < \infty \qquad (7)$$

وبمناقشة مماثلة وحسب العلاقة (4) نستطيع أن نكتب :

$$\sum_{i_1=2}^{\infty}\sum_{i_2=0}^{1}\left|c_{i_1,i_2}(f,H)\right| = \sum_{i_1=2}^{\infty}\sum_{i_2=0}^{1}\sum_{n_1=1}^{i_1-1}\frac{\left|c_{i_1,i_2}(f,H)\right|}{i_1-1} = \sum_{n_1=1}^{\infty}\sum_{i_2=0}^{1}\sum_{i_1=n_1+1}^{\infty}\frac{\left|c_{i_1,i_2}(f,H)\right|}{i_1-1}$$

$$\leq 0(1)\sum_{n_1=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n_1}}\left[\sum_{i_1=n_1+1}^{\infty}\sum_{i_2=0}^{\infty}c_{i_1,i_2}^{2}(f,H)\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$= 0(1)\sum_{n_1=1}^{\infty}\frac{E_{n_1,\infty}^{(2)}(f,H)}{\sqrt{n_1}} < \infty \qquad (8)$$

ومن جهة أخرى لدينا:

$$\sum_{i_1=0}^{1}\sum_{i_2=2}^{\infty}\left|c_{i_1,i_2}(f,H)\right| = \sum_{i_2=2}^{\infty}\sum_{i_1=0}^{1}\sum_{n_2=1}^{i_2-1}\frac{\left|c_{i_1,i_2}(f,H)\right|}{i_2-1}$$

$$= \sum_{n_2=1}^{\infty}\sum_{i_1=0}^{1}\sum_{i_2=n_2+1}^{\infty}\frac{\left|c_{i_1,i_2}(f,H)\right|}{i_2-1}$$

$$\leq 0(1)\sum_{n_2=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n_2}}\left[\sum_{i_1=0}^{\infty}\sum_{i_2=n_2+1}^{\infty}c_{i_1,i_2}^{2}(f,H)\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$= 0(1)\sum_{n_2=1}^{\infty}\frac{E_{\infty,n_2}^{(2)}(f,H)}{\sqrt{n_2}} < \infty \qquad (9)$$

ومن هذا كله نحصل على تقارب المتسلسلة :

$$\sum_{n_1=0}^{\infty}\sum_{n_2=0}^{\infty}\left|c_{n_1,n_2}(f,H)\right|$$

وبهذا يكتمل إثبات المبرهنة (1) في هذه الحالة.

<u>الحالة الثانية</u>: نفرض أن $f \in PBV_2(I^2)$, $\beta > 1$: عندئذ يكون:

$$\sum_{n_1=0}^{\infty}\sum_{n_2=0}^{\infty}\left|c_{n_1,n_2}(f,H)\right|^{\beta}<\infty$$

وذلك بملاحظة أن المتسلسلة : $\sum_{n_1=0}^{\infty}\sum_{n_2=0}^{\infty}\left|c_{n_1,n_2}(f,H)\right|^{\beta}$

تكتب بالصورة :

$$\sum_{n_1=0}^{\infty}\sum_{n_2=0}^{\infty}\left|c_{n_1,n_2}(f,H)\right|^{\beta}=\sum_{n_1=0}^{\infty}\left|c_{n_1,0}(f,H)\right|^{\beta}+\sum_{n_2=0}^{\infty}\left|c_{0,n_2}(f,H)\right|^{\beta}+\sum_{n_1=1}^{\infty}\sum_{n_2=1}^{\infty}\left|c_{n_1,n_2}(f,H)\right|^{\beta} \qquad (10)$$

الآن لتكن : $n_1 = 2^{k_1}+i$, $k_1 = 0,1,..$, $1 \le i \le 2^{k_1}$

$n_2 = 2^{k_2}+j$, $k_2 = 0,1,..$, $1 \le j \le 2^{k_2}$

فإنه باستخدام متراجحة هولدر والتمهيدية (1) نجد أن :

$$\sum_{i=1}^{2^{k_1}}\left|c_{2^{k_1}+i,0}\left(f,H\right)\right|^2 =$$

$$= 2^{k_1}\sum_{i=1}^{2^{k_1}}\left|\int_0^1\left(\int_{\frac{2i-2}{2^{k_1+1}}}^{\frac{2i-1}{2^{k_1+1}}}\left[f\left(x_1+\frac{1}{2^{k_1+1}},x_2\right)-f\left(x_1,x_2\right)\right]dx_1\right)dx_2\right|^2 \le$$

$$\le 2^{k_1}\sum_{i=1}^{2^{k_1}}\left[\int_0^1\left(\int_{\frac{2i-2}{2^{k_1+1}}}^{\frac{2i-1}{2^{k_1+1}}}\left|\Delta_{\frac{1}{2^{k_1+1}}}f\left(x_1,x_2\right)_1\right|dx_1\right)dx_2\right]^2$$

$$\le 2^{k_1}\sum_{i=1}^{2^{k_1}}\left[\left(\int_0^1\left(\int_{\frac{2i-2}{2^{k_1+1}}}^{\frac{2i-1}{2^{k_1+1}}}\left|\Delta_{\frac{1}{2^{k_1+1}}}f\left(x_1,x_2\right)_1\right|^2dx_1\right)dx_2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^1\left(\int_{\frac{2i-2}{2^{k_1+1}}}^{\frac{2i-1}{2^{k_1+1}}}1dx_1\right)dx_2\right)^{\frac{1}{2}}\right]^2$$

$$\le\int_0^1\int_0^1\left|\Delta_{\frac{1}{2^{k_1+1}}}f\left(x_1,x_2\right)_1\right|^2dx_1dx_2\le\omega_1^2\left(\frac{1}{2^{k_1+1}},f\right)_2$$

$$\le 3.\frac{1}{2^{k_1}}V_1^2\left(f\right)_2\le c.2^{-k_1}.V_1^2\left(f\right)_2 \qquad (11)$$

الآن من أجل $\left(\frac{4}{3}<\beta<2\right)$ ، وباستخدام متراجحة هولدر التكاملية والعلاقة (11) يكون لدينا:

$$\sum_{i=1}^{2^{k_1}}\left|c_{k_1,0}^{(i)}\left(f,H\right)\right|^\beta\le\left(\sum_{i=1}^{2^{k_1}}\left|c_{k_1,0}^{(i)}\left(f,H\right)\right|^2\right)^{\frac{\beta}{2}}2^{k_1\left(1-\frac{\beta}{2}\right)}\le$$

$$\le 2^{k_1\left(1-\frac{\beta}{2}\right)}\left(c.2^{-k_1}.V_1^2\left(f\right)_2\right)^{\frac{\beta}{2}}\le$$

$$\le\alpha.2^{k_1(1-\beta)} \qquad (12)$$

حيث : $\alpha=\left(cV_1^2\left(f\right)_2\right)^{\frac{\beta}{2}}$ ثابت موجب.

من العلاقة (12) ومن الفرض الوارد في المبرهنة نجد أن:

$$\sum_{n_1=2}^{\infty}\left|c_{n_1,0}(f,H)\right|^{\beta}=$$

$$=\sum_{k_1=0}^{\infty}\sum_{i=1}^{2^{k_1}}\left|c^{(i)}_{2^{k_1}+i,0}(f,H)\right|^{\beta}\le\sum_{k_1=0}^{\infty}\alpha.2^{k_1(1-\beta)}<\infty$$

وبصورة مماثلة تماماً يمكن الإثبات على أنه من أجل $(1<\beta<2)$ يكون :

$$\sum_{n_2=1}^{\infty}\left|c_{0,n_2}(f,H)\right|^{\beta}<\infty$$

أيضاً اعتماداً على متراجحة هولدر والعلاقة (10) والتمهيدية (1) نجد أن :

$$\sum_{i=0}^{2^{k_1}-1}\sum_{j=0}^{2^{k_2}-1}\left|\int_{\frac{2i}{2^{k_1}}}^{\frac{i+1}{2^{k_1}}}\int_{\frac{2j}{2^{k_2}}}^{\frac{j+1}{2^{k_2}}} f(x_1,x_2)H_{2^{k_1}+i}(x_1)H_{2^{k_2}+j}(x_2)dx_1dx_2\right|^2 \le$$

$$\le 2^{k_1+k_2}\sum_{i=0}^{2^{k_1}-1}\sum_{j=0}^{2^{k_2}-1}\left[\int_{\frac{2i}{2^{k_1+1}}}^{\frac{2i+1}{2^{k_1+1}}}\int_{\frac{2j}{2^{k_2+1}}}^{\frac{2j+1}{2^{k_2+1}}}\left|\Delta_{\frac{1}{2^{k_1+1}},\frac{1}{2^{k_2+1}}} f(x_1,x_2)\right|dx_1dx_2\right]^2$$

$$\le 2^{k_1+k_2}\sum_{i=0}^{2^{k_1}-1}\sum_{j=0}^{2^{k_2}-1}\left[(\int_{\frac{2i}{2^{k_1+1}}}^{\frac{2i+1}{2^{k_1+1}}}\int_{\frac{2j}{2^{k_2+1}}}^{\frac{2j+1}{2^{k_2+1}}}\left|\Delta_{\frac{1}{2^{k_1+1}},\frac{1}{2^{k_2+1}}} f(x_1,x_2)\right|^2 dx_1dx_2)^{\frac{1}{2}}\times\right.$$

$$\left.\times(\int_{\frac{2i}{2^{k_1+1}}}^{\frac{2i+1}{2^{k_1+1}}}\int_{\frac{2j}{2^{k_2+1}}}^{\frac{2j+1}{2^{k_2+1}}} 1dx_1dx_2)^{\frac{1}{2}}\right]^2 \le \int_0^1\int_0^1\left|\Delta_{\frac{1}{2^{k_1+1}},\frac{1}{2^{k_2+1}}} f(x_1,x_2)\right|^2 dx_1dx_2$$

$$\le \omega_{1,2}^2\left(\frac{1}{2^{k_1+1}},\frac{1}{2^{k_2+1}},f\right)_2$$

$$\le 4\omega_1\left(\frac{1}{2^{k_1+1}},f\right)_2.\omega_2\left(\frac{1}{2^{k_2+1}},f\right)_2$$

$$\le \gamma.2^{-\frac{k_1+k_2}{2}} \tag{13}$$

الآن ليكن: $\left(\frac{4}{3}<\beta<2\right)$ عندئذ حسب متراجحة هولدر والعلاقة (13) يكون لدينا:

$$\sum_{i=0}^{2^{k_1}-1}\sum_{j=0}^{2^{k_2}-1}\left|c_{2^{k_1}+i,2^{k_2}+j}(f,H)\right|^{\beta}\leq\gamma.2^{(k_1+k_2)\left(1-\frac{3\beta}{4}\right)}$$

$$=\gamma.2^{k_1\left(1-\frac{3\beta}{4}\right)}.2^{k_2\left(1-\frac{3\beta}{4}\right)} \qquad (14)$$

فإذاً حسب الفرض والعلاقة (14) نجد أن:

$$\sum_{n_1=1}^{\infty}\sum_{n_2=1}^{\infty}\left|c_{n_1,n_2}(f,H)\right|^{\beta}=$$

$$=\sum_{k_1=0}^{\infty}\sum_{k_2=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{2^{k_1}-1}\sum_{j=0}^{2^{k_2}-1}\left|c_{2^{k_1}+i,2^{k_2}+j}(f,H)\right|^{\beta}$$

$$\leq\gamma\sum_{k_1=0}^{\infty}2^{k_1\left(1-\frac{3\beta}{4}\right)}.\sum_{k_2=0}^{\infty}2^{k_2\left(1-\frac{3\beta}{4}\right)}<\infty$$

وهذا يعني أن إثبات المبرهنة (1) قد تم .

- **نتائج البحث :**

(1) إذا وضعنا $\beta=1$ (أي : $\left(f\in W\cap L_2(I^2)\right)$ في المبرهنة **(1)** فإن :

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\left|c_{n,m}(f,H)\right|<\infty$$

(2) إذا وضعنا $\beta=1$ في المبرهنة **(1)** وإذا كان :

$$\sum_{n_1=1}^{\infty}\frac{\left[E_{n_1,\infty}^{(2)}(f,H)\right]^{\alpha_1}}{\sqrt{n_1}}<\infty \quad , \quad \sum_{n_2=1}^{\infty}\frac{\left[E_{\infty,n_2}^{(2)}(f,H)\right]^{\alpha_2}}{\sqrt{n_2}}<\infty$$

حيث : $\alpha_1+\alpha_2=1\,,\ \alpha_1.\alpha_2>0$ ، فإن :

$$\sum_{n_1=1}^{\infty}\sum_{n_2=1}^{\infty}\left|c_{n_1,n_2}(f,H)\right|<\infty \qquad (15)$$

إن إثبات هذه النتيجة يمكن الحصول عليه مباشرة وذلك بملاحظة ما يلي:

$$\left[E_{n_1,\infty}^{(2)}(f,H)\right]^2+\left[E_{\infty,n_2}^{(2)}(f,H)\right]^2-\left[E_{n_1,n_2}^{(2)}(f,H)\right]^2$$
$$\leq\left[E_{n_1,\infty}^{(2)}(f,H)\right]^{2\alpha_1}.\left[E_{\infty,n_2}^{(2)}(f,H)\right]^{2\alpha_2}$$

ثم من المتراجحة :

$$\sum_{n_1=1}^{\infty}\sum_{n_2=1}^{\infty}\left\{\frac{\left[E_{n_1,\infty}^{(2)}(f,H)\right]^2+\left[E_{\infty,n_2}^{(2)}(f,H)\right]^2-\left[E_{n_1,n_2}^{(2)}(f,H)\right]^2}{n_1n_2}\right\}^{\frac{1}{2}}\leq$$
$$\leq\sum_{n_1=1}^{\infty}\frac{\left[E_{n_1,\infty}^{(2)}(f,H)\right]^{\alpha_1}}{\sqrt{n_1}}.\sum_{n_2=1}^{\infty}\frac{\left[E_{\infty,n_2}^{(2)}(f,H)\right]^{\alpha_2}}{\sqrt{n_2}}$$

ينتج تقارب المتسلسلة (15) .

مع الأخذ بالحسبان أنه من أجل: $(\mu=1,2)\,,\ \alpha_\mu=0$.

($\alpha_1=0$ أو $\alpha_2=0$)، تكون المتسلسلة (15) متباعدة .

(3) إذا كان : $\beta > \frac{4}{3}$ أي: $\left(f \in W \cap PBV_2\left(I^2\right)\right)$ فإنه من المبرهنة **(1)** يكون:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\left|c_{n,m}(f,H)\right|^{\beta} < \infty$$

(4) إذا كان $f(x_1,x_2) \in W$ فإنه من أجل $\left(\beta = 1, \lambda < -\frac{1}{4}\right)$ تتقارب المتسلسلة الآتية :

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\left[(n+1)(m+1)\right]^{\lambda}.\left|c_{n,m}(f,H)\right|^{\beta}$$

وتجدر الإشارة على أنه فيما عدا ذلك ليس بالضرورة أن يكون التقارب المطلق لهذا النوع من المتسلسلات محققاً.

- **التوصيات :**

1) محاولة إنجاز هكذا عمل وذلك من خلال دراسة تقارب متسلسلة معاملات فورييه–هاآر المكررة n مرة ($n > 2$) أي في فضاءات ذات n بعد مع تحديد الشروط الكافية لذلك إن أمكن.

2) محاولة دراسة قابلية جمع متسلسلات معاملات فورييه –هاآر في فضاءات ذات n بعد وفق طرائق تجميع خطية بشكل عام أو طرائق تجميع خطية نظامية بشكل خاص وهذا الأمر مهم تحديداً لأجل المتسلسلات المتباعدة.

المراجع (*REFERENCES*):

[1]- A. Haar ,Zur ,Theorieder orthogonalen Function en system,Math,Ann,69(1910),331-371.

[2]- BARY. N. K,1961 – Trigonometric series. Moscow. Government Puplishing Hause. 201P.

[3]- ZYGMUND. A., 1965 – Trigonometric series. Vol. 1. Moscow Peace, 615P.

[4]- P.L . Ulyanov ,on the series with respect to Haar system (Rssian), Math,sb,63:3,1964,356-391 .

[5] - B .S .Kashin ,A . A .Saakyan ,orthogonal series ,AFTS ,M ,1999 ,1st ed. Transl Math. Monogr .v.75 ,1989,451pp.

[6]-KOLMOGORAPH, A. N., FOMIN, C. V., 1989 – Elements of the theory functions and functional analysis . Moscow , 623P.

[7]- U . Goginava . on the absolute convergence of the series of Fouier- Haar coefficients ,Bull .Georgian Acad.Sci.164(1):21-23,2001

[8]- Z . A .Chanturia ,on the absolute convergence of the series of Fouier – Haar coefficients ,comment ,Math ,Special,Issc,2:25-35,1979 .

[9]- L .D . Gogoladze ,V. SH Tsagareishvili ,the absolute convergence of the Fourier – Haar series for two dimensional functions,Tbilisi,380028,Gorgia,2007.

[10]- S .Yu .Galkina ,, on the Fourier – Haar series coefficients of functions of several variables with

Bounded Vitali Variation,, Mathematical Notes Vol.70 Issue 5 ,pp 733-743, 2001 .

[11]**-** M.G. Plotnikov ,,Coefficients of convergent multiple Haar series ,, Russian Mathematics ,vol . 56 ,Issue 1,pp 61-65 ,2012

[12] - ЧХАИДЗЕ, Г. А, 1972 –О кратных рядах по системе Хаара. Сообщения АН ГССР, 35. N1, 541-544.

[13]-Grigorian . M.G ,,On the absolute convergence of Fourier – Haar series in the metric $L^p(0,1), 0 < p < 1$,, Akad. Nauk.SSSR. St.0025,Yerevan ,Armenia,2018 .

[14− مخلوف منير، 2015 "دراسة تقارب متسلسلات هاآر ذات المعاملات المطردة الحقيقية" ،مجلة جامعة البعث ، مجلد (37).

[15] - مخلوف منير ،2017، " تقارب متسلسلات فورييه – هاآر لدوال مشتقاتها مستمرة" مجلة جامعة البعث ، مجلد 39.