تعميم طريقة Beltrami-Michell إلى الحالة التحركية الحرارية للجسم المرن دقيق الاستقطاب ومركزي التناظر

*لبانه إبراهيم بإشراف الدكتورين : **د. منتجب الحسن ***د. أحمد الجاعور

ملخص البحث:

في ميكانيك الأوساط المستمرة بشكل عام وفي مقاومة المواد بشكل خاص يطلب تعيين الاجهادات مباشرة بهدف تصميم المادة المرادة وهنا امامنا طريقين:
الطريق الأول غير المباشر عن طريق معادلات الازاحة وهو طريق صعب وشاق ولا يعطي النتيجة المرادة بسهولة ، الطريق الثاني المباشر عن طريق معادلات Beltrami–Michell التي تعطينا الاجهادات مباشرة عبر حل مسألة معادلات Beltrami–Michell(صياغة Beltrami–Michell) .

في هذا البحث تم أولاً عرض مسألة معادلات الإزاحة والدوران والحرارة للحالة التحريكية المرنة للجسم الصلب دقيق الاستقطاب متماثل المناحي والمتجانس والذي له 6 درجات حرية وَ 6 ثوابت مادية والمنسوب للباحثين Eringen وَNowacki [5] . بعدها سنقوم بتعميم طريقة Beltrami–Michell إلى التحريكية الحرارية المرنة للجسم المدروس . ثم سننهي البحث بعدد من المسائل للمناقشة .

الكلمات المفتاحية: صياغة Beltrami–Michell المعممة – الجسم المرن دقيق الاستقطاب ومركزي التناظر .

*طالبة ماجستير اختصاص رياضيات تطبيقية (ميكانيك رياضي) في قسم الرياضيات _ كلية العلوم _ جامعة البعث
** أستاذ مساعد في الرياضيات التطبيقية في قسم الرياضيات _ كلية العلوم _ جامعة البعث
***أستاذ مساعد في المعادلات التفاضلية في قسم الرياضيات _ كلية العلوم _ جامعة البعث

The generalization of the Beltrami-Michell Method to the Thermodynamical State of the Micropolar elastic and Centro-symmetric Body

***Lobana Ibrahem**
****Dr.Mountajab Al-Hasan**
*****Dr.Ahmad Al-Jaour**

Abstract:

In MOC (Mechanics of Continuous Media) in general and in material resistance in particular, we need to determine the stresses, in order to construct certain material of some properties. To do so we have two ways; the first one is indirect, by the displacement - rotation – temperature equations, but this way is very complex in determining the stresses; the other one is to determine the stresses directly from Beltrami-Michell formulas .

In this paper, we introduce the displacement - rotation – temperature initial – boundary value problem for the considerable linear homogeneous, isotropic micropolar thermoelastic body of 6 freedom degree and 6 material constants, discussed by Eringen and Nowacki . Then, we derive the Beltrami-Michell equations for the Naiver displacement-rotation-temperature model of the Thermodynamical state of the considerable micropolar body. Finally, we end the paper by introducing some problem for discussing.

Key world: The generalized Beltrami-Michell –The micropolar thermoelastic and centro-symmetric body.

***Mgr. Student in Applied Mathematics- Department of Mathematics-Faculty of Sciences-Al-Baath University.**
**** Professor in Department of Mathematics-Faculty of Sciences-Al-Baath University.**
***** Associate Professor in Department of Mathematics-Faculty of Sciences-Al-Baath University.**

1. المقدمة:

تعتبر صياغة Beltrami–Michell من أهم الطرائق التي تساعدنا في حل مسائل المرونة التقليدية [1] وفي عام 1973 قام الباحث بتعميم هذه الطريقة إلى الحالة الإيزوتيرمية (متساوية درجات الحرارة) للجسم الصلب دقيق الاستقطاب . في عام 2021 تمت استنتاج هذه الصياغة في أي نظام احداثي منحني لجسم Hook التحريكي الحراري وهو ابسط الاجسام المرنة.

2. هدف البحث :

في البحث سنقوم اولاً باستنتاج معادلات Beltrami–Michell لأجل نموذج نافير السكوني الحراري للجسم المرن دقيق الاستقطاب المعتبر . بعدها سنوجد صياغة Beltrami–Michell المعممة إلى الحالة الترموديناميكية المرنة للجسم الصلب دقيق الاستقطاب المتجانس والمتماثل المناحي والذي نرمز له اختصاراً بالرمز (E–N:6) ([8] , [2]) .

أما أهمية البحث تكمن بأن هذه الطريقة تمكننا من التحديد المباشر للإجهادات والحرارة ; الأمر الذي له أهمية كبيرة في ميكانيك المواد.

3. طرق وأدوات البحث:

يهدف البحث على صياغة Beltrami–Michell المطلوبة لأجل الحالتين السكونية الحرارية والتحريكية الحرارية للجسم المعتبر، سنستخدم طريقتين هما تعميم للطريقتين المستخدمتين في [3,4,5,7,9,10] .

من أجل متطلبات البحث يلزمنا فيما يلي عرض مسألة القيم الحدية والابتدائية بالازاحات والدورانات والحرارة للجسم الترموديناميكي دقيق الاستقطاب (E−N:6) ([2] , [8]) .

تتعين الحالة الترموديناميكية المرنة للجسم المدروس بواسطة الحقول التنسورية $(\mathbf{u},\boldsymbol{\varphi},\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\kappa},\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\mu},\theta)$التي تمثل على الترتيب: حقل الإزاحة المتجهي، وحقل التوجهات المتجهي ، حقل انفعالات القوة التنسوري ، حقل انفعالات العزم التنسوري ، وحقل إجهادات القوة التنسوري ، وحقل إجهادات العزم التنسوري ، إضافة إلى حقل درجات الحرارة.

إن الحقول التنسورية من المرتبة الثانية، المذكورة أعلاه غير متناظرة يمكن تمثيلها في $\Omega\times T$ وفي النظام العطالي الديكارتي $[O,(e_1,e_2,e_3)]$ على النحو الاتي:

(3-1)

$$\mathbf{u}=u_i\,\mathbf{e}_i \qquad , \qquad \boldsymbol{\varphi}=\varphi_i\,\mathbf{e}_i$$

(3-2)

$$\boldsymbol{\gamma}\equiv\gamma_{ij}\,\mathbf{e}_i\otimes\mathbf{e}_j \qquad , \qquad \boldsymbol{\kappa}\equiv\kappa_{ij}\,\mathbf{e}_i\otimes\mathbf{e}_j$$

(3−3)

$$\boldsymbol{\sigma}\equiv\sigma_{ij}\,\mathbf{e}_i\otimes\mathbf{e}_j \qquad , \qquad \boldsymbol{\mu}\equiv\mu_{ij}\,\mathbf{e}_i\otimes\mathbf{e}_j$$

$$\theta=\mathrm{T}-\mathrm{T}_0$$

بحيث : T هي درجة الحرارة المطلقة للجسم

T_0 هي درجة حرارة الحالة الطبيعية للجسم

كما أن الحقول السابقة مستقلة عن بعضها البعض لأجل الجسم المذكور ، وهنا نشير إلى أن Ω هي الحالة البدائية للجسم وهي تشكل منطقة بسيطة الترابط في الفضاء الإقليدي $\Re^3$ كما أن $T = [0,+\infty[$, $T^+ =]0,+\infty[$:.

3-1 المسألة التقليدية للجسم المذكور :

إن الحقول السابقة تحقق في $\overline{\Omega} \times T$ مجموعة المعادلات والشروط الحدية والابتدائية والعلاقات الأساسية التالية :

ـ معادلة الحركة في $\Omega \times T^+$:

(3-4)

$$\sigma_{ji,j} + X_i = \rho \ddot{u}_i \quad , \quad \in_{ijk} \sigma_{jk} + \mu_{ji,j} + Y_i = J \ddot{\varphi}_i$$

حيث هنا : **Y**, **X** هما حقلان متجهيان معلومان ويمثلان على الترتيب حقل القوة الحجمية وحقل العزم الحجمي اللذان ، يمكن تمثيلهما في $\Omega \times T^+$ على النحو التالي :

$$\mathbf{X} = X_i \, \mathbf{e}_i \quad , \quad \mathbf{Y} = Y_i \, \mathbf{e}_i$$

ρ, J هما على الترتيب الكتلة الحجمية وعزم العطالة الدوراني للجسم المذكور وهما كميتان ثابتتان ، موجبان ومعلومتان في الجسم . الرموز $\in_{ijk}$ تمثل مناوب ليفي ـ تشيفيتي وهي نصف تنسور بالوزن $w = \frac{1}{2}$. استخدمنا هنا الطريقة التنسورية (رموز اينشتاين) في الكتابة ; حيث الأدلة اللاتينية تأخذ القيم 1,2,3 . اخيراً نشير إلى أن رمز النقطة يدل على المشتق الجزئي الأول و الرمز

نقطتين يدل على المشتق الجزئي الثاني بالنسبة للزمن كما أن الفاصلة الدليلية (،) تدل على الاشتقاق بالنسبة لإحداثيات الموضع.

- معادلة التوصيل الحراري المحققة في $\Omega\times T^{+}$:

$$\theta_{,ii}-\frac{1}{\kappa}\dot{\theta}-\eta_0\dot{u}_{j,j}=-\frac{Q}{\kappa} \qquad (3-5)$$

حيث : $\eta=\frac{\nu_T T_0}{\lambda_0}$, $\kappa=\frac{\lambda_0}{c_\varepsilon}$, $Q=\frac{\kappa W}{\lambda_0}$

كما ان Q هي دالة معلومة في $\Omega\times T^{+}$ وتمثل المصادر الحرارية في الجسم

W هي كمية الحرارة المولدة في وحدة الحجم ووحدة الزمن وهي أيضا دالة معلومة في $\Omega\times T^{+}$

λ_0معامل التوصيل الحراري وهو ثابت معلوم.

c_εهي الحرارة النوعية من أجل تشوه ثابت للجسم وهي أيضاً مقدار ثابت ،

- علاقات الاستمرار في الانفعالات الجهرية والمجهرية:

$$\begin{aligned}&\gamma_{ii,h}-\gamma_{hi,i}-\in_{khi}\kappa_{lk}+\in_{kli}\kappa_{hk}=0\\&\kappa_{li,h}-\kappa_{hi,l}=0\end{aligned} \qquad (3-6)$$

العلاقات الهندسية المحققة في $\Omega\times T^{+}$:

$$\kappa_{ji}=u_{i,j}-\in_{kji}\varphi_k \quad , \quad \kappa_{ji}=\varphi_{i,j} \qquad (3-7)$$

- العلاقات التأسيسية المحققة في $\Omega\times T$:

(3-8)

$$\sigma_{ji}=(\mu+\alpha)\gamma_{ji}+(\mu-\alpha)\gamma_{ij}+(\lambda\gamma_{kk}-\nu_T\theta)\delta_{ij}$$
$$\mu_{ji}=(\gamma+\varepsilon)\kappa_{ji}+(\gamma-\varepsilon)\kappa_{ij}+\beta\kappa_{kk}\delta_{ij}$$

حيث: $(\mu,\lambda,\alpha,\beta,\gamma,\varepsilon)$ هي مقادير ثابتة موجبة معلومة وتمثل الثوابت المادية للجسم، اما: $\nu_T=(2\mu+3\lambda)\alpha_t$

حيث α_t هو معامل التمدد الحراري الخطي للجسم،

- الشروط الحدية المحققة على $\partial\Omega\times T$:

(3-9)

$$\sigma_{ji}n_j=p_i \quad , \quad \mu_{ji}n_j=m_i \quad , \quad \theta=\vartheta$$

حيث التوابع $p_i,m_i,\theta:\partial\Omega\times T\to\Re$ معلومة. في الشروط السابقة $\partial\Omega$ تمثل الحدود الملساء لـ Ω وَ $\mathbf{n}=n_i\mathbf{e}_i$ يمثل متجه واحدة ناظم السطح $\partial\Omega$والموجه نحو خارج Ω،

- الشروط الابتدائية المحققة في $\Omega\times\{0\}$:

(3-10)

$$u_i=h_i \quad , \quad \varphi=k_i \quad , \quad \theta=l$$
$$\dot{u}_i=\psi_i \quad , \quad \dot{\varphi}_i=\chi_i$$

بحيث التوابع $h_i,k_i,l,\psi_i,\chi_i:\Omega\to\Re$ هي توابع معروفة .

إن الوسطاء $J,\rho,\nu_T,\eta_0,\kappa$ تحقق متراجحات الطاقة التالية :

(3-11)

$$J \succ 0 \quad , \quad \rho \succ 0 \quad ,$$

$$\kappa \succ 0 \quad , \quad \frac{\nu_T}{\eta_0} \succ 0$$

تعريف 1: نسمي مجموعة الحقول الفيزيائية $\left(u_i, \varphi_i, \gamma_{ji}, \kappa_{ji}, \sigma_{ji}, \mu_{ji}, \theta\right)$ المحققة للمسألة السابقة في $\bar{\Omega} \times T$ نسميها بالوصف الكلاسيكي للجسم المذكور.

3-2 مسألة الإزاحة والدوران والحرارة للجسم المذكور [1] :

تتألف هذه المسألة من المعادلات التفاضلية والشروط الحدية والابتدائية والعلاقات الأساسية التالية :

- معادلات الإزاحة والدوران والحرارة المحققة في $\Omega \times T^+$:

(3-12)

$$\left(\mu+\alpha\right)u_{i,jj} + \left(\lambda+\mu-\alpha\right)u_{j,ji} + 2\alpha \in_{ijk} \varphi_{kj} + x_i = \rho \ddot{u}_i + \nu_T \theta_{,i}$$

$$\left(\gamma+\varepsilon\right)\varphi_{i,jj} - 4\alpha\varphi_i + \left(\beta+\gamma-\varepsilon\right)\varphi_{j,ji} + 2\alpha \in_{ijk} u_{k,j} + Y_i = J\ddot{\varphi}_i$$

$$\theta_{,i\,i} - \frac{1}{\kappa}\dot{\theta} - \eta_0 \dot{u}_{j,j} = -\frac{Q}{\kappa}$$

- العلاقات الهندسية المحققة في $\Omega \times T^+$:

(3-13)

$$\gamma_{ji} = u_{i,j} - \in_{kji} \varphi_k \qquad , \qquad \kappa_{ji} = \varphi_{i,j}$$

- العلاقات التأسيسية المحققة في $\Omega\times T^{+}$:

(3−14)

$$\sigma_{ji}=(\mu+\alpha)u_{i,j}+(\mu-\alpha)u_{j,i}-2\alpha\in_{kji}\varphi_k+(\lambda u_{k,k}-\nu_T\theta)\delta_{ij}$$
$$\mu_{ji}=(\gamma+\varepsilon)\varphi_{i,j}+(\gamma-\varepsilon)\varphi_{j,i}+\beta\varphi_{k,k}\delta_{ij}$$

- الشروط الحدية المحققة على $\Omega\times T$:

(3−15)

$$[(\mu+\alpha)u_{i,j}+(\mu-\alpha)u_{j,i}-2\alpha\in_{kji}\varphi_k+(\lambda u_{k,k}-\nu_T\theta)\delta_{ij}]n_j=p_i$$
$$[(\gamma+\varepsilon)\varphi_{i,j}+(\gamma-\varepsilon)\varphi_{j,i}+\beta\varphi_{k,k}\delta_{ij}]n_j=m_i$$

- الشروط الابتدائية المحققة في $\Omega\times\{0\}$:

(3−16)

$$u_i=h_i\quad,\qquad \varphi_i=k_i\quad,\qquad \theta=l\quad,$$
$$\dot{u}_i=\psi_i\quad,\qquad \dot{\varphi}_i=\chi_i$$

تعريف 2 : ندعو مجموعة الحقول الفيزيائية $(u_i,\varphi_i,\gamma_{ji},\kappa_{ji},\sigma_{ji},\mu_{ji},\theta)$ المحققة للمسألة السابقة بحل المسألة الإزاحية الدورانية الحرارية .

بهدف الحصول على معادلات Beltrami−Michell التي تتعلق بنموذج نافير الرياضي السكوني الحراري للجسم المذكور يلزمنا فيما يلي عرض هذا النموذج (نافير) السكوني الحراري الذي نحصل عليه من خلال إهمال المشتقات الجزئية الزمنية والشروط الابتدائية في النموذج (E−N:6) الرياضي بحيث نحصل على :

3-3 نموذج نافير الرياضي السكوني الحراري للجسم المعتبر:

يتألف هذا النموذج من المعادلات التفاضلية والعلاقات الأساسية والشروط الحدية التالية:

- معادلة التوازن في Ω :

(3-17)

$$\sigma_{ji,j} + X_i = 0 \quad , \quad \in_{ijk} \sigma_{jk} + \mu_{ji,j} + Y_i = 0$$

- معادلة التوصيل الحراري المحققة في Ω :

$$\theta_{,i\,i} = -\frac{Q}{\kappa} \qquad (3-18)$$

- علاقات الاستمرار في الانفعالات الجهرية والمجهرية :

$$\begin{aligned} &\gamma_{ii,h} - \gamma_{hi,i} - \in_{khi} \kappa_{lk} + \in_{kli} \kappa_{hk} = 0 \\ &\kappa_{li,h} - \kappa_{hi,l} = 0 \end{aligned} \qquad)$$

(3-19

- العلاقات الهندسية المحققة في Ω :

$$\kappa_{ji} = u_{i,j} - \in_{kji} \varphi_k \quad , \quad \kappa_{ji} = \varphi_{i,j} \qquad (3-20)$$

- العلاقات التأسيسية المحققة في Ω :

(3-21)

$$\begin{aligned} \sigma_{ji} &= (\mu+\alpha)\gamma_{ji} + (\mu-\alpha)\gamma_{ij} + (\lambda\gamma_{kk} - \nu_T\theta)\delta_{ij} \\ \mu_{ji} &= (\gamma+\varepsilon)\kappa_{ji} + (\gamma-\varepsilon)\kappa_{ij} + \beta\kappa_{kk}\delta_{ij} \end{aligned}$$

- شروط الجر الحدية الترموسكونية المحققة على $\partial\Omega$:

(3-22)

$$\sigma_{ji} n_j = p_i \quad , \quad \mu_{ji} n_j = m_i \quad , \quad \theta = \vartheta$$

3-4 مسألة نافير للإزاحات و الدورانات والحرارة للجسم المذكور [11] :

تتألف هذه المسألة من المعادلات التفاضلية والشروط الحدية والابتدائية والعلاقات الأساسية التالية :

- معادلات الإزاحات والدورانات والحرارة المحققة في Ω :

(3-23)

$$(\mu+\alpha)u_{i,jj} + (\lambda+\mu-\alpha)u_{j,ji} + 2\alpha \in_{ijk} \varphi_{kj} + x_i = \nu_T \theta_{,i}$$
$$(\gamma+\varepsilon)\varphi_{i,jj} - 4\alpha\varphi_i + (\beta+\gamma-\varepsilon)\varphi_{j,ji} + 2\alpha \in_{ijk} u_{k,j} + Y_i = 0$$
$$\theta_{,ii} = -\frac{Q}{\kappa}$$

- العلاقات الهندسية المحققة في Ω :

(3-24)

$$\gamma_{ji} = u_{i,j} - \in_{kji} \varphi_k \quad , \quad \kappa_{ji} = \varphi_{i,j}$$

- العلاقات التأسيسية المحققة في Ω :

(3-25)

$$\sigma_{ji} = (\mu+\alpha)u_{i,j} + (\mu-\alpha)u_{j,i} - 2\alpha \in_{kji} \varphi_k + (\lambda u_{k,k} - \nu_T \theta)\delta_{ij}$$
$$\mu_{ji} = (\gamma+\varepsilon)\varphi_{i,j} + (\gamma-\varepsilon)\varphi_{j,i} + \beta\varphi_{k,k}\delta_{ij}$$

- الشروط الحدية المحققة على Ω :

$$(3-26)$$

$$[(\mu+\alpha)u_{i,j}+(\mu-\alpha)u_{j,i}-2\alpha\in_{kji}\varphi_k+(\lambda u_{k,k}-\nu_T\theta)\delta_{ij}]n_j=p_i$$
$$[(\gamma+\varepsilon)\varphi_{i,j}+(\gamma-\varepsilon)\varphi_{j,i}+\beta\varphi_{k,k}\delta_{ij}]n_j=m_i$$

4. النتائج والمناقشة :

4-1 معادلات Beltrami-Michell لنموذج نافير الترموسكوني للجسم (E-N:6):

بهدف الحصول على معادلات Beltrami-Michell لنموذج نافير المذكور تلزمنا التوطئة التالية :

توطئة 1 : إن العلاقات التأسيسية في نموذج نافير تكافئ في $\overline{\Omega}$ العلاقات التالية :

$$\gamma_{ji}=\frac{1}{2\mu}\sigma_{(ji)}+\frac{1}{2\alpha}\sigma_{[ji]}-\frac{1}{2\mu}(\lambda e-\nu_T\theta)\delta_{ij}$$
$$\kappa_{ji}=\frac{1}{2\gamma}\mu_{(ji)}+\frac{1}{2\varepsilon}\mu_{[ji]}-\frac{\beta}{2\gamma(2\gamma+3\beta)}\mu_{kk}\delta_{ij} \qquad (4-1)$$

بحيث : $e=\frac{1}{2\mu+3\lambda}(\sigma_{kk}+3\nu_T\theta)$

كما أن الرمزان $\sigma_{[ji]},\sigma_{(ji)}$ يدلان على الجزء التناظري والجزء التناظري العكسي للمصفوفة σ_{ij}

$$\sigma_{(ji)} = \frac{1}{2}\left(\sigma_{ji} + \sigma_{ij}\right) \ ,$$
$$\sigma_{[ji]} = \frac{1}{2}\left(\sigma_{ji} - \sigma_{ij}\right) \ ,$$

للحصول على معادلات Beltrami–Michell لنموذج نافير الرياضي السكوني الحراري نعوض العلاقات السابقة في علاقات التوافق والانفعال فنحصل على :

(4–2)

$$\begin{aligned}
&\{\frac{1}{2\mu}\sigma_{(li)} + \frac{1}{2\alpha}\sigma_{[li]} - \frac{1}{2\mu}\left(\lambda e - \nu_T \theta\right)\delta_{il}\}_{,h} \\
&-\{\frac{1}{2\mu}\sigma_{(hi)} + \frac{1}{2\alpha}\sigma_{[hi]} - \frac{1}{2\mu}\left(\lambda e - \nu_T \theta\right)\delta_{ih}\}_{,l} \\
&-\in_{khi}\{\frac{1}{2\gamma}\mu_{(lk)} + \frac{1}{2\varepsilon}\mu_{[lk]} - \frac{\beta}{2\gamma\left(2\gamma+3\beta\right)}\mu_{ss}\delta_{lk}\} \\
&+\in_{kli}\{\frac{1}{2\gamma}\mu_{(hk)} + \frac{1}{2\varepsilon}\mu_{[hk]} - \frac{\beta}{2\gamma\left(2\gamma+3\beta\right)}\mu_{ss}\delta_{hk}\} \\
&= 0 \qquad ,
\end{aligned}$$

(4–3)

$$\begin{aligned}
&\{\frac{1}{2\gamma}\mu_{(li)} + \frac{1}{2\varepsilon}\mu_{[li]} - \frac{\beta}{2\gamma\left(2\gamma+3\beta\right)}\mu_{ss}\delta_{li}\}_{,h} \\
&-\{\frac{1}{2\gamma}\mu_{(hi)} + \frac{1}{2\varepsilon}\mu_{[hi]} - \frac{\beta}{2\gamma\left(2\gamma+3\beta\right)}\mu_{ss}\delta_{hi}\}_{,l} \\
&= 0
\end{aligned}$$

وهي معادلات عددها 12 معادلة من المرتبة الأولى.

حيث عدد المجاهيل الأصلي هو 19 تنقسم إلى 9 مجاهيل للإجهادات σ_{ji} و 9مجاهيل للإجهادات μ_{ji} أما المجهول الأخير هو الحرارة θ.

ولحل هذه المشكلة نضيف إلى المعادلة 12 السابقة معادلات نافير السكونية ومعادلة التوصيل الحراري فنحصل على جملة معادلات فيها عدد المعادلات يساوي عدد المجاهيل.

وللحصول على صورة أجمل لمعادلات Beltrami–Michell (4–2) (4–3) نشتق طرفي كلاً منهما بالنسبة لـ h فلا يتغير عدد المعادلات [11] حيث عدد المعادلات يبقى مساوياً لـ 12 حيث نحصل على

$$\begin{aligned}
&\Delta\{\frac{1}{2\mu}\sigma_{(li)}+\frac{1}{2\alpha}\sigma_{[li]}-\frac{1}{2\mu}(\lambda e-\nu_T\theta)\delta_{il}\}\\
&-\{\frac{1}{2\mu}\sigma_{(hi)}+\frac{1}{2\alpha}\sigma_{[hi]}-\frac{1}{2\mu}(\lambda e-\nu_T\theta)\delta_{ih}\}_{,lh}\\
&-\in_{khi}\{\frac{1}{2\gamma}\mu_{(lk)}+\frac{1}{2\varepsilon}\mu_{[lk]}-\frac{\beta}{2\gamma(2\gamma+3\beta)}\mu_{ss}\delta_{lk}\}_{,h}\\
&+\in_{kli}\{\frac{1}{2\gamma}\mu_{(hk)}+\frac{1}{2\varepsilon}\mu_{[hk]}-\frac{\beta}{2\gamma(2\gamma+3\beta)}\mu_{ss}\delta_{hk}\}_{,h}\\
&=0
\end{aligned}\qquad (4-4)$$

$$\begin{aligned}
&\Delta\{\frac{1}{2\gamma}\mu_{(li)}+\frac{1}{2\varepsilon}\mu_{[li]}-\frac{\beta}{2\gamma(2\gamma+3\beta)}\mu_{ss}\delta_{li}\}\\
&-\{\frac{1}{2\gamma}\mu_{(hi)}+\frac{1}{2\varepsilon}\mu_{[hi]}-\frac{\beta}{2\gamma(2\gamma+3\beta)}\mu_{ss}\delta_{hi}\}_{,l/}\\
&=0
\end{aligned}\qquad (4-5)$$

أيضا يمكن الحصول على صورة أجمل لهذه المعادلات من خلال تعويض معادلات نافير السكونية ومعادلة التوصيل الحراري في المعادلات الـ 12 السابقة ، وإذا اعتمدنا الشكل السابق لمعادلات Beltrami–Michell فإن صياغة Beltrami–Michell لنموذج نافير السكوني الحراري للجسم يتألف من المعادلات السابقة ، ومعادلات نافير السكونية الحرارية ، معادلة التوصيل الحراري ، الشروط الجر الحدية الترموسكونية (22–3)، إضافة إلى العلاقات الهندسية العكسية (1–4) والعلاقات الهندسية (3–4) .

تكمن آلية صياغة Beltrami–Michell بحل معادلات Beltrami–Michell المزودة بمعادلات نافير ومعادلة التوصيل الحراري التي عددها 19 ضمن شروط الجر الحدية الترموسكونية (22–3) نحصل على الاجهادات σ_{ji} ، μ_{ji} ،بعدها بالتعويض في (1–4) نحصل على الانفعالات والحرارة θ , κ_{ji} , γ_{ji} بعدها بمكاملة (3–4) نحصل على φ_i , u_i وبهذا تكون قد تحددت كافة مجاهيل المسألة.

4– 2 : معادلات Beltrami–Michell المعممة إلى الحالة الترموديناميكية المرنة للنموذج الرياضي الترموديناميكي (E–N:6) [5]

بهدف الوصول إلى هذه المعادلات نتبع طريقة تمثل تعميماً لطريقة Ignaczak [6] آخذين بعين الاعتبار أن الحقل الحراري موجود فقط في الجزء التناظري لتنسور اجهادات القوة $\sigma_{(ij)}$ [5]

حيث نحصل على هذه المعادلات المذكورة بحذف الانفعالات γ_{ij}, κ_{ij} من العلاقات الهندسية (3–4) ومعادلات الحركة (1–3) والعلاقات التأسيسية (3–7) وشكلها العكسي (1–4) ومعادلة التوصيل الحراري وذلك بإتباع ما يلي :

ننطلق من المعادلات الإزاحية الدورانية والحرارية (9-3) بعد كتابتها بالشكل المؤثري التالي والمحققة في $\Omega\times T^{+}$:

$$\Box_2^2 u_i+\frac{\lambda+\mu-\alpha}{\mu+\alpha}u_{j,ji}+\frac{2\alpha}{\mu+\alpha}\in_{ijk}\varphi_{k,j}-\frac{\nu_T}{\mu+\alpha}\theta_{,i}+\frac{x_i}{\mu+\alpha}=0 \qquad (4-6)$$

$$\Box_4^2\varphi_i+\frac{\beta+\gamma-\varepsilon}{\gamma+\varepsilon}\varphi_{j,ji}+\frac{2\alpha}{\gamma+\varepsilon}\in_{ijk}u_{k,j}-\frac{Y_T}{\gamma+\varepsilon}=0 \qquad (4-7)$$

$$D\theta-\eta_0\dot{u}_{j,j}=-\frac{Q}{\kappa} \qquad (4-8)$$

في الخطوة الثانية لإيجاد معادلتي كلاً من θ , σ_{ij} نشتق المعادلة (4-6) بالنسبة لـ X_j فنحصل على :

$$\Box_2^2 u_{i,j}+\frac{(\lambda+\mu-\alpha)}{\lambda+\mu}u_{k,kij}+\frac{2\alpha}{\mu+\alpha}\in_{imn}u_{nm,j}-\frac{\nu_T}{\lambda+\mu}\theta_{,ij}+\frac{X_{i,j}}{\lambda+\mu}=0 \qquad (4-9)$$

وباستبدال كل $j\leftarrow i$, $i\leftarrow j$ نحصل على :

$$\nabla_2^2 u_{j,i} + \frac{(\lambda+\mu-\alpha)}{\lambda+\mu} u_{k,kji} + \frac{2\alpha}{\mu+\alpha} \in_{jmn} u_{nm,i} - \frac{\nu_T}{\lambda+\mu} \theta_{,ji} + \frac{X_{j,i}}{\lambda+\mu} = 0 \quad (4-10)$$

الآن ، بجمع المعادلتان السابقتان (4-9) وَ (4-10) ومن ثم القسمة على 2 نجد :

$$\nabla_2^2 \gamma_{(ij)} + \frac{(\lambda+\mu-\alpha)}{\lambda+\mu} \gamma_{kk,ij} + \frac{\alpha}{\mu+\alpha} \left[\in_{imn} u_{n,mj} + \in_{jmn} u_{n,mi} \right] - \frac{\nu_T}{\mu+\alpha} \theta_{,ij} + \frac{1}{2} \frac{1}{\mu+\alpha} \left(X_{i,j} + X_{j,i} \right) = 0 \quad (4-11)$$

وبالاستفادة من العلاقة الهندسية الثانية نجد :

$$\nabla_2^2 \gamma_{(ij)} + \frac{(\lambda+\mu-\alpha)}{\lambda+\mu} \gamma_{kk,ij} + \frac{\alpha}{\mu+\alpha} \left[\in_{imn} \kappa_{nm,j} + \in_{jmn} \kappa_{nm,i} \right] - \frac{\nu_T}{\mu+\alpha} \theta_{,ij} + \frac{1}{2} \frac{1}{\mu+\alpha} \left(X_{i,j} + X_{j,i} \right) = 0 \quad (4-12)$$

أو بالشكل :

$$\nabla_2^2 \gamma_{(ij)} + \frac{(\lambda+\mu-\alpha)}{\lambda+\mu} \gamma_{kk,ij} + \frac{\alpha}{\mu+\alpha} \left[\in_{imn} \kappa_{[mn],j} + \in_{jmn} \kappa_{[mn],i} \right] - \frac{\nu_T}{\mu+\alpha} \theta_{,ij} + \frac{1}{2} \frac{1}{\mu+\alpha} \left(X_{i,j} + X_{j,i} \right) = 0 \quad (4-13)$$

أما معادلة التوصيل الحراري فتأخذ الشكل :

$$D\theta - \eta_0 \dot{\gamma}_{jj} = -\frac{Q}{\kappa} \qquad (4-14)$$

وبالاستفادة من التوطئة 1 نجد أن:

$$\gamma_{(ij)} \frac{1}{2\mu}\sigma_{(ji)} - \frac{1}{2\mu}\left(\lambda e - \nu_T \theta\right)\delta_{ij} \qquad (4-15)$$
$$\gamma_{kk} = e$$

وبالاستفادة أيضا من العلاقتين السابقتين والعلاقة الثانية بتوطئة 1 نحصل على المعادلتان المعممتان التاليتان لـ Beltrami–Michell والتي تخص $\sigma_{(ji)}, \theta$:

$$\nabla_2^2\left[\frac{1}{2\mu}\sigma_{(ji)} - \frac{1}{2\mu}\left(\lambda e - \nu_T \theta\right)\delta_{ij}\right] + \frac{\left(\lambda + \mu - \alpha\right)}{\lambda + \mu} e_{,ij} +$$
$$\frac{1}{2\varepsilon}\frac{\alpha}{\mu + \alpha}\left[\in_{imn} \kappa_{[mn],j} + \in_{jmn} \kappa_{[mn],i}\right]$$
$$-\frac{\nu_T}{\mu + \alpha}\theta_{,ij} + \frac{1}{2}\frac{1}{\mu + \alpha}\left(X_{i,j} + X_{j,i}\right) = 0 \qquad (4-16)$$

$$D\theta - \eta_0 \dot{e} = -\frac{Q}{\kappa}$$

وبتبسيط للمعادلة الأولى نجد :

$$\nabla_2^2\sigma_{(ji)}-\nabla_2^2\left(\lambda e-\nu_T\theta\right)\delta_{ij}+\frac{2\mu\left(\lambda+\mu-\alpha\right)}{\lambda+\mu}e_{,ij}+$$
$$\frac{\mu}{\varepsilon}\frac{\alpha}{\mu+\alpha}\left[\in_{imn}\kappa_{[mn],j}+\in_{jmn}\kappa_{[mn],i}\right] \qquad (4-17)$$
$$-\frac{2\mu\nu_T}{\mu+\alpha}\theta_{,ij}+\frac{\mu}{\mu+\alpha}\left(X_{i,j}+X_{j,i}\right)=0$$

أما المعادلة الثانية فتبقى على شكلها .

إن المعادلتان السابقتان تمثلان معادلتا Beltrami–Michell المعممتان إلى الحالة الترموديناميكية للجسم المعتبر واللتان تحكمان θ , $\sigma_{(ji)}$، أما المعادلات التي تخص الكميات التنسورية المجهولة $\mu_{(ji)}$, $\mu_{[ji]}$, $\sigma_{[ji]}$ فتبقى نفسها كما هو الحال في الحالة الديناميكية لنفس الجسم بحيث تأخذ الشكل التالي [5]:

(4-18)

$$\left(\nabla_2^2+\frac{4\alpha}{\vartheta}\frac{\rho}{\mu+\alpha}\right)\sigma_{[ij]}+\frac{2\alpha}{\mu+\alpha}\{\frac{\alpha}{\varepsilon}\varepsilon_{[i\,ab\,\mu_{ab},j]}-\frac{\rho}{\vartheta}\varepsilon_{sji}M_s\}+$$
$$\frac{\alpha}{\gamma}\varepsilon_{sji}\{\mu_{(ks),k}-\frac{\beta}{3\beta+2\gamma}\mu_{kk,s}+\frac{\gamma}{\varepsilon}\mu_{[ks],k}-\frac{2\gamma}{\mu+\alpha}\frac{\rho}{\vartheta}\mu_{ks,k}\}=0$$

(4-19)

$$\square_4^2 \mu_{(ij)} + \frac{2(\beta+\gamma-\varepsilon)}{3\beta+2\gamma}\frac{\gamma}{\gamma+\varepsilon}\mu_{ss,ij} + \left(\frac{1}{c_4^2}-\frac{1}{c_3^2}\right)\frac{\beta\delta_{ij}}{3\beta+2\gamma}\ddot{\mu}_{ss} + \frac{2\gamma}{\gamma+\varepsilon}\{\varepsilon_{[iab}\sigma_{ab,j]}M_{(i,j)}\} + \frac{\beta\delta_{ij}}{\beta+2\gamma}\{\varepsilon_{abc}\sigma_{bc,a}+M_{a,a}\}=0$$

$$\square_2^2 \mu_{[ij]} - \frac{2\varepsilon}{\gamma+\varepsilon}\{\varepsilon_{[iab}\sigma_{ab,j]}+M_{[i,j]}\}=0 \qquad (4-20)$$

5- الاستنتاجات و توصيات :

في هذا البحث تم استنتاج معادلات Beltrami-Michell السكونية الحرارية لنموذج نافير السكوني الحراري، بعدها تم تعميم ذلك إلى معادلات Beltrami-Michell الترموديناميكية للجسم الترموديناميكي دقيق الاستقطاب المعتبر.

التوصيات :

نوصي بمناقشة المسائل التالية :

1- معادلات Beltrami-Michell السكونية الحرارية للجسمين [A-K] , [K-M]

2- نوصي بمناقشة معادلات Beltrami-Michell الترموديناميكية المعممة للجسمين

.[K-M] , [A-K]

References:

[1]- Eringen A. C., Microcontinuum Field Theories : I: Foundations and Solids , 1999 , Springer Science + Business Media , LLC.

[2]- W. Nowocki , (1970), Theory of Elasticity , PWN Warsaw.

[3]- Hetnarski, R.B., and Ignaczak, J., (2011), The Mathematical Theory of Elasticity , Second Edition , CRC Press,Taylor & Francis Group,6000 Broken Sound Parkway NW, Suite 300,Boca Raton, FL 33487-2742.

[4]- Hetnarski, R.B., Ignaczak, J., Eslami, M.R., Noda, N., Sumi, N., and Tanigawa, Y., (2013), Theory of Elasticity and Thermal Stresses, Springer Science+

[5]- Ignaczak , J , 1971 - Tensorial equations of motion for elastic materials with microstructure , in : Trends of Elasticity and Thermoelasticity, Witold Nowacki Ann.Volume , Wolters-Noordhoff Groningen , 90 – 111;

[6]- Al-Hasan, M. and Saed, B. , (2015), The generalization of Beltrami – Michell equations of Hooke elastic body to its dynamic state in a curve coordinate system, Journal of Al-Baath University,Vol.37, Nr.2, p. 55-74.

[7]- Attiah, W. and Al-Hasan, M., (2020), The generalized thermodynamical Beltrami – Michell tensorial equations for the general thermodynamical state of the Hooke body, AJSRP - Journal of Nature, Life and Applied Sciences, Volume (4), Issue (1) : 30 Mars 2020, P: 60 – 71.

[8]-Nowacki w., Theory of Asymmetric Elasticity , Warszawa , PWN ,1986 .

[9]- Ignaczak , J., (1959), Direct determination of stresses from the stress equations of motion elasticity, Arch. Mech. Stos. 5, 9.

[10]- Ignaczak , J. , (1963), A completeness problem for stress equations of motion in the linear elasticity , Arch.Mech. 15 , 225-234 .

[11]- Dyszlewicz , J., (2004) , Micropolar Theory of Elasticity, in : Series Lectures. Notes in Applied and Computational Mechanics, Vol.15, 356 p, Springer .