استمرارية هولدر لحل معادلة مونج ـ أمبير العقدية ذات طرف ثانٍ يتعلق بالتابع المجهول

د. محمد شراباتي
كلية العلوم / جامعة البعث

الملخص

ندرس في هذا البحث معادلة مونج ـ أمبير العقدية في ساحة محدودة وذات طرف ثانٍ يتعلق بشكل أسي بالتابع المجهول ونحصل على حل مستمر لهذه المسألة و من ثم ندرس استمرارية هولدر قرب حدود الساحة عندما يكون تابع الكثافة محدوداً فقط.

علاوةً على ذلك ، نؤكد بأن الحل يكون مستمراً وفق هولدر على كامل الساحة إذا كان تابع الكثافة أيضاً يحقق شرط هولدر.

أخيراً ندرس حالة الحل القطري في كرة الواحدة ونثبت بأنّه يحقق شرط ليبشتز عندما يكون تابع الكثافة مستمراً.

الكلمات المفتاحية. معادلة مونج . أمبير العقدية ، استمرارية هولدر، التابع المتعدد تحت توافقي.

Hölder continuity of the solution to the complex Monge- Ampère equation with right hand side depending on the unknown function

Dr. Mohamad Charabati
Faculty of Science / Al-Baath University

Abstract

We study in this paper the complex Monge-Ampère equation in a bounded domain with right hand side depending exponentially on the unknown function and we obtain a continuous solution to this problem and then study Hölder continuity near the boundary when the density function is only bounded.

Moreover, we ensure that the solution will be Hölder continuous on the whole domain if the density function is also satisfying Hölder condition.

Finally, we study the radial solution on the unit ball and prove that it satisfies Lipschitz condition when the density function is continuous.

Key Words: Complex Monge-Ampère equation, Hölder continuity, plurisubharmonic function.

المقدمـة.

لتكن Ω من $\mathbb{C}^n$ساحة محدودة وليكن $\varphi \in C^{\alpha}(\partial\Omega)$ (تابع مستمر ويحقق شرط هولدر بالأس α) حيث $0 < \alpha \leq 1$ و $0 \leq f \in L^{\infty}(\overline{\Omega})$، ولنستعرض المسألة الآتية:

$$\begin{cases} u \in PSH(\Omega) \cap C(\overline{\Omega}) \\ (dd^c u)^n = e^{c.u} f(z)\, d\mu \quad in\ \Omega \\ u = \varphi \quad on\ \partial\Omega \end{cases} \qquad (1)$$

حيث c ثابت حقيقي موجب و $PSH(\Omega)$ تشير إلى مجموعة كل التوابع المتعددة تحت التوافقية على Ω و $(dd^c.)^n$ مؤثر مونج ـ أمبير العقدي.

تعد هذه المسألة من المسائل الهامة في التحليل العقدي والتي لا تزال تحظى باهتمام الباحثين ، لذلك نقدم هنا بعض النتائج التي تم إثباتها سابقاً وما سنقوم به في هذا البحث.

من أجل معادلة مونج ـ أمبير بطرف ثانٍ لا يتعلق بالتابع المجهول أي الثابت $c = 0$ في (1) ، فقد برهن كل من Bedford و Taylor في [1] على وجود الحل المستمر لمسألة ديرخليه (1)عندما يكون القياس في الطرف الثاني من الشكل $f\,d\mu$ حيث f تابع مستمر على $\overline{\Omega}$ و $d\mu$قياس ليبيغ في $\mathbb{C}^n$ ، و توصلا إلى أن الحل يحقق استمرارية هولدر في الساحة Ω عندما يكون التابعان f و φ يحققان شرط هولدر للاستمرار.

لاحقاً ، أثبت Kolodziej [13] أن المسألة تملك حلاً مستمراً وحيداً عندما $f \in L^p(\Omega)$ حيث $p > 1$ ، وفي 2008 قام Guedj و Kolodziej و Zeriahi بدراسة استمرارية هولدر للحل في البحث [8] عندما $f \in L^p(\Omega)$ شريطة أن يكون

محدوداً بقرب $\partial\Omega$ ، وقد تم تطوير هذه النتيجة والاستغناء عن شرط محدودية f بقرب $\partial\Omega$ في [3] .

كذلك تمت دراسة انتظام الحل في حالة قياس مغاير لقياس ليبيغ في المقالة [5] ، كما تمكننا حديثاً في [6] من دراسة مسألة الحل الجزئي أي الحصول على حل مستمر في حالة القياس μ يحقق الشرط $\mu \le (dd^c w)^n$ حيث $w \in PSH(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ وكذلك في البحث [7] من تحديد معامل استمرار الحل في هذه الحالة.

أما من أجل حالة الطرف الثاني من المعادلة يتعلق بالتابع المجهول u ، فقد تمت دراسة المسألة عندما يتعلق الطرف الثاني بالتابع المجهول من الشكل $(-u)^{-r}$ والتابع $f \in L^p(\Omega)$ في ساحة ذات حدود ملساء Ω وكما تم تحديد أس هولدر للحل لهذه الحالة في البحث [11].

الهدف من البحث.

يتركز بحثنا حول دراسة المسألة (1) من أجل الطرف الثاني يتعلق بالتابع المجهول بشكل أسي و من أجل تابع $f \in L^\infty(\overline{\Omega})$ في ساحة ذات حدود غير ملساء سيتم تعريفها لاحقاً، والقياس μ هو قياس ليبيغ ، لذلك بدايةً سنقوم بإثبات وجود الحل المستمر في الساحة Ω ودراسة إمكانية تحقيقه لشرط هولدر بالقرب من حدود الساحة ومن ثم استنتاج استمرارية هولدر للحل على كامل الساحة عند إضافة شرط استمرارية هولدر للتابع f .

بعض المفاهيم الأساسية.

تعريـــف.

نقول عن التابع $u: \Omega \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ إنه متعدد تحت توافقي plurisubharmonic على Ω إذا كان هذا التابع تحت توافقي على تقاطع المجموعة Ω مع أي مستقيم عقدي من الشكل $\{a + b\xi \ ; \ \xi \in \mathbb{C}\}$ حيث $a, b \in \mathbb{C}^n$ ثوابت.

يمكن للقارئ العودة إلى المراجع [9,12] من أجل خصائص هذه التوابع .

ولتوضيح تعريف مؤثر مونج أمبير العقدي لا بد لنا من تعريف المؤثرين التفاضليين $d = \partial + \bar{\partial}$ و $d^c = i/4(\bar{\partial} - \partial)$ و يكون

$$dd^c = i/2\, \partial\, \bar{\partial}$$

ويُعطى قياس ليبيغ في $\mathbb{C}^n$ بالشكل:

$$d\mu = \left(\frac{i}{2}\right)^n dz_1 \wedge d\bar{z}_1 \wedge \ldots \wedge dz_n \wedge d\bar{z}_n$$

لقد تمكن بيدفورد وتايلور في بحثهما [1] من تعميم تعريف هذا المؤثر إلى توابع متعددة تحت توافقية محدودة محلياً (أي لتوابع ليست ملساء) وإثبات أن $(dd^c u)^n$ يشكل قياساً على المجموعة Ω .

إنّ المبرهنة التالية ، والتي تُعرف بمبدأ المقارنة ، تعبّر عن العلاقة بين تابعين متعددين تحت توافقيين عن طريق المقارنة بين قياسي مونج ـ أمبير لهما.

مبرهنة [12]

ليكن $u, v \in PSH(\Omega)$ بحيث $\liminf_{z\to\partial\Omega}\big(u(z) - v(z)\big) \geq 0$ ، وإذا كان $(dd^c u)^n \leq (dd^c v)^n$ بمعنى القياس على Ω ، عندئذ فإن $u \leq v$ في Ω .

نذكر الآن تعريف الساحة ذات الحدود غير الملساء التي نتعامل معها في بحثنا هذا.

تعريـــف.

نقول عن الساحة المحدودة $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ إنها ساحة ليبشتز فوق محدبة بقوة إذا وجدت مجموعة مفتوحة Ω' تحوي $\overline{\Omega}$ وتابع متعدد تحت توافقي يحقق شرط ليبشتز $\rho: \Omega' \to \mathbb{R}$ بحيث يكون:

- $\Omega = \{z \in \Omega';\ \rho(z) < 0\}$ و $\partial\Omega = \{z \in \Omega';\ \rho(z) = 0\}$.
- $dd^c\rho \geq \beta$ في Ω حيث $\beta = i/2 \sum_{j=1}^{n} dz_j \wedge d\overline{z_j}$.

مثال.

1. كل ساحة محدبة بقوة هي ساحة ليبشتز فوق محدبة بقوة، وذلك يعود لوجود تابع تعريف للساحة المحدبة بقوة ρ وهو تابع ليبشتز يحقق $\rho - c|z|^2$ محدب حيث c ثابت موجب.
2. كل ساحة شبه محدبة بقوة strictly psuedoconvex هي ساحة ليبشتز فوق محدبة بقوة.
3. تقاطع أي عدد منتهٍ من ساحات ليبشتز فوق محدبة بقوة هو أيضاً ساحة ليبشتز فوق محدبة بقوة.

بما أن مؤثر مونج ـ أمبير هو مؤثر غير خطي ، لذلك سيكون من المناسب تعريف مؤثر خطي يُساعدنا في الحسابات ويرتبط بمؤثر مونج ـ أمبير العقدي.

تعريـــف.

ليكن u تابع متعدد تحت توافقي في الساحة Ω ولنعرف المؤثر:

$$\Delta_H u := \sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial z_k \partial \overline{z_j}} h_{jk}$$

من أجل أي مصفوفة هرميتية معرفة موجبة H.

التمهيدية التالية تُبين أن تحت الحل الناتج عن استخدام مؤثر مونج ـ أمبير يتطابق مع تحت الحل الناتج عن المؤثر Δ_H .

تمهيدية 1. [10]

ليكن $u \in PSH(\Omega) \cap C(\Omega)$ و $0 \le f \in L^{\infty}(\Omega)$. عندئذٍ فإن الشرطين التاليين متكافئين:

1. $\Delta_H u \ge e^{\frac{c}{n}u} f^{\frac{1}{n}}(z)$ من أجل أي مصفوفة H هرميتية معرفة موجبة ومحددها n^{-n} .
2. $(dd^c u)^n \ge e^{cu} f(z)\, d\mu$.

النتائج ومناقشتها.

نريد بدايةً في هذا البحث إثبات وجود الحل المستمر للمسألة (1) عندما يكون تابع الكثافة f محدوداً وليس بالضرورة أن يكون مستمراً وتُعدّ هذه المبرهنة تعميماً للمبرهنة 3.2 في المقالة [3] .

مبرهنة1.

لتكن Ω ساحة ليبشتز فوق محدبة بقوة محدودة في $\mathbb{C}^n$ وليكن $\varphi \in C(\partial\Omega)$ و $0 \leq f \in L^{\infty}(\overline{\Omega})$ و μ قياس ليبيغ ، عندئذٍ تملك المسألة (1) حلاً وحيداً مستمراً.

الإثبات.

نعتمد في الإثبات على الآلية المتّبعة في المقالة [2] ، لنجعل $f \equiv 0$ في $\overline{\Omega}$ ، عندئذ يوجد حل مستمر للمسألة (1) استناداً إلى المبرهنة 3.2 في [3] ولنرمز له بـ u_1، كذلك إذا كان الطرف الثاني للمعادلة هو $\max_{\overline{\Omega}} f \,.\, e^{c \max |\varphi|}$ فإنّه يوجد حل مستمر للمسألة (1) كذلك استناداً إلى المبرهنة 3.2 في [3] ولنرمز له بـ u_2 .

لنعرف المجموعة:

$$A = \{v \in PSH(\Omega) \cap L^{\infty}(\overline{\Omega}); u_2 \leq v \leq u_1\}$$

إنّ هذه المجموعة محدبة ومتراصة وفق التبولوجيا الضعيفة أي أنه من أجل أي متتالية $\{v_j\}$ من A توجد متتالية جزئية $\{v_{j_k}\}$ من A متقاربة في $L^1_{loc}\,(\Omega)$ من تابع $v \in A$.

كما نعرّف المؤثر $G: A \to A$ بحيث يكون $G(v)$ هو الحل المستمر للمسألة

$$(dd^c w)^n = e^{cv} f(z)\, d\mu \quad in\ \Omega$$

$$w = \varphi \quad on\ \partial\Omega$$

إنّ هذا الحل موجود ومستمر بناءً على المبرهنة $3.3.2$ في [4] .

لنثبت الآن أنّ هذا المؤثر مستمر وفق تبولوجيا ـ$L^1(\Omega)$ ، لتكن $v_j \in A$ تتقارب من التابع v في $L^1(\Omega)$ عندها يمكننا الحصول على متتالية جزئية متقاربة تقريباً في كل مكان من التابع v .

لنفرض $m_i(z) = \inf_{j\geq i} f(z)\, e^{c\, v_j}$ و $M_i(z) = \sup_{j\geq i} f(z)\, e^{c\, v_j}$. من الواضح أنّ $m_i(z) \leq e^{cv_i} f(z) \leq M_i(z)$ ، وليكن $\tilde{v}_i$ و $\hat{v}_i$ الحلين المستمرين لمعادلة مونج ـ أمبير العقدية والموافقين للتابعين m_i و M_i على الترتيب. وبالتالي نستنتج أن $\hat{v}_i \leq G(v_i) \leq \tilde{v}_i$ و كما نجد أن المتتالية $\{\tilde{v}_i\}$ متناقصة و المتتالية $\{\hat{v}_i\}$ متزايدة و بحسب خواص التوابع المتعددة تحت التوافقية يكون $\tilde{v} := \lim \tilde{v}_i$ و $\hat{v} = (\lim \hat{v}_i)^*$ تابعين متعددين تحت توافقيين ويكون

$$(dd^c\hat{v})^n = (dd^c\tilde{v})^n = e^{cv}\, f(z)\, d\mu$$

وبحسب مبدأ المقارنة يكون $\tilde{v} = \hat{v}$ في Ω وبالتالي $\lim G(v_i) = \tilde{v} = \hat{v} = G(v)$

تقريباً في كل مكان وبالنتيجة المؤثر G مستمر وفق التبولوجيا الضعيفة.

بحسب مبرهنة شاودر للنقطة الثابتة يوجد $u \in A$ بحيث $G(u) = u$ ، أي نكون قد حصلنا على تابع u محدود ومتعدد تحت توافقي ويحقق

$$(dd^c u)^n = e^{cu}\, f(z)\, d\mu \quad , \qquad \lim_{z\to\xi} u(z) = \varphi(\xi), \forall \xi \in \partial\Omega$$

لنأخذ المسألة :

$$\begin{cases} w \in PSH(\Omega) \cap C(\overline{\Omega}) \\ (dd^c w)^n = e^{cu}\, f(z)\, d\mu \quad in\ \Omega \\ w = \varphi \quad on\ \partial\Omega \end{cases}$$

بما أن الطرف الثاني من المعادلة تابع محدود وبالتالي يكون للمسألة حلٌ وحيد مستمر بالاستفادة من المبرهنة $3.3.2$ في [4] ، وبالتالي فإن حل هذه المسألة الوحيد هو u ويكون مستمراً أيضاً.

أخيراً لنثبت وحدانية الحل للمسألة (1) ، لنفرض جدلاً وجود حلين مختلفين u_1, u_2 بحيث تكون المجموعة $V = \{u_1 < u_2\}$ غير خالية. وبالتالي يتحقق في المجموعة V ، بنتيجة تزايد التابع الأسي ، مايلي :

$$e^{cu_1} f(z) \leq e^{cu_2} f(z)$$

أي أنّ:

$$(dd^c u_1)^n \leq (dd^c u_2)^n$$

وبحسب مبدأ المقارنة يكون $u_1 \geq u_2$ في V و هذا تناقض ، وبهذا يكون قد تمّ إثبات المبرهنة.

هدفنا الآن في المبرهنة الثانية هو دراسة استمرارية هولدر للحل والوصول إلى قيمة أس أمثلية قرب حدود الساحة بدون الحاجة لإضافة شرط استمرارية للتابع f في $\overline{\Omega}$.

مبرهنة2.

لتكن Ω ساحة ليبشتز فوق محدبة بقوة محدودة في $\mathbb{C}^n$ وليكن $\varphi \in C^\alpha(\partial\Omega)$ حيث $0 < \alpha \leq 1$ و $0 \leq f \in L^\infty(\overline{\Omega})$ و μ قياس ليبيغ ، عندئذٍ يحقق حل المسألة (1) شرط هولدر التالي في الساحة $\Omega \setminus \Omega_\delta$:

$$|u(z+\tau) - u(z)| \leq C_a |\tau|^{\frac{\alpha}{2}} \quad ; |\tau| = a.\delta; \;\; a \leq 1 \,, \delta \ll 1$$

حيث C_a ثابت موجب يتعلق بالساحة Ω و $\left\|f^{1/n}\right\|_{L^\infty(\overline{\Omega})}$ و $\|\varphi\|_{C^\alpha(\partial\Omega)}$ و بحيث

$$\Omega_\delta := \{z \in \Omega \,; dist(z, \partial\Omega) > \delta\}$$

قبل البدء بإثبات هذه المبرهنة فإننا بحاجة إلى التمهيدية التالية والتي لها دور أساسي في تشكيل تحت حل للمسألة (1) .

تمهيدية2.

لتكن Ω ساحة ليبشتز فوق محدبة بقوة محدودة في $\mathbb{C}^n$ وليكن $\varphi \in C^{\alpha}(\partial\Omega)$ و من أجل أي نقطة $\theta \in \partial\Omega$ عندئذٍ يوجد v_θ تابع متعدد تحت توافقي ومستمر في $\overline{\Omega}$ بحيث

$$v_\theta \leq \varphi \;\; on \;\; \partial\Omega \;\; , \;\; v_\theta(\theta) = \varphi(\theta)$$

الإثبات.

بحسب تعريف الساحة Ω يمكننا إيجاد ثابت $B > 0$ كبير بقدرٍ كافٍ بحيث يكون

$$g(z) = B\rho(z) - |z - \theta|^2$$

هو تابع متعدد تحت توافقي في Ω . ولنعرّف التابع الآتي :

$$v(z) = -\big(-g(z)\big)^{\frac{\alpha}{2}} + \varphi(\theta)$$

المتعدد تحت توافقي والمستمر في $B(\theta, r) \cap \Omega$ وكما يحقق $v(\theta) = \varphi(\theta)$ و $v(z) \leq \varphi(z)$ في جوار صغير $B(\theta, r) \cap \partial\Omega$.

من أجل $x, y \in B(\theta, r) \cap \Omega$ بحيث $|x - y| \leq \delta$ فإنّ التابع v يحقق:

$$|v(x) - v(y)| \leq |g(x) - g(y)|^{\frac{\alpha}{2}}$$

لكن

$$|g(x) - g(y)| = \left|B\big(\rho(x) - \rho(y)\big) - |x - \theta|^2 + |y - \theta|^2\right|$$

وبما أن الساحة هي ساحة ليبشتز فإن ρ تابع تعريف الساحة يحقق شرط ليبشتز وبالتالي:

$$|g(x) - g(y)| \leq (B + 2r)|x - y|$$

ومنه نجد

$$|v(x) - v(y)| \leq C|x - y|^{\frac{\alpha}{2}}$$

لنختار عدد موجب γ_1 كبير بقدرٍ كافٍ بحيث يكون

$$\sup \varphi - \inf \varphi \leq \gamma_1(-B\rho(z) + |z - \theta|^2)^{\alpha/2}$$

من أجل $z \in \partial B(\theta, r) \cap \partial\Omega$ وبشكل أكثر دقة ، يمكن اختيار

$$\gamma_1 \geq \frac{\sup \varphi - \inf \varphi}{r^\alpha}$$

وبالتالي نجد:

$$\gamma_1 v(z) - (\gamma_1 - 1)\varphi(\theta) \leq \inf \varphi$$

من أجل $z \in \partial B(\theta, r) \cap \overline{\Omega}$.

وكذلك

$$\gamma_1 v(z) - (\gamma_1 - 1)\varphi(\theta) = -\gamma_1 |z - \theta|^\alpha + \varphi(\theta) \leq \varphi(z)$$

من أجل $z \in B(\theta, r) \cap \partial\Omega$.

لنعرّف التابع:

$$v_\theta(z) = \begin{cases} \max\{\gamma_1 v(z) - (\gamma_1 - 1)\,\varphi(\theta), \inf \varphi\}\,; & z \in B(\theta, r) \cap \overline{\Omega} \\ \inf \varphi \qquad ; & z \in \overline{\Omega} \setminus B(\theta, r) \end{cases}$$

المتعدد تحت توافقي في Ω و المستمر في $\overline{\Omega}$ و يحقق $v_\theta(z) \leq \varphi(z)$ على $\partial\Omega$.

ومما سبق نستنتج أن v_θ يحقق شرط هولدر وأس هولدر هو $\alpha/2$.

بعد تشكيل التابع v_θ سنقوم بالحصول على تحت حل للمعادلة وحساب أس هولدر له وذلك في إثبات المبرهنة 2.

إثبات المبرهنة 2.

لنأخذ $\theta \in \partial\Omega$ ولنوجد تحت حل h_θ للمسألة (1) أي $h_\theta \in PSH(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ و $h_\theta \leq \varphi$ على $\partial\Omega$ و $\Delta_H h_\theta \geq e^{\frac{c}{n}h_\theta} f^{\frac{1}{n}}(z)$ و بالإضافة إلى $h_\theta(\theta) = \varphi(\theta)$.

لنضع $K_1 = \max_{\overline{\Omega}} f^{\frac{1}{n}} . e^{\frac{c}{n}\max\ |\varphi|}$ ولنأخذ $z_0 \in \Omega$ عندئذٍ يكون:

$$\Delta_H(K_1|z - z_0|^2) = K_1\Delta_H(|z - z_0|^2) \geq f^{\frac{1}{n}}(z)\ . e^{\frac{c}{n}\max|\varphi|}$$

لنعرف التابع φ_θ المستمر على $\partial\Omega$ بالشكل

$$\varphi_\theta\ (\mathrm{z}) = \varphi(z) - K_1|z - z_0|^2 + K_1|\theta - z_0|^2$$

عندئذٍ يوجد تابع v_θ يحقق شروط التمهيدية السابقة بالنسبة للتابع $\varphi_\theta\ (\mathrm{z})$ وبالتالي يكون تحت الحل المراد تشكيله يعطى بالعلاقة:

$$h_\theta(z) = v_\theta(z) + K_1|z - z_0|^2 - K_1|\theta - z_0|^2$$

واضح أن $h_\theta \in PSH(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ ، كما أن $h_\theta(\theta) = \varphi(\theta)$ و $h_\theta \leq \varphi$ على حدود الساحة لأنّ:

$$v_\theta(z) \leq \varphi_\theta\ (\mathrm{z}) = \varphi(z) - K_1|z - z_0|^2 + K_1|\theta - z_0|^2$$

لدينا

$$\Delta_H h_\theta \geq \Delta_H v_\theta + K_1\Delta_H|z - z_0|^2 \geq \max_{\Omega} f^{\frac{1}{n}} . e^{\frac{c}{n}\max|\varphi|} \geq f^{\frac{1}{n}}(z)e^{\frac{c}{n}h_\theta}$$

من أجل $x, y \in \Omega$ بحيث $|x - y| \leq \delta$ فإن التابع h_θ يحقق:

$$|h_\theta(x)-h_\theta(y)|=|v_\theta(x)-v_\theta(y)+K_1|x-z_0|^2-K_1|y-z_0|^2|$$
$$\leq |x-y|^{\frac{\alpha}{2}}+2dK_1|x-y|\leq C|x-y|^{\frac{\alpha}{2}}$$

حيث $C=1+2dK_1$ و d قطر الساحة Ω .

نستنتج أن h_θ يحقق شرط هولدر وأس هولدر هو $\alpha/2$.

لنعرف التابع hالمطلوب إيجاده على أنه الحد الأعلى الأصغري لمجموعة التوابع h_θ من أجل أي $\theta\in\partial\Omega$ أي يكون:

$$h(z)=\sup\{h_\theta(z);\ \theta\in\partial\Omega\}$$

وبالنتيجة فإن h مستمر ويحقق شرط هولدر بالأس $\frac{\alpha}{2}$ و بما أنّ h مستمر و يمثل sup لتوابع متعددة تحت توافقية يكون h متعدد تحت توافقي في Ω وبالإضافة إلى ذلك نلاحظ $h(\theta)=\varphi(\theta)$ من أجل أي $\theta\in\partial\Omega$.

وبالاستفادة من تمهيدية Choquet [12] توجد أسرة قابلة للعد $(h_{\theta_j}(z))$ بحيث يكون

$$h^*(z)=\left(\sup(h_{\theta_j}(z))\right)^*$$

وبالتالي توجد متتالية متزايدة من التوابع h_j المتقاربة تقريباً في كل مكان من التابع h ومنه نستنتج أنّ:

$$\Delta_H h=\lim\Delta_H h_j\geq e^{\frac{c}{n}h}\,f^{\frac{1}{n}}(z)$$

حيث تم الانتقال إلى النهاية بالطرف الأيمن لنحصل على التابع h وذلك بنتيجة استمرارية التابع الأسي ولا حاجة هنا للاستمرارية للتابع f .

الآن ينتج من التمهيدية 1 ما يلي:

$$(dd^ch)^n\geq e^{c.h}\,f(z)\,d\mu$$

وبالتالي فإن h يمثل تحت حل للمسألة (1) وهذا يعني أن $h \le u$ في $\overline{\Omega}$.

لنوجد الآن تابعاً g بحيث يكون $u \le g$ في $\overline{\Omega}$ و $g = \varphi$ على $\partial\Omega$ ، لذلك يمكننا الاستفادة من طريقة التشكيل السابقة للتابع h. لنضع $\varphi_1 := -\varphi$ عندئذٍ باتباع نفس طريقة التشكيل السابقة نحصل على تابع h_1 متعدد تحت توافقي في Ω ويحقق $h_1(\theta) = \varphi_1(\theta)$ من أجل أي نقطة $\theta \in \partial\Omega$ بالإضافة إلى كونه مستمر ويحقق شرط هولدر بالأس $\alpha/2$. لذلك نعرف التابع $g := -h_1$ عندها يكون $u \le g$ في $\overline{\Omega}$ وذلك لأن $u + h_1 = u - g$ تابع متعدد تحت توافقي ويساوي الصفر على $\partial\Omega$ وبالتالي بحسب مبدأ القيمة العظمى يكون

$$u + h_1 = u - g \le 0 \quad on\, \overline{\Omega}$$

أصبح لدينا $h \le u \le g$ في $\overline{\Omega}$ و كذلك $h = u = g = \varphi$ على $\partial\Omega$.

وبالتالي من أجل أي نقطة $\theta \in \partial\Omega$ و $z \in \Omega$ نحصل على المتراجحة

$$-C|z-\theta|^{-\alpha/2} \le h(z) - \varphi(\theta) \le u(z) - \varphi(\theta) \le g(z) - \varphi(\theta) \le C|z-\theta|^{\alpha/2}$$

أي نستنتج أنّ

$$|u(z) - u(\theta)| \le C|z-\theta|^{\frac{\alpha}{2}} \;;\; \theta \in \partial\Omega \;, z \in \Omega$$

لتكن $z_1, z_2 \in \Omega \setminus \Omega_\delta$ بحيث $|z_1 - z_2| \le \delta$ ، عندها توجد نقطتان من حدود الساحة $\theta_1, \theta_2 \in \partial\Omega$ بحيث $|z_i - \theta_i| \le \delta$ من أجل $i = 1,2$ وكذلك $|\theta_1 - \theta_2| \le \delta$ وبالتالي نستطيع أن نكتب:

$$|u(z_1) - u(z_2)| \le |u(z_1) - u(\theta_1)| + |\varphi(\theta_1) - \varphi(\theta_2)| +$$
$$+|u(\theta_2) - u(z_2)| \le C|z-\theta|^{\frac{\alpha}{2}}$$

حيث C ثابت موجب يتعلق بـ $\left\|f^{1/n}\right\|_{L^\infty(\overline{\Omega})}$ و $\|\varphi\|_{C^\alpha(\partial\Omega)}$ والساحة Ω .

أخيراً ، لتكن $z \in \Omega \setminus \Omega_\delta$ و $\tau \in \mathbb{C}^n$ بحيث $|\tau| = a.\delta$ و $0 < a \leq 1$ نجد مما تقدّم أنّ

$$|u(z+\tau) - u(z)| \leq C_a |\tau|^{\frac{\alpha}{2}}$$

حيث C_a ثابت موجب يتعلق بالساحة Ω و $\left\|f^{1/n}\right\|_{L^\infty(\overline{\Omega})}$ و $\|\varphi\|_{C^\alpha(\partial\Omega)}$.

ينتج من المبرهنة 2 أن استمرارية هولدر للحل لا تتعلق باستمرارية تابع الكثافة f و لكن في المبرهنة التالية عند دراسة استمرارية هولدر للحل على كامل الساحة سنكون بحاجة إلى شروط إضافية كما يلي:

مبرهنة3.

لتكن Ω ساحة ليبشتز فوق محدبة بقوة محدودة في $\mathbb{C}^n$ وليكن $\varphi \in C^\alpha(\partial\Omega)$ و $f \in C^\beta(\overline{\Omega})$ حيث $0 < \alpha, \beta \leq 1$ ، عندئذٍ يكون حل المسألة (1) $u \in C^\gamma(\overline{\Omega})$ حيث $\gamma = \min\{\frac{\alpha}{2}, \frac{\beta}{n}\}$.

الإثبات.

لنأخذ نقطة $z_0 \in \Omega$ و أي متجه $\tau \in \mathbb{C}^n$ بحيث $|\tau| \ll 1$ ولنعرف التابع:

$$V(z,\tau) = \begin{cases} \max\{u(z), \psi(z)\} & ; \ z \in \overline{\Omega}, z+\tau \in \Omega \\ u(z) & ; \ z \in \overline{\Omega}, z+\tau \notin \Omega \end{cases}$$

حيث

$$\psi(z) = u(z+\tau) + C_1|\tau|^\gamma(|z-z_0|^2 - d^2 - 1)$$

و d هو قطر الساحة Ω و $\gamma = \min\{\frac{\alpha}{2}, \frac{\beta}{n}\}$ كما أن الثابت C_1 يُعطى بالعلاقة

$C_1 = \max\{C, \|\varphi\|_{C^\alpha(\partial\Omega)}, e^{\frac{c}{n}\max|\varphi|}\|f\|^{1/n}_{C^\beta(\overline{\Omega})}\}$.

نلاحظ أولاً أنّ التابع ψ متعدد تحت توافقي ومستمر $\{z \in \mathbb{C}^n; z \in \Omega, z + \tau \in \Omega\}$، ومن أجل $z \in \Omega$ و $z + \tau \in \partial\Omega$ فإنّ:

$$\psi(z) - u(z) \leq C|\tau|^{\frac{\alpha}{2}} + C_1|\tau|^{\gamma}(|z - z_0|^2 - d^2 - 1) \leq 0$$

وبالتالي فإن $\psi(z) \leq u(z)$ حيث $z \in \Omega$ و $z + \tau \in \partial\Omega$.

وبالنتيجة بحسب خواص التوابع المتعددة تحت التوافقية يكون $V \in PSH(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$.

نريد أن نبيّن أنّ $V = \varphi$ على $\partial\Omega$ ، في الواقع إذا كان $z \in \partial\Omega$ ولنناقش الحالتين عندما $z + \tau \in \Omega$ و $z + \tau \notin \Omega$:

1. إذا كان $z + \tau \in \Omega$ و $z \in \partial\Omega$ فإنه ينتج من علاقة تعريف التابع V أنّ $V(z) = \max\{u(z), \psi(z)\} = u(z)$ وذلك لأن

$$\psi(z) - u(z) \leq C|\tau|^{\frac{\alpha}{2}} + C_1|\tau|^{\gamma}(|z - z_0|^2 - d^2 - 1) \leq 0$$

2. إذا كان $z + \tau \notin \Omega$ و $z \in \partial\Omega$ فإنّ $V(z) = u(z) = \varphi(z)$.

لنثبت أنّ $\Delta_H V \geq e^{\frac{c}{n}V} f^{\frac{1}{n}}(z)$ في Ω ، لدينا التابع u هو حل للمسألة وبالتالي $\Delta_H u \geq e^{\frac{c}{n}u} f^{\frac{1}{n}}(z)$ يبقى أن نثبت أنّ $\Delta_H \psi \geq e^{\frac{c}{n}\psi} f^{\frac{1}{n}}(z)$ ، لدينا:

$$\Delta_H \psi \geq e^{\frac{c}{n}u(z+\tau)} f^{\frac{1}{n}}(z + \tau) + C_1|\tau|^{\gamma}\Delta_H|z - z_0|^2$$

$$\geq e^{\frac{c}{n}u(z+\tau)} f^{\frac{1}{n}}(z + \tau) + C_1|\tau|^{\gamma}$$

$$\geq e^{\frac{c}{n}u(z+\tau)} f^{\frac{1}{n}}(z + \tau) + e^{\frac{c}{n}\max|\varphi|}\|f\|_{C^{\beta}(\overline{\Omega})}^{1/n}|\tau|^{\gamma}$$

$$\geq e^{\frac{c}{n}u(z+\tau)} f^{\frac{1}{n}}(z + \tau) + e^{\frac{c}{n}\max|\varphi|}\|f\|_{C^{\beta}(\overline{\Omega})}^{1/n}|\tau|^{\beta/n}$$

$$\geq e^{\frac{c}{n}u(z+\tau)} f^{\frac{1}{n}}(z+\tau) + e^{\frac{c}{n}\max|\varphi|} |f(z+\tau) - f(z)|^{1/n}$$

$$\geq e^{\frac{c}{n}u(z+\tau)} f^{\frac{1}{n}}(z+\tau) + e^{\frac{c}{n}u(z+\tau)} \left| f^{\frac{1}{n}}(z+\tau) - f^{\frac{1}{n}}(z) \right|$$

$$\geq e^{\frac{c}{n}u(z+\tau)} f^{\frac{1}{n}}(z) \geq e^{\frac{c}{n}\psi(z)} f^{\frac{1}{n}}(z)$$

وبحسب التمهيدية 1 يكون

$$(dd^c\psi)^n \geq e^{c\psi} f(z)\, d\mu$$

وهذا يعني أنّ V تحت حل للمسألة 1 وبالتالي $V \leq u$ في $\overline{\Omega}$. بالنتيجة إذا كان $z \in \Omega$

و $z + \tau \in \overline{\Omega}$ نجد:

$$u(z+\tau) + C_1|\tau|^{\gamma}(|z - z_0|^2 - d^2 - 1) \leq u(z)$$

وبالتالي

$$\begin{aligned} u(z+\tau) - u(z) &\leq C_1(d^2+1)|\tau|^{\gamma} - C_1\, |z - z_0|^2 |\tau|^{\gamma} \\ &\leq C_1(d^2+1)|\tau|^{\gamma} \end{aligned}$$

وهذا ما يثبت أن التابع u يحقق شرط هولدر بالأس γ .

لا بدّ من الإشارة في المثال التالي إلى أنّ قيمة أس هولدر للحل ، في المبرهنتين السابقتين، أمثلية أي أنه في الحالة العامة لا يمكن أن تكون أفضل من نصف قيمة أس هولدر للتابع φ المعرف على حدود الساحة.

مثال:

لنأخذ التابع $\varphi(z) = -\left(\frac{1+Re\, z_1}{2}\right)^{1/2}$ المعرف على كرة الواحدة $\partial\mathbb{B}$ في $\mathbb{C}^n$.

واضح أن هذا التابع مستمر على $\partial\mathbb{B}$ ومن أجل أي نقطتين $z, t \in \partial\mathbb{B}$ فإنّ:

$$|\varphi(z)-\varphi(t)| = \left|\left(\frac{1+Re\,z_1}{2}\right)^{1/2} - \left(\frac{1+Re\,t_1}{2}\right)^{1/2}\right|$$

بما أن $z, t \in \partial\mathbb{B}$ فإن

$$Re\,z_1 = -\sqrt{1 - Im^2 z_1 - |z'|^2}$$

$$Re\,t_1 = -\sqrt{1 - Im^2 t_1 - |t'|^2}$$

وبالتالي

$$\left|\left(\frac{1+Re\,z_1}{2}\right)^{1/2} - \left(\frac{1+Re\,t_1}{2}\right)^{1/2}\right| \le \frac{|z-t|}{\sqrt{2}}$$

وبالتالي $\varphi \in C^{0,1}(\partial\mathbb{B})$.

لنشكل التابع $u = \chi \circ v$ بحيث $\chi(t) = -\sqrt{-t}$ تابع متزايد محدب على المجال $[-1,0]$ و $v(z) = -(1 + Re\,z_1)/2$ تابع متعدد تحت توافقي في $\mathbb{B}$ ومستمر على $\overline{\mathbb{B}}$ وبالتالي بحسب خواص مجموعة التوابع $PSH(\Omega)$ ينتمي التابع uإلى $PSH(\mathbb{B}) \cap C(\overline{\mathbb{B}})$ و هو بالفعل حل المسألة التالية:

$$\begin{cases} u \in PSH(\mathbb{B}) \cap C(\overline{\mathbb{B}}) \\ (dd^c u)^n = 0 \quad in\ \mathbb{B} \\ \quad u = \varphi \quad on\ \partial\mathbb{B} \end{cases}$$

وبحسب المبرهنتين 2 و3 سيكون التابع u محققاً لشرط هولدر وأسه يساوي $1/2$. لنبيّن الآن أنّ أس هولدر للحل لا يمكن أن يتجاوز هذه القيمة. لنأخذ النقطتين التاليتين من $\overline{\mathbb{B}}$

$$z_0 = (-1,0,0,\dots,0) \quad , \quad z = (-1+2t, 0,0\,,\dots,0)$$

حيث $0 \le t \le 1$ ، نجد:

$$|u(z) - u(z_0)| = \sqrt{t} = \frac{1}{\sqrt{2}} |z - z_0|^{1/2}$$

أخيراً، سيكون من المفيد التطرّق إلى حالة خاصة يكون فيها الحل قطرياً بمعنى أنه يتعلق بنصف قطر الكرة و إثبات أنّ هذا الحل يحقق شرط ليبشتز.

مبرهنة4.

ليكن $0 \le f \in C(\overline{\mathbb{B}})$ تابع قطري أي $f(z) = f(|z|)$ ، عندئذٍ فإن حل مسألة ديرخليه

$$\begin{cases} u \in PSH(\mathbb{B}) \cap C(\overline{\mathbb{B}}) \\ (dd^c u)^n = f(z)\, d\mu \quad \ in \ \mathbb{B} \\ u = a \ \ on \ \partial\mathbb{B} \end{cases}$$

حيث a ثابت حقيقي ، يُعطى بالعلاقة:

$$u(r) = a - 2(2n)^{1/n} \int_r^1 \frac{1}{t} \left(\int_0^t \rho^{2n-1}\ f(\rho)\, d\rho \right)^{\frac{1}{n}} dt\,; r = |z|,$$

علاوةً على ذلك، فإنّ هذا الحل يحقق شرط ليبشتز أي:

$$|u(r) - u(r')| \le C\, |r - r'|$$

حيث C ثابت يتعلق بـ $\left\|f^{1/n}\right\|_{L^\infty(\overline{\mathbb{B}})}$.

الإثبات.

بما أن f تابع قطري مستمر على $\overline{\mathbb{B}}$ عندها يمكن تمديده إلى تابع $\tilde{f}$ أيضاً مستمر وقطري في كرة B' تحوي $\overline{\mathbb{B}}$ ، لنأخذ الآن التابع:

$$f_k = \tilde{f} * \rho_k + 1/k$$

حيث ρ_k هي التوابع الملساء ذات الدعامة المتراصة وتكاملها يساوي الواحد .

وبالتالي فإن $0 < f_k \in C^\infty(B')$ ، كما أن $\{f_k\}$ تتقارب بانتظام إلى التابع $\widetilde{f}$ على أي مجموعة متراصة في B' أي تتقارب بانتظام في $\overline{\mathbb{B}}$ من التابع f.

بحسب [14] يوجد حل وحيد مستمر قطري u_k في $\overline{\mathbb{B}}$ يحقق :

$$(dd^c u_k)^n = f_k \, d\mu \quad , \qquad u_k = a$$

ويُعطى بالعلاقة:

$$u_k(r) = a - 2(2n)^{1/n} \int_r^1 \frac{1}{t} \left(\int_0^t \rho^{2n-1} \; f_k(\rho) \, d\rho \right)^{\frac{1}{n}} dt$$

إنّ المتتالية $\{u_k\}$ تتقارب بانتظام إلى التابع u المعرّف بالعلاقة:

$$u(r) = a - 2(2n)^{\frac{1}{n}} \int_r^1 \frac{1}{t} \left(\int_0^t \rho^{2n-1} \; f(\rho) \, d\rho \right)^{\frac{1}{n}} dt \; ; r = |z|$$

في الواقع، لدينا

$$|u_k(r) - u(r)| = \left| 2(2n)^{\frac{1}{n}} \int_r^1 \frac{1}{t} \left[\left(\int_0^t \rho^{2n-1} \; f_k(\rho) \, d\rho \right)^{\frac{1}{n}} - \left(\int_0^t \rho^{2n-1} \; f(\rho) \, d\rho \right)^{\frac{1}{n}} \right] dt \right|$$

$$\leq 2(2n)^{\frac{1}{n}} \int_r^1 \frac{1}{t} \left(\int_0^t \rho^{2n-1} \; |f_k(\rho) - f(\rho)| \, d\rho \right)^{\frac{1}{n}} dt$$

$$\leq 2(2n)^{\frac{1}{n}} \, \|f_k - f\|_{L^\infty(\overline{\mathbb{B}})}^{\frac{1}{n}} \int_r^1 \frac{1}{t} \left(\int_0^t \rho^{2n-1} \; d\rho \right)^{\frac{1}{n}} dt$$

$$= \|f_k - f\|_{L^\infty(\overline{\mathbb{B}})}^{\frac{1}{n}} (1 - r^2)$$

وبالتالي نحصل على حد أعلى لنظيم التابع $u_k - u$ في $L^{\infty}(\overline{\mathbb{B}})$، أي

$$\|u_k - u\|_{L^{\infty}(\overline{\mathbb{B}})} \leq \ \|f_k - f\|_{L^{\infty}(\overline{\mathbb{B}})}^{\frac{1}{n}} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$$

وهذا ما يؤكد التقارب بانتظام للمتتالية $\{u_k\}$ في $\overline{\mathbb{B}}$ وبالتالي نستنتج أن تابع النهاية $u \in PSH(\mathbb{B}) \cap C(\overline{\mathbb{B}})$ وكذلك $(dd^c u)^n = f(z)\, d\mu$ في كرة الواحدة $\mathbb{B}$ كما أنّ $u(1) = a$. لندرس الآن استمرارية هولدر للحل الناتج u ، ليكن $0 < r < r' \leq 1$ عندها يكون:

$$|u(r) - u(r')| = 2(2n)^{\frac{1}{n}} \int_r^{r'} \frac{1}{t}\left(\int_0^t \rho^{2n-1}\ f(\rho)\, d\rho\right)^{\frac{1}{n}} dt$$

$$\leq 2(2n)^{\frac{1}{n}}\, \|f\|_{L^{\infty}(\overline{\mathbb{B}})}^{\frac{1}{n}} \int_r^{r'} \frac{1}{t}\left(\int_0^t \rho^{2n-1}\ \ d\rho\right)^{\frac{1}{n}} dt$$

$$\leq \|f\|_{L^{\infty}(\overline{\mathbb{B}})}^{\frac{1}{n}} (r'^2 - r^2) \leq 2\ \|f\|_{L^{\infty}(\overline{\mathbb{B}})}^{\frac{1}{n}} (r' - r)$$

وبالتالي فإن التابع u يحقق شرط ليبشتز في $\overline{\mathbb{B}}$ ويكون

$$\|u\|_{C^{0,1}(\overline{\mathbb{B}})} \leq 2\ \|f\|_{L^{\infty}(\overline{\mathbb{B}})}^{\frac{1}{n}}$$

مثال:

ليكن لدينا التابع $f(z) = |z|$ المعرف والمستمر على $\overline{\mathbb{B}}$ ولتكن مسألة ديرخليه الآتية:

$$\begin{cases} u \in PSH(\mathbb{B}) \cap C(\overline{\mathbb{B}}) \\ (dd^c u)^n = |z|\, d\mu \quad\ \ in\ \ \mathbb{B} \\ u = 0\ \ on\ \partial\mathbb{B} \end{cases}$$

بحسب المبرهنة 4 فإنّ حل المسألة يُعطى بالعلاقة:

$$u(z) = -\left(\frac{2n}{2n+1}\right)^{1+1/n}\left(1 - |z|^{2+1/n}\right)$$

المقترحات والتوصيات.

1. هل يمكن أن ينتمي الحل إلى الفضاء $C^{1,\alpha}$ أي هل يمكن أن يكون الحل قابلاً للاشتقاق ومشتقه يحقق شرط هولدر في حالات خاصة كأن يكون القياس μ هو قياس ليبيغ.
2. هل يمكن أن يكون الحل يحقق شرط هولدر في كامل الساحة في حالة كون القياس محدود بشكل أسي بدلالة استطاعة بيدفورد – تايلور أي

$$\mu(K) \le A.\, e^{-cap(K,\Omega)^{-1/n}}$$

المراجع العلميـة.

[1] – E. Bedford and B. A. Taylor, "The Dirichlet problem for a complex Monge–Ampere equation", Invent. Math. 37 (1976), 1–44.

[2] – U. Cegrell, "On the Dirichlet problem for the complex Monge–Ampère operator ", Math. Z. 185 (1984), no. 2 ,247–251.

[3] – M. Charabati, "Hölder regularity for solutions to complex Monge–Ampère equations ", Annales Polonici Mathematici 113 (2015), 109–127 .

[4] – M. Charabati, "The Dirichlet problem for Complex Monge–Ampère equations", PhD Thesis defended on January 14, 2016, http://www.theses.fr/19271614X

[5] – M. Charabati, "Regularity of solutions to the Dirichlet problem for Monge–Ampère equations", Indiana University Mathematics Journal 66 (2017), no.6, 2187–2204.

[6] – M. Charabati, "The existence of a continuous solution to the complex Monge– Ampère equation for a measure satisfying some conditions", Al–Baath University Journal 44 (2022), in Arabic.

[7] – M. Charabati, " Modulus of continuity of the solution to the Dirichlet problem for a complex Monge– Ampère equation", Al–Baath University Journal (2023), in Arabic.

[8] – V. Guedj, S. Kolodziej and A. Zeriahi, "Holder continuous solutions to Monge–Ampère equations", Bull. Lond. Math. Soc. 40 (2008), 1070–1080.

[9] – V. Guedj and A. Zeriahi, "Degenerate complex Monge–Ampère equations", EMS Tracts in mathematics 26, European Mathematical Society, (2017).

[10] – V. Guedj, C.H. Lu and A. Zeriahi, "Weak subsolutions to complex Monge–Ampère equations", J. Math. Japan 71(3) 727–738, (2019).

[11] – L.M. Hai and V. Van Quan, Hölder continuity for solutions of the complex Monge–Ampère type equation", Journal of Mathematical Analysis and Applications, 494 (2021) 124586.

[12] –M. Klimek, " Pluripotential theory", London mathematical Society Monographs,6, Clarendon Press, Oxford, (1991).

[13] – S. Kolodziej, "The complex Monge–Ampère equation", Acta Math. 180 (1998), 69–117.

[14] – D. Monn, "Regularity of the complex Monge–Ampère equation for radially symmetric functions of the unit ball ", Math. Ann. 275 (1986), no.3 , 501-511.