دراسة مسألة التحريك الحدية الأولى لنظرية المرونة الرياضية

د . أحمد الجاعور – أستاذ مساعد في كلية العلوم – جامعة البعث

مقدمة البحث :

نستعرض الرموز والتعاريف اللازمة لتوضيح محتوى هذا البحث [1]، [2] :

لتكن $x=(x_1,x_2,x_3)$, $y=(y_1,y_2,y_3)$ نقاط من الفضاء R^3 ؛ حيث المسافة بين x و y هي : $|x-y|=\left(\sum_{k=1}^{3}(x_k-y_k)^2\right)^{\frac{1}{2}}$. ولتكن $D_0\subset R^3$ منطقة منتهية محدودة بالسطوح المغلقة $S_0,S_1,...,S_m$ من الصف $\Lambda_2(\alpha);0<\alpha\le 1$ ؛ حيث S_0 مغلّف لكل S_k و $S_i\cap S_k=\Phi;i\neq k,i,k=\overline{0,m}$.

تعريف 1 : نقول عن السطح S إنَّه ينتمي للصف $\Lambda_k(\alpha);0<\alpha\le 1$ ؛ حيث k أي عدد طبيعي ، إذا وجد عدد موجب d ؛ بحيث إنَّ كل نقطة $z\in S$ تقابل جملة متعامدة منظَّمة من المتجهات $v^i(z)=\left(v_1^i(z),v_2^i(z),v_3^i(z)\right);i=1,2,3$ ؛ وبحيث إنَّ الجزء من S المحدود داخل الاسطوانة $\left(z,v(z),\mathrm{d}\right)$ ليس له أي نقاط مشتركة مع قاعدتي الاسطوانة .

نرمز بـ D_k للمنطقة المنتهية والمحدودة بـ S_k ; $k=\overline{1,m}$ ، أيضاً :

$$\overline{D_0}=D_0\cup\left(\bigcup_{k=0}^{m}S_k\right),\overline{D_k}=D_k\cup S_k\ ;k=\overline{1,m}$$

نرمز بـ L للمجال $(0,l)$ و $\overline{L}$ للمجال $[0,l]$ كما نرمز بـ $\Omega_k=D_k\times L$ لاسطوانة في R^4 و $\overline{\Omega_k}=\overline{D_k}\times\overline{L}$ ؛ حيث $k=\overline{0,m}$. نرمز بـ O للامتناهي في الكبر .

إذا كانت $A=\left[A_{ij}\right]_{(3,3)}$ مصفوفة ، فإنَّ : $|A|^2=\sum_{i,j=1}^{3}A_{ij}^2$. كما نرمز بـ $T_{[.]}$ لمنقولها

نرمز بـ $C^k(\Omega)$ (k عدد صحيح غير سالب) لفضاء الدوال المعرَّفة على Ω ، والتي مشتقاتها حتى المرتبة k مستمرة في Ω ، ونرمز بـ $C^k(\overline{\Omega})$ لصف الدوال من $C^k(\Omega)$ والتي مشتقاتها مستمرة في كل نقطة من نقاط حدود المنطقة Ω .

تأخذ **متراجحة بيسل** الشكل الآتي :

$$\|f\|^2 = (f, f) \geq \sum_{\alpha\in X} \frac{|f, \varphi_\alpha|^2}{(\varphi_\alpha, \varphi_\alpha)} = \sum_{\alpha\in X} \left|\left(f, \frac{\varphi_\alpha}{\|\varphi_\alpha\|}\right)\right|^2$$

حيث f عنصر من فضاء هلبرت ، φ_α جملة غير صفرية متعامدة في فضاء هلبرت .

تأخذ **متراجحة كوشي – بونياكوفسكي** الشكل الآتي :

$$\left[\int_a^b f(x).g(x)dx\right]^2 \leq \int_a^b f^2(x)dx.\int_a^b g^2(x)dx$$

مبرهنة هلبرت–شميدت : إذا كانت النواة $k(x,s)$ قابلة للجمع مع دالة تربيعية بمتحولين فالمتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(f, \varphi_n)}{\lambda_n} \varphi_n(x)$ ، تتقارب وسطياً من الدالة $\int_a^b K(x,s)f(s)ds$

تعريف 2 : نقول عن المتجه $u(x,t) = (u_1(x,t), u_2(x,t), u_3(x,t))$ إنَّه منتظم في $\Omega_k; (\mathrm{x} \in D_k, \mathrm{t} \in \mathrm{L})$ ، إذا كان : $u_i(x,t) \in C^1(\overline{\Omega_k}) \cap C^2(\Omega_k)$ وذلك من أجل : $i = 1,2,3, x \in D_k, t \in L$.

تعريف 3 : إذا كانت $F(X)$ مصفوفة مربَّعة من المرتبة الثالثة عناصرها عبارة عن مشتقات جزئية ، فإنَّ تنسور غرين C يعرَّف بالعلاقة التالية : $C(X) = {}_{F(X)}T.F(X)$

تعريف 4 : نقول عن الوسط المرن إنَّه متجانس ومتساوي الخواص إذا كانت خواص المرونة واحدة لهذا الوسط في كل الاتجاهات . أو أنَّ ثوابت المرونة للوسط لا تتعلق بتوجيه المحاور الإحداثية [3] .

إنَّ جملة المعادلات التفاضلية لنظرية المرونة الكلاسيكية في حالة التحريك ومن أجل الأوساط المرنة المتجانسة والمتساوية الخواص تعطى بالشكل [3] :

$$\mu\Delta u + (\lambda+\mu)\mathrm{graddiv}u + F(x,t) = \rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \qquad (1)$$

حيث $u(x,t) = (u_1, u_2, u_3)$ متجه الانزياح ، Δمؤثر لابلاس ثلاثي البعد ، $F(x,t)$ متجه القوة الحجمية ، $\rho > 0$ كثافة الوسط و t الزمن ، μ , λ ثوابت لاما للمرونة وهي تحقق الشروط : $3\lambda + 2\mu > 0$, $\mu > 0$.

سنتعامل في هذا البحث فقط مع الدوال المتجهية الحقيقية ؛ حيث أي متجه ثلاثي

البعد $f=(f_1,f_2,f_3)$ ، مع النظيم $|f|=\sqrt{\sum_{k=1}^{3} f_k^2}$ ، سنعتبره كمصفوفة عمود من المرتبة $(3,1)$ ، أي $f=[f_k]_{(3,1)}$.

بفرض $A(\partial_x)\equiv[A_{ik}(\partial_x)]_{3\times3}$ مؤثر تفاضلي مصفوفي فيه :

$$A_{ij}(\partial_x)\equiv\delta_{ij}\ \mu\ \Delta+(\lambda+\mu)\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}$$

حيث δ_{ij} ديلتا كرونيكر . فجملة المعادلات (1) تكتب بالشكل المصفوفي الآتي :

$$A(\partial_x)u(x,t)-\rho\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}=-F(x,t) \qquad (2)$$

يدعى المؤثر التفاضلي المصفوفي : $T(\partial_x,n(x))\equiv\left[T_{ij}(\partial_x,n(x))\right]_{3\times3}$ ؛

حيث :

$$T_{ij}(\partial_x,n(x))=\lambda n_i(x)\frac{\partial}{\partial x_j}+\lambda n_j(x)\frac{\partial}{\partial x_i}+\mu\delta_{ij}\frac{\partial}{\partial n(x)}$$

مؤثر الإجهاد و $n(x)$ هو متجه الوحدة الاختياري في النقطة x (إذا كان : $x\in S_k\ ;k=\overline{1,m}$ ، فإنَّ $n(x)$ يكون ناظماً خارجياً للمنطقة D_0) .

إذا فرضنا أنَّ المناطق $D_k\ ;k=\overline{0,r}$ كانت ممتلئة بأوساط مرنة متجانسة ومتساوية الخواص مع ثوابت لاما $\lambda_k\ ,\mu_k$ والكثافة ρ_k ، بينما المناطق الأخرى $D_k\ ;k=\overline{r+1,m}$ كانت فارغة ، فإنَّ المؤثرات $A(\partial_x)$ و $T(\partial_x,n(x))$ التي تحتوي على λ,μ عوضاً عن $\lambda_k\ ,\mu_k$ تأخذ على الترتيب الشكل $\overset{k}{A}(\partial_x)$ و $\overset{k}{T}(\partial_x,n(x))$. إضافة لذلك نرمز بـ :

$$u^+(z,t)=\lim_{x\in D_0\to z\in S_k}u(x,t)\ ;\ k=\overline{0,m}$$

$$u^-(z,t)=\lim_{x\in D_0\to z\in S_k}u(x,t)\ ;\ k=\overline{1,r}$$

وهي عبارة عن حالة خاصة من الحالة العامة لـ (2) أي عندما : $\rho_k=1;k=\overline{1,r}$

بالطريقة نفسها نعلم ماذا نقصد بـ $\left(T(\partial_z,n(z))u(z,t)\right)^{\pm}$.

صياغة المسألة :

أوجد في الاسطوانة $\Omega_k \;; k=\overline{0,r}$ ، المتجه المنتظم $\overset{k}{u}(x,t)\;; k=\overline{0,r}$ الذي يحقق جملة المعادلات :

$$\forall (x,t)\in\Omega_k \;:\overset{k}{A}(\partial_x)\overset{k}{u}(x,t)-\rho\frac{\partial^2 \overset{k}{u}(x,t)}{\partial t^2}=-\overset{k}{F}(x,t)\;; k=\overline{0,r} \qquad (3)$$

مع الشروط الابتدائية :

$$\forall x\in\overline{D}_k \;:\lim_{t\to 0}\overset{k}{u}(x,t)=\overset{k}{\varphi}(x) \qquad (4)$$

$$\lim_{t\to 0}\frac{\partial \overset{k}{u}(x,t)}{\partial t}=\overset{k}{\psi}(x,t)\;;\; k=\overline{0,r}$$

وكذلك مع الشروط الحدية :

$$\forall (z,t)\in S_k\times\overline{L}:\left(\overset{0}{T}\left(\partial_z,n(z)\right)\overset{0}{u}(z,t)\right)^{+}=\overset{k}{f}(z,t); k=0,r+1,\dots,m \quad (5)$$

تجدر الإشارة هنا أنَّنا سنرمز لهذه المسألة بالرمز $(I)_{F,\varphi,\psi,\Phi,\Psi,f}$. كما يفترض بالدوال المتجهية المعطاة $\overset{k}{F},\overset{k}{\varphi},\overset{k}{\psi},\overset{k}{\Phi},\overset{k}{\Psi},\overset{k}{f}$ أنْ تحقق الشروط الآتية :

1) $\overset{k}{F}(\,.\,)\in C^3(\overline{\Omega}_k)$ ، والتفاضلات من المرتبة الثالثة تنتمي للصف $L_2(D_k)\;; k=\overline{0,r}$. وأنَّ :

$$\left.\overset{0}{T}\,\overset{0}{F}\right|_{S_k}=0\;; k=0,r+1,\dots,m$$

2)

$$\forall t\in\overline{L}:\frac{\partial^p}{\partial t^p}\overset{k}{\Phi}(.,t)\in C^2(S_k)\;,\; p=\overline{0,7}$$

$$\forall z\in S_k:\overset{k}{\Phi}(z,.)\in C^7(\overline{L}),\left(\frac{\partial^m\overset{k}{\Phi}(z,t)}{\partial t^m}\right)_{t=0}=0\;,\; m=\overline{0,5},k=\overline{1,r}$$

3)

$$\forall t\in\overline{L}:\frac{\partial^p}{\partial t^p}\overset{k}{\Psi}(.,t)\in C^1(S_k)\;,\; p=\overline{0,7}$$

$$\forall z\in S_k:\overset{k}{\Psi}(z,.)\in C^7(\overline{L}),\left(\frac{\partial^m\overset{k}{\Psi}(z,t)}{\partial t^m}\right)_{t=0}=0\;,\; m=\overline{0,5},k=\overline{1,r}$$

$$\forall t \in \overline{L} : \frac{\partial^p}{\partial t^p} \overset{k}{f}(.,t) \in C^1(S_k) \ , \ p = \overline{0,7}$$ (4

$$\forall z \in S_k : \overset{k}{f}(z,.) \in C^7(\overline{L}), \left(\frac{\partial^m \overset{k}{f}(z,t)}{\partial t^m} \right)_{t=0} = 0, m = \overline{0,5} \ , \ k = 0, r+1, ..., m$$

5) $\overset{k}{\varphi} \in C^3(\overline{D}_k)$ ، والتفاضلات من المرتبة الثالثة تنتمي للصف $L_2(D_k)$. وأنَّ :

$$\overset{0}{T} \overset{0}{\varphi}\Big|_{S_k} = \overset{0}{T} \overset{0}{A} \overset{0}{\varphi}\Big|_{S_k} = 0 \Big| \ ; \ k = 0, r+1, ..., m$$

6) $\overset{k}{\psi} \in C^2(\overline{D}_k)$ ، والتفاضلات من المرتبة الثالثة تنتمي للصف $L_2(D_k)$. وأنَّ :

$$\overset{0}{T} \overset{0}{\psi}\Big|_{S_k} = 0 \ ; \ k = 0, r+1, ..., m$$

تمَّ إثبات وحدانية الحل المنتظم لهذه المسألة في [4] .

إذا كان $\overset{k}{u}^{(1)}(x,t)$ حلاً منتظماً للمسألة $(I)_{0,0,0,\Phi,\Psi,f}$ وكان $\overset{k}{u}^{(2)}(x,t)$ حلاً منتظماً للمسألة $(I)_{F,\varphi,\psi,0,0,0}$. فإنَّ : $\overset{k}{u}(x,t) = \overset{k}{u}^{(1)}(x,t) + \overset{k}{u}^{(2)}(x,t)$

سيكون حلاً منتظماً للمسألة $(I)_{F,\varphi,\psi,\Phi,\Psi,f}$.

إنَّ وجود الحل $\overset{k}{u}^{(1)}(x,t)$ ، وحسب فرضياتنا ، ينتج من النتائج الموجودة في [4] . لذلك بقي علينا إثبات وجود الحل المنتظم للمسألة $(I)_{F,\varphi,\psi,0,0,0}$ ؛ حيث سنستعمل لإثبات ذلك طريقة جديدة تعرف بطريقة فورييه ، وهو **هدف هذا البحث** .

المناقشة والنتائج :

سنعرض لمفهوم أساسي له دور كبير في هذا البحث [3] :

● **صيغ غرين** : إذا كان $u(x) = \overset{k}{u}(x)$ و $v(x) = \overset{k}{v}(x)$ ؛ حيث $x \in D_k \ , k = \overline{0,r}$ متجهين اختياريين ينتميان للصف $C^1(\overline{D}_k)$ ، كما أنَّ تفاضلاتهما من المرتبة الثانية تنتمي للصف $L_2(D_k)$.

عندئذٍ تتحقق العلاقات الآتية :

$$\int_D \left(T_v Au + E(u,v)\right)dx = \int_{S_0}\left(\underset{v}{\overset{0}{T}}\right)^+ . \left(\overset{0}{T}\overset{0}{u}\right)^+ ds + \\ + \sum_{k=r+1}^{m}\int_{S_k}\left(\underset{v}{\overset{0}{T}}\right)^+ . \left(\overset{0}{T}\overset{0}{u}\right)^+ dS + \\ + \sum_{k=1}^{r}\int_{S_k}\left(\left(\underset{v}{\overset{0}{T}}\right)^+ . \left(\overset{0}{T}\overset{0}{u}\right)^+ - \left(\underset{v}{\overset{k}{T}}\right)^+ . \left(\overset{k}{T}\overset{k}{u}\right)^-\right)dS \qquad (6)$$

$$\int_D \left({}_vT\, Au + {}_uT\, Av\right)dx = \int_{S_0}\left(\left(\underset{v}{\overset{0}{T}}\right)^+ . \left(\overset{0}{T}\overset{0}{u}\right)^+ - \left(\underset{u}{\overset{0}{T}}\right)^+ . \left(\overset{0}{T}\overset{0}{v}\right)^+\right)ds + \\ + \sum_{k=r+1}^{m}\int_{S_k}\left(\left(\underset{v}{\overset{0}{T}}\right)^+ . \left(\overset{0}{T}\overset{0}{u}\right)^+ - \left(\underset{u}{\overset{0}{T}}\right)^+ . \left(\overset{0}{T}\overset{0}{v}\right)^+\right)dS + \\ + \sum_{k=1}^{r}\left(\int_{S_k}\left(\left(\underset{v}{\overset{0}{T}}\right)^+ . \left(\overset{0}{T}\overset{0}{u}\right)^+ - \left(\underset{v}{\overset{k}{T}}\right)^- . \left(\overset{k}{T}\overset{k}{u}\right)^-\right)dS - \\ - \int_{S_k}\left(\left(\underset{u}{\overset{0}{T}}\right)^+ . \left(\overset{0}{T}\overset{0}{v}\right)^+ - \left(\underset{u}{\overset{k}{T}}\right)^- . \left(\overset{k}{T}\overset{k}{v}\right)^-\right)dS\right) \qquad (7)$$

هنا :

$$E(v,u) = \sum_{p,q=1}^{3}\left(\mu\frac{\partial v_p}{\partial x_q}\frac{\partial u_p}{\partial x_q} + \lambda\frac{\partial v_p}{\partial x_p}\frac{\partial u_q}{\partial x_q} + \mu\frac{\partial v_p}{\partial x_q}\frac{\partial u_q}{\partial x_p}\right)$$

إذا كتبنا $E(v,u)$ بالشكل :

$$E(v,u) = \frac{3\lambda+2\mu}{3}div\, v . div\, u + \frac{\mu}{2}\sum_{p\neq q}\left(\frac{\partial v_p}{\partial x_q}+\frac{\partial v_q}{\partial x_p}\right)\left(\frac{\partial u_p}{\partial x_q}+\frac{\partial u_q}{\partial x_p}\right) + \\ + \frac{\mu}{3}\sum_{p,q}\left(\frac{\partial v_p}{\partial x_p}-\frac{\partial v_q}{\partial x_q}\right)\left(\frac{\partial u_p}{\partial x_p}-\frac{\partial u_q}{\partial x_q}\right)$$

فإنَّنا نجد أنَّ : $E(u,v) = E(v,u)$ و $E(v,v) \geq 0$

إنَّ تحقيق هدف هذا البحث يتم أولاً من خلال إثبات صحة المبرهنتين الآتيتين :

مبرهنة 1 : المتراجحة لآتية :

$$\sum_{n=7}^{\infty} \Phi_n^2 \omega_n \le \int_D E(\Phi,\Phi) dx \qquad (8)$$

حيث :

$$\Phi_n = \int_D {}_{\Phi}T(x) w^{(n)}(x) dx$$

محققة ، وذلك من أجل أي متجه $\Phi(x) = \overset{k}{\Phi}(x) \; ; x \in D_k \; , k = \overline{0,r}$: يحقق الشروط :

$$\overset{k}{\Phi}(x) \in C^0(\overline{D}_k) \; , \; \frac{\partial \overset{k}{\Phi}}{\partial x_i} \in L_2(D_k) \; ; i = 1,2,3 \; , k = \overline{0,r}$$

$$\forall z \in S_k : \overset{0}{\Phi}{}^{+}(z) = \overset{k}{\Phi}{}^{-}(z) \; , \; k = \overline{1,r}$$

في الحالة الخاصة فإنَّ المبرهنة تضمن تقارب المتسلسلة من الجهة اليسرى لـ(8) .

الإثبات : لنطبق العلاقة (6) على المتجهات $\Phi(x)$ و $w^{(n)}(x)$ ، فنجد :

$$\int_D E(\Phi, w^{(n)}) dx = \omega_n \Phi_n \; ; \; n = 7,.... \qquad (9)$$

وفي حالة خاصة إذا جعلنا $\Phi = w^{(n)}$ في (9) فإنَّنا نجد :

$$\int_D E(w^{(m)}, w^{(n)}) dx = \begin{cases} \omega_n & ; \; m = n \\ 0 & ; \; m \ne n \end{cases} \qquad (10)$$

إذا أخذنا بعين الاعتبار القيمة غير السالبة :

$$L = \int_D E(v,v) dx \ge 0$$

وفرضنا أنَّ :

$$v(x) = \Phi(x) - \sum_{n=7}^{n_0} \Phi_n w^{(n)}(x)$$

فإنَّه ، وبحساب بسيط ، نحصل على :

$$L = \int_D E(\Phi,\Phi) dx + \sum_{m,n=7}^{n_0} \Phi_m \Phi_n \int_D E(w^{(m)}, w^{(n)}) dx - \\ - 2\sum_{n=7}^{n_0} \Phi_n \int_D E(\Phi, w^{(n)}) dx \ge 0 \qquad (11)$$

نجد من العلاقات (9) و (10) و (11) أنَّ :

$$\sum_{n=7}^{n_0} \Phi_n^2 \omega_n \le \int_D E(\Phi, \Phi) dx$$

مبرهنة 2 : المتراجحة الآتية :

$$\sum_{n=7}^{\infty} \Phi_n^2 \omega_n^2 \le \int_D \left| A\Phi \right|^2 dx \qquad (12)$$

محققة وذلك من أجل أي متجه : $\Phi(x) = \overset{k}{\Phi}(x) \; ; \; x \in D_k \; , k = \overline{0,r}$ يحقق الشروط الآتية :

$$\overset{k}{\Phi}(x) \in C^1(\overline{D}_k) \; , \; \frac{\partial^2 \overset{k}{\Phi}}{\partial x_i \, \partial x_j} \in L_2(D_k) \; ; \; i, j = 1,2,3 \; , k = \overline{0,r}$$

$$\forall z \in S_k \; : \overset{0}{\Phi}{}^{+}(z) = \overset{k}{\Phi}{}^{-}(z) \; , \left(\overset{0}{T} \, \overset{0}{\Phi}(z) \right)^{+} = \left(\overset{k}{T} \, \overset{k}{\Phi}(z) \right)^{-} , \; k = \overline{1,r}$$

$$\forall z \in S_k \; : \left(\overset{0}{T} \, \overset{0}{\Phi}(z) \right)^{+} = 0 \; , \; k = 0, r+1, \dots, m$$

في الحالة الخاصة فإنَّ المبرهنة تضمن تقارب المتسلسلة من الجهة اليسرى لـ(12) .

الإثبات : لنطبق العلاقة (7) على المتجهات $\Phi(x)$ و $w^{(n)}(x)$ ، فنجد :

$$\int_D \left({}_{\Phi}TAw^{(n)} - w^{(n)} {}_{A}T\,\Phi \right) dx = 0 \; ; \; n = 7, \dots \qquad (13)$$

إذا أدخلنا حساب $Aw^{(n)} + \omega_n w^{(n)}$ من (13) فإنَّنا نحصل على :

$$\int_D A\Phi w^{(n)} dx = -\omega_n \Phi_n$$

هنا :

$$\left(A\Phi \right)_n = -\omega_n \Phi_n \qquad (14)$$

وباستخدام متراجحة بيسل نجد :

$$\sum_{n=7}^{\infty} \left(A\Phi \right)_n^2 \le \int_D \left| A\Phi \right|^2 dx \qquad (15)$$

ومن أجل $A(\partial_x)\Phi(x)$ فإنَّنا نحصل على (12) وذلك بتعويض (14) في (15) .

إنَّ تحقيق هدف هذا البحث يتم ثانياً من خلال إثبات المبرهنة الآتية :

مبرهنـة 3 : إذا حققت الدوال $F\ ,\ \varphi\ ,\ \psi$ الشروط (3) و (4) و (5) ، فإنَّ المتسلسلة :

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{6}\chi^{(n)}(x)\left(\varphi_n+t\psi_n\right)+\sum_{n=1}^{6}\chi^{(n)}(x)\int_0^t\left(\int_0^t F_n(\tau)d\tau\right)dt+$$

$$+\sum_{n=7}^{\infty}\frac{w^{(n)}(x)}{\omega_n^2}(A^2\varphi)_n\cos\sqrt{\omega_n}\,t-\sum_{n=7}^{\infty}\frac{w^{(n)}(x)}{\omega_n^{\frac{3}{2}}}(A\psi)_n\sin\sqrt{\omega_n}\,t-$$

$$-\sum_{n=7}^{\infty}\frac{w^{(n)}(x)}{\omega_n^{\frac{3}{2}}}\int_0^t(AF)_n(\tau)\sin\sqrt{\omega_n}(t-\tau)d\tau$$

عبارة عن حل منتظم للمسألة $(I)_{F,\varphi,\psi,0,0,0}$.

الإثبات : ليكن χ_0 أي عدد صحيح موجب (اختياري) ولتكن I مصفوفة واحدية من المرتبة $(3,3)$ و $D=\bigcup_{k=0}^{r}D_k$.

نطبق تتسور غرين من المسألة الأساسية الأولى للمؤثر $\overset{k}{A}(\partial_x)-\chi_0^2 I$ إلى المصفوفة من المرتبة الثالثة : $G(x,y,-\chi_0^2)=\overset{k}{G}(x,y,-\chi_0^2)$ ؛ حيث $x\in D_k$ و $k=\overline{0,r}$, $x\neq y$, $y\in D$ ، تحقق هذه المصفوفة الشروط الآتية :

$$\forall x\in D_k\ ,\ y\in D\ ,\ x\neq y:$$

$$\overset{k}{A}(\partial_x)\overset{k}{G}(x,y,-\chi_0^2)-\chi_0^2\overset{k}{G}(x,y,-\chi_0^2)=0\ ;\ k=\overline{0,r} \tag{1}$$

$$\forall z\in S_k\ ,\ y\in D:\left(\overset{0}{G}(z,y,-\chi_0^2)\right)^+=\left(\overset{k}{G}(z,y,-\chi_0^2)\right)^-\ ;\ k=\overline{1,r}$$

$$\left(\overset{0}{T}(\partial_z,n(z))\overset{0}{G}(z,y,-\chi_0^2)\right)^+=\left(\overset{k}{T}(\partial_z,n(z))\overset{k}{G}(z,y,-\chi_0^2)\right)^- \tag{2}$$

$$\forall z\in S_k,y\in D:\left(\overset{0}{T}(\partial_z,n(z))\overset{0}{G}(z,y,-\chi_0^2)\right)^+=0;k=0,r+1,\dots,m \tag{3}$$

$$\forall x\in D_k,y\in D:\overset{k}{G}(x,y,-\chi_0^2)=\overset{k}{\Gamma}(x-y,-\chi_0^2)-\overset{k}{g}(x,y);k=\overline{0,r} \tag{4}$$

حيث $\overset{k}{\Gamma}(x-y,-\chi_0^2)$ مصفوفة الحلول الأساسية مع ثوابت لاما $\lambda_k \; , \mu_k$ $[3]$ و $\overset{k}{g}(x,y)$ حل منتظم للمسألة الآتية :

$$\forall x \in D_k \; , \; y \in D \; : \; \overset{k}{A}(\partial_x)\overset{k}{g}(x,y) - \chi_0^2 \overset{k}{g}(x,y) = 0 \; ; \; k = \overline{0,r}$$

$$\forall z \in S_k \; , \; y \in D : \left(\overset{0}{g}(z,y)\right)^{+} - \left(\overset{k}{g}(z,y)\right)^{-} = \overset{0}{\Gamma}(z-y,-\chi_0^2) - \overset{k}{\Gamma}(z-y,-\chi_0^2)$$

$$\left(\overset{0}{T}(\partial_z, n(z))\overset{0}{g}(x,y)\right)^{+} - \left(\overset{k}{T}(\partial_z, n(z))\overset{k}{g}(x,y)\right)^{-} =$$

$$= \overset{0}{T}(\partial_z, n(z))\overset{0}{\Gamma}(z-y,-\chi_0^2) - \overset{k}{T}(\partial_z, n(z))\overset{k}{\Gamma}(z-y,-\chi_0^2) \; ; \; k = \overline{1,r}$$

$$\forall z \in S_k \; , \; y \in D : \left(\overset{0}{T}(\partial_z, n(z))\overset{0}{g}(x,y)\right)^{+} = \overset{0}{T}(\partial_z, n(z))\overset{k}{\Gamma}(z-y,-\chi_0^2) \; ;$$

$$k = 0, r+1, \ldots, m$$

إنَّ قابلية الحل لهذه المسألة مثبتة في $[3]$ ؛ حيث تمَّ إثبات وجود $G(x,y,-\chi_0^2)$.

وباستعمال علاقة غرين فإنَّه يمكن إثبات $[3]$ أنَّ $G(x,y,-\chi_0^2)$ تمتلك خواص التماثل من الشكل :

$$G(x,y,-\chi_0^2) = {}_{G}T(y,x,-\chi_0^2) \qquad (16)$$

أضف لذلك لدينا التقديرات الآتية $[4]$:

$$\forall (x,y) \in D \times D : G_{mn}(x,y,-\chi_0^2) = O\left(|x-y|^{-1}\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_j} G_{mn}(x,y,-\chi_0^2) = O\left(|x-y|^{-2}\right); \; m,n,j = 1,2,3 \qquad (17)$$

لنفرض أنَّ المسألة معطاة مع القيم الذاتية :

$$\forall x \in D_k \; : \; \overset{k}{A}(\partial_x)\overset{k}{w}(x) + \omega \overset{k}{w}(x) = 0 \; ; \; k = \overline{0,r}$$

$$\forall z \in S_k : \overset{0}{w}{}^{+}(z) = \overset{k}{w}{}^{-}(z) \; , \; \left(\overset{0}{T}\overset{0}{w}(z)\right)^{+} = \left(\overset{k}{T}\overset{k}{w}(z)\right)^{-} ; k = \overline{1,r} \qquad (18)$$

$$\forall z \in S_k : \left(\overset{0}{T}\overset{0}{w}(z)\right)^{+} = 0 \; ; \; k = 0, r+1, \ldots, m$$

إنَّ دالة المتجه الذاتي للمسألة (18) ، الذي يأخذ الشكل :

$$w(x)=\overset{k}{w}(x)=\left(\overset{k}{w}_1(x),\overset{k}{w}_2(x),\overset{k}{w}_3(x)\right);x\in D_k,\ k=\overline{0,r}$$

يكون منتظماً إذا كان : $\overset{k}{w}_i(x)\in C^1(\overline{D}_k)\cap C^2(D_k)\ ;\ i=1,2,3\ ,\ k=\overline{0,r}$

بإجراء عدد من العمليات وكما في [3] ، نستطيع أنْ نرى أنَّ المسألة (18) تكافئ جملة من المعادلات التكاملية :

$$w(x)=\left(\omega+\chi_0^2\right)\int_D G(x,y,-\chi_0^2)w(y)dy\ \ ;\ x\in D \qquad (19)$$

استناداً إلى (16) و (17) ، نرى أنَّ (19) هي عبارة معادلة تكاملية مع نواة متناظرة من الصف $L_2(D)$. واستناداً إلى مبرهنة هلبرت – شميدت ، فإنَّه يوجد جملة قابلة للعد من القيم الذاتية $\left(\omega_n+\chi_0^2\right)_{n=1}^{\infty}$ تطابق في D جملة من المتجهات الذاتية :

$\left(w^{(n)}(x)\right)_{n=1}^{\infty}=\left(\overset{k}{w}^{(n)}\right)_{n=1}^{\infty}\ ;\ x\in D_k\ ,k=\overline{0,r}$ من المعادلة (19) .

هنا وتباعاً ينتج أنَّ $\left(\omega_n\right)_{n=1}^{\infty}$ و $\left(\overset{k}{w}^{(n)}(x)\right)_{n=1}^{\infty}$ على التوالي هي قيم ذاتية ومتجهات ذاتية للمسألة (18) . هذا يعني بشكل قاطع [3] أنَّ : $\omega_n\geq 0$.

إنَّ $\omega=0$ هي قيمة ذاتية رتبتها ستة ، والمتجهات الذاتية المطابقة تكون عبارة عن متجهات إزاحة : $\chi^{(n)}(x)=\left(\chi_1^{(n)},\chi_2^{(n)},\chi_3^{(n)}\right)\ ;\ n=\overline{1,6}\ ,\ x\in D$

وللمتابعة سنفرض أنَّ : $\omega_n=0$ و $w^{(n)}(x)=\chi^{(n)}(x)\ ;\ n=\overline{1,6}$.

إنَّ خواص العزم الحجمي [3] تدل ضمنياً على نظامية المتجهات الذاتية .

لنثبت أنَّ الجملة $\left(w^{(n)}(x)\right)_{n=1}^{\infty}$ تامة في $L_2(D)$. لأجل ذلك يكفينا أنْ نبيّن أنَّه إذا كان $f\in L_2(D)$ أي متجه اختياري فإنَّ الشروط :

$$\int_D {}_fT(x)w^{(n)}(x)dx=0\ ;\ n=1,2,... \qquad (20)$$

تدل ضمناً على أنَّ $f(x)=0$ وذلك في كل نقطة من D . لنستعمل الآن الرمز التالي :

$$h(x)=\int_D G(x,y,-\chi_0^2)f(y)dy$$

نلاحظ وحسب مبرهنة هلبرت – شميدت أنَّ $h(x)$ يكون تمديداً منتظماً ومطلقاً في تقارب المتسلسلة : $h(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f_n w^{(n)}(x)}{\omega_n+\chi_0^2}$

حيث :

$$f_n=\int_D {}_fT(x)w^{(n)}(x)dx\ ;\ n=1,2,...$$

حسب (20) فإنَّ كل $f_n=0$ ، ولذلك :

$$h(x)\equiv 0 \qquad (21)$$

من ناحية أخرى فمن [3] نعلم أنَّ :

$$\left(\overset{k}{A}(\partial_x)-\chi_0^2 I\right)h(x)+f(x)=0\ ;\ x\in D \qquad (22)$$

استناداً إلى (21) و (22) نستنتج أخيراً أنَّ $f(x)=0$ في كل مكان من D .

بسبب خطية المسألة $(I)_{F,\varphi,\psi,0,0,0}$ ، فإنَّ حلها يمكن أنْ يكون بصورة مباشرة كمجموع حلي المسألتين $(I)_{0,\varphi,\psi,0,0,0}$ و $(I)_{F,0,0,0,0,0}$.

بتطبيق طريقة فورييه على المسألة $(I)_{0,\varphi,\psi,0,0,0}$ فإنَّنا نحصل على :

$$u(x,t)=\overset{k}{u}(x,t)=\sum_{n=1}^{6}\chi^{(n)}(x)\left(\varphi_n+t\psi_n\right)+$$
$$+\sum_{n=7}^{\infty}w^{(n)}(x)\left(\varphi_n\cos\sqrt{\omega_n}t+\frac{\psi_n}{\sqrt{\omega_n}}\sin\sqrt{\omega_n}t\right);x\in D\ ,\ t\in L$$

حيث :

$$\varphi_n=\int_D {}_\varphi T(x)w^{(n)}(x)dx$$
$$\psi_n=\int_D {}_\psi T(x)w^{(n)}(x)dx$$

ولننشـر علاقـة الحـل $u(x,t)$ للمسـألة $(I)_{F,0,0,0,0,0}$ فـي متسلسـلة متعلقـة بالجملة $\left(w^{(n)}(x)\right)_{n=1}^{\infty}$:

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(t)w^{(n)}(x)$$

$$F(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}F_n(t)w^{(n)}(x)$$

لدينا :

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{6}\chi^{(n)}(x)\int_0^t\left(\int_0^t F_n(\tau)d\tau\right)dt+$$

$$+\sum_{n=7}^{\infty}w^{(n)}(x)\frac{1}{\sqrt{\omega_n}}\int_0^t F_n(\tau)\sin\sqrt{\omega_n}(t-\tau)d\tau\ ;\ x\in D$$

وهكذا لحل المسألة $(I)_{F,\varphi,\psi,0,0,0}$ نحصل على التمثيل الآتي :

$$\begin{aligned}u(x,t)&=\sum_{n=1}^{6}\chi^{(n)}(x)\left(\varphi_n+t\psi_n\right)+\\&+\sum_{n=7}^{\infty}w^{(n)}(x)\left(\varphi_n\cos\sqrt{\omega_n}\,t+\frac{\psi_n}{\sqrt{\omega_n}}\sin\sqrt{\omega_n}\,t\right)+\\&+\sum_{n=1}^{6}\chi^{(n)}(x)\int_0^t\left(\int_0^t F_n(\tau)d\tau\right)dt+\\&+\sum_{n=7}^{\infty}w^{(n)}(x)\frac{1}{\sqrt{\omega_n}}\int_0^t F_n(\tau)\sin\sqrt{\omega_n}(t-\tau)d\tau\end{aligned}\qquad (23)$$

بتطبيق علاقة غرين (7) على المتجهات $\varphi(x)$ و $w^{(n)}(x)$. آخذين بعين الاعتبار الشروط الحدية لهذه المتجهات فيكون لدينا :

$$\int_D (A\varphi)Tw^{(n)}dx=-\omega_n\int_D \varphi Tw^{(n)}dx$$

أي أنَّ :

$$(A\varphi)_n=-\omega_n\varphi_n\quad ;\quad n=7,8,...\qquad (24)$$

الآن بتطبيق (7) على المتجهات $A\varphi(x)$ و $w^{(n)}(x)$ ، نحصل على :

$$(A^2\varphi)_n = -\omega_n (A\varphi)_n \quad ; \quad n = 7,8,...$$

نلاحظ من (24) أنَّ :

$$\varphi_n = \frac{(A^2\varphi)_n}{\omega_n^2} \qquad (25)$$

بشكل مشابه نطبق العلاقة (7) على التوالي على المتجهات $\psi(x)$ و $w^{(n)}(x)$ ، $F(x,t)$ و $w^{(n)}(x)$

فيكون لدينا :

$$\begin{aligned} \psi_n &= -\frac{(A\psi)_n}{\omega_n} \\ F_n(t) &= -\frac{(AF)_n}{\omega_n} \end{aligned} \qquad (26)$$

استناداً إلى (25) و (26) فالمتسلسلة (23) تأخذ الشكل الآتي :

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \sum_{n=1}^{6} \chi^{(n)}(x)\left(\varphi_n + t\psi_n\right) + \sum_{n=1}^{6} \chi^{(n)}(x) \int_0^t \left(\int_0^t F_n(\tau) d\tau \right) dt + \\ &+ \sum_{n=7}^{\infty} \frac{w^{(n)}(x)}{\omega_n^2} (A^2\varphi)_n \cos\sqrt{\omega_n}\, t - \sum_{n=7}^{\infty} \frac{w^{(n)}(x)}{\omega_n^{\frac{3}{2}}} (A\psi)_n \sin\sqrt{\omega_n}\, t - \qquad (27) \\ &- \sum_{n=7}^{\infty} \frac{w^{(n)}(x)}{\omega_n^{\frac{3}{2}}} \int_0^t (AF)_n(\tau) \sin\sqrt{\omega_n}\,(t-\tau) d\tau \end{aligned}$$

الآن وحتى نثبت طريقة فورييه ، علينا أنْ نثبت أنَّ العلاقة (27) توفر نظامية حل المسألة $(I)_{F,\varphi,\psi,0,0,0}$. لأجل ذلك من الضروري تبيان أنَّ المتسلسلة (27) بالإضافة إلى المتسلسلة التي حصلنا عليها بالتفاضلات الأحادية حداً حداً لهذه المتسلسلة متقاربة بانتظام في اسطوانة مغلقة ، بينما المتسلسلة التي حصلنا عليها بالتفاضلات المضاعفة حداً حداً لهذه المتسلسلة متقاربة بانتظام داخل الاسطوانة $\Omega = D \times L$.

لندرس أولاً المتسلسلة :

$$\sum_{n=7}^{\infty}\frac{w^{(n)}(x)}{\omega_n^2}(A^2\varphi)_n \cos\sqrt{\omega_n}\; t \qquad (28)$$

بتقييم (28) باستخدام متراجحة كوشي–بونياكوفسكي ، فإنَّنا نحصل على :

$$\left|\sum_{n=m}^{m+p}\frac{w^{(n)}(x)}{\omega_n^2}(A^2\varphi)_n \cos\sqrt{\omega_n}\; t\right| \le \left[\sum_{n=m}^{m+p}\frac{\left|w^{(n)}(x)\right|^2}{\omega_n^4}.\sum_{n=m}^{m+p}(A^2\varphi)_n^2\right]^{\frac{1}{2}}\frac{dy}{dx} \qquad (29)$$

بما أنَّ $A^2\varphi \in L_2(D)$ واستناداً لمتراجحة بيسل فإنَّ :

$$\sum_{n=7}^{\infty}(A^2\varphi)_n^2 \le \int_D \left|A^2\varphi\right|^2 dx$$

لذلك من أجل أي $\varepsilon > 0$ فإنَّه يوجد العدد $N(\varepsilon)$ ؛ بحيث إنَّه من أجل $m \ge N(\varepsilon)$ وأي عدد طبيعي p فإنَّه يكون :

$$\sum_{n=m}^{m+p}(A^2\varphi)_n^2 < \varepsilon \qquad (30)$$

حسب (30) ينتج بالضرورة من (29) أنَّه لإثبات التقارب المنتظم للمتسلسلة (28) فإنَّه يكفي أنْ نبيّن في $\overline{\Omega}$ أنَّ مجموع المتسلسلة :

$$\sum_{n=7}^{\infty}\frac{\left|w^{(n)}(x)\right|^2}{\omega_n^4} \qquad (31)$$

موجود ومحدود بانتظام في $\overline{D}$.

من (19) لدينا :

$$\int_D G(x,y,-\chi_0^2)w^{(n)}(y)dy = \frac{w^{(n)}(x)}{\omega_n+\chi_0^2}$$

أي أنَّ :

$$\left(G(x,y,-\chi_0^2)\right)_n = \frac{w^{(n)}(x)}{\omega_n+\chi_0^2}$$

لذلك فمتراجحة بيسل تعطينا :

$$\sum_{n=7}^{\infty}\frac{\left|w^{(n)}(x)\right|^2}{\left(\omega_n+\chi_0^2\right)^2}\le\int_D\left|G(x,y,-\chi_0^2)\right|^2dy \tag{32}$$

حسب (17) فإنَّه ينتج من (32) أنَّ مجموع المتسلسلة :

$$\sum_{n=7}^{\infty}\frac{\left|w^{(n)}(x)\right|^2}{(\omega_n+\chi_0^2)^2} \tag{33}$$

موجود ومحدود في $\overline{D}$. عندئذٍ : $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{\chi_0^2}{\omega_n}\right)=1\ ;\ n\ge 7$

لدينا المتراجحة لآتية :

$$\frac{\left|w^{(n)}(x)\right|^2}{\omega_n^2}=\frac{\left|w^{(n)}(x)\right|^2}{(\omega_n+\chi_0^2)^2}\cdot\frac{(\omega_n+\chi_0^2)^2}{\omega_n^2}=\frac{\left|w^{(n)}(x)\right|^2}{(\omega_n+\chi_0^2)^2}\left(1+\frac{\chi_0^2}{\omega_n}\right)^2\le$$

$$\le M\ \frac{\left|w^{(n)}(x)\right|^2}{(\omega_n+\chi_0^2)^2}\ ;\ n\ge 7 \tag{34}$$

حيث M ثابت .

إنَّ مجموع المتسلسلة (33) والمتراجحة (34) كلاهما محدود بانتظام ؛ حيث إنَّ مجموع المتسلسلة :

$$\sum_{n=7}^{\infty}\frac{\left|w^{(n)}(x)\right|^2}{\omega_n^2} \tag{35}$$

موجود ومحدود بانتظام في $\overline{D}$.

الاستنتاج يكون نفسه صحيحاً من أجل المتسلسلة (31) .

الآن سنرى أنَّ المتسلسلة التي حصلنا عليها من (28) وذلك بمفاضلتها حداً حداً مرة واحدة ، هي متسلسلة متقاربة بانتظام في $\overline{\Omega}$.

بمفاضلة المتسلسلة (28) المتعلقة بـ t حداً حداً ، فإنَّنا نحصل على :

$$-\sum_{n=7}^{\infty}\frac{w^{(n)}(x)}{\omega_n^{\frac{3}{2}}}(A^2\varphi)_n\sin\sqrt{\omega_n}\ t \tag{36}$$

باقي المتسلسلة (36) يقدَّر كما يلي :

$$\left|\sum_{n=m}^{m+p}\frac{w^{(n)}(x)}{\omega_n^{\frac{3}{2}}}(A^2\varphi)_n \sin\sqrt{\omega_n}\ t\right| \le \left[\sum_{n=m}^{m+p}\frac{\left|w^{(n)}(x)\right|^2}{\omega_n^3}.\sum_{n=m}^{m+p}(A^2\varphi)_n^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

إنَّ وجود مجموع المتسلسلة (35) وتقاربه المنتظم في $\overline{D}$ ينتج ضمنياً من أنَّ مجموع المتسلسلة :

$$\sum_{n=7}^{\infty}\frac{\left|w^{(n)}(x)\right|}{\omega_n^3}$$

موجود ومتقارب بانتظام في $\overline{D}$.

هنا وكما سبق نستنتج أنَّ المتسلسلة (36) متقاربة بانتظام في $\overline{\Omega}$.

الآن وبمفاضلة المتسلسلة (28) حداً حداً بالنسبة لـ $x_i\ ; i=1,2,3$ يكون لدينا :

$$\sum_{n=7}^{\infty}\frac{\frac{\partial w^{(n)}(x)}{\partial x_i}}{\omega_n^2}(A^2\varphi)_n \cos\sqrt{\omega_n}\ t \qquad (37)$$

باقي المتسلسلة (37) يقدَّر كما يلي :

$$\left|\sum_{n=m}^{m+p}\frac{\frac{\partial w^{(n)}(x)}{\partial x_i}}{\omega_n^2}(A^2\varphi)_n \cos\sqrt{\omega_n}\ t\right| \le \left[\sum_{n=m}^{m+p}\frac{\left|\frac{\partial w^{(n)}(x)}{\partial x_i}\right|^2}{\omega_n^4}.\sum_{n=m}^{m+p}(A^2\varphi)_n^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

استناداً إلى (30) فإنَّه لإثبات أنَّ المتسلسلة (37) متقاربة بانتظام في $\overline{\Omega}$ يكفينا إثبات أنَّ مجموع المتسلسلة :

$$\sum_{n=7}^{\infty}\frac{\left|\frac{\partial w^{(n)}(x)}{\partial x_i}\right|^2}{\omega_n^4} \qquad (38)$$

موجود ومتقارب بانتظام في $\overline{D}$.

بفرض $G^{(2)}(x,y,-\chi_0^2)$ نواة مكررة من $G(x,y,-\chi_0^2)$. لدينا :

$$G^{(2)}(x,y,-\chi_0^2)=\int_D G(x,z,-\chi_0^2).G(z,y,-\chi_0^2)dz \;\; ; \; x\neq y \qquad (39)$$

نوجد تفاضل (39) المتعلقة بـ x_i . بمفاضلة الطرف الأيمن لـ (39) نستطيع إنجاز ما تحت إشارة التكامل . لذلك سنرى الآن أنَّ التكامل الذي حصلنا عليه من التفاضل يكون متقارب بانتظام من أجل أي $x\neq y$.

$$\frac{\partial G^{(2)}(x,y,-\chi_0^2)}{\partial x_i}=\int_D \frac{\partial G(x,z,-\chi_0^2)}{\partial x_i}.G(z,y,-\chi_0^2)dz \;\; ; \; x\neq y$$

استناداً إلى (17) والمبرهنة الخاصة بتركيب نواتين [5] ، فإنَّنا نحصل على :

$$\forall (x,y)\in D\times D : \left|\frac{\partial G^{(2)}(x,y,-\chi_0^2)}{\partial x_i}\right|\leq c_1\left|\ln|x-y|\right|+c_2$$

وهكذا : $$\frac{\partial G^{(2)}(x,y,-\chi_0^2)}{\partial x_i}\in L_2(D) \;\; ; \; i=1,2,3$$

بطريقة مماثلة يتضح أنَّ :

$$w^{(n)}(x)=\omega_n^2\int_D G^{(2)}(x,y,-\chi_0^2).w^{(n)}(y)dy \qquad (40)$$

لذلك فمتراجحة بيسل تعطي :

$$\sum_{n=7}^{\infty}\frac{\left|\frac{\partial w^{(n)}(x)}{\partial x_i}\right|^2}{\omega_n^4}\leq\int_D\left|\frac{\partial G^{(2)}(x,y,-\chi_0^2)}{\partial x_i}\right|^2 dy$$

هنا نستنتج أنَّ مجموع المتسلسلة (38) موجود ومتقارب بانتظام في $\overline{D}$.

سنثبت الآن أنَّ المتسلسلة التي حصلنا عليها بالمفاضلة حداً حداً مرتين لـ (28) تتقارب بانتظام في الاسطوانة $\overline{\Omega_k^{'}}=\overline{D_k^{'}}\times\overline{L}$ ؛ حيث $\overline{D_k^{'}}\subset D_k \; ; k=\overline{0,r}$ منطقة جزئية داخلية مغلقة اختيارية .

بالمفاضلة حداً حداً مرتين للمتسلسلة (28) المتعلقة بـ t تقودنا إلى :

$$-\sum_{n=7}^{\infty}\frac{w^{(n)}(x)}{\omega_n}(A^2\varphi)_n\cos\sqrt{\omega_n}\,t \qquad (41)$$

بتقدير باقي المتسلسلة (41) كما سبق أعلاه استناداً إلى (30) و المحدودية بانتظام لمجموع المتسلسلة (35) نستنتج أنَّ المتسلسلة (41) متقاربة بانتظام في $\overline{\Omega}$.

تعطينا المفاضلة مرتين حداً حداً للمتسلسلة (28) المتعلقة بـ x :

$$\sum_{n=7}^{\infty} \frac{\frac{\partial^2 w^{(n)}(x)}{\partial x_i \partial x_j}}{\omega_n^2} (A^2\varphi)_n \cos\sqrt{\omega_n}\, t \ \ ; i, j = 1,2,3 \qquad (42)$$

عند تقدير باقي المتسلسلة (42) كما سبق أعلاه استناداً إلى (30) وفي إثبات التقارب المنتظم للمتسلسلة (42) في $\overline{\Omega_k^{'}} = \overline{D^{'}} \times \overline{L}$ ؛ حيث $\overline{D^{'}} = \bigcup_{k=0}^{r} \overline{D_k^{'}}$ يكفينا أنْ نعلم أنَّ مجموع للمتسلسلة :

$$\sum_{n=7}^{\infty} \frac{\left| \frac{\partial^2 w^{(n)}(x)}{\partial x_i \partial x_j} \right|^2}{\omega_n^4} \qquad (43)$$

موجود ومحدود بانتظام في $\overline{D^{'}}$.

استناداً إلى [5] يمكننا أنْ نحصل على التقدير الآتي :

$$\forall (x, y) \in \overline{D^{'}} \times D : \left| \frac{\partial^2 G^{(2)}(x, y, -\chi_0^2)}{\partial x_i \partial x_j} \right| \le \frac{c}{|x - y|} \ ; i, j = 1,2,3$$

استناداً إلى (40) فإنَّ التقدير السابق يسمح لنا بكتابة متراجحة بيسل :

$$\sum_{n=7}^{\infty} \frac{\left| \frac{\partial^2 w^{(n)}(x)}{\partial x_i \partial x_{\partial j}} \right|^2}{\omega_n^4} \le \int_D \left| \frac{\partial^2 G^{(2)}(x, y, -\chi_0^2)}{\partial x_i \partial x_j} \right|^2 dy \ \ ; \ x \in \overline{D^{'}}$$

والتي تدل ضمنياً على أنَّ المتسلسلة (43) موجودة ومحدودة بانتظام في $\overline{D^{'}}$.

لنكمل إثبات أنَّ المتسلسلة الثانية من (27) متقاربة بانتظام في اسطوانة مغلقة .

لذلك نقوم بإعادة كتابتها بالشكل :

$$\sum_{n=7}^{\infty} \frac{w^{(n)}(x)}{\omega_n^2} \left((A\psi)_n \sqrt{\omega_n} \right) \sin\sqrt{\omega_n}\, t \qquad (44)$$

بمقارنة المتسلسلات (44) و(28) نستطيع أنْ نلاحظ أنَّ لها المنشأ نفسه . الفرق الوحيد هو أنَّ جيب التمام تمَّ تبديله بالجيب و $(A^2\varphi)_n$ بـ $(A\psi)_n\sqrt{\omega_n}$.

بالعودة للمتسلسلة (28) يتبيّن لنا حقيقةً أنَّ المتسلسلة : $\sum_{n=7}^{\infty}(A^2\varphi)_n^2$ متقاربة .

بسبب الشروط المفروضة على ψ فإنَّ تقارب المتسلسلة : $\sum_{n=7}^{\infty}(A\psi)_n^2\omega_n$ ينتج مباشرة من المبرهنة (1) المثبتة سابقاً . لذلك فالاستنتاج السابق يمكن استخدامه أيضاً بالنسبة للمتسلسلة (44) .

أخيراً سنثبت أيضاً أنَّ المتسلسلة الثالثة من (27) ، التي تكتب بالشكل الآتي :

$$\sum_{n=7}^{\infty}\frac{w^{(n)}(x)}{\omega_n^2}\int_0^t (AF)_n(\tau)\sqrt{\omega_n}\sin\sqrt{\omega_n}(t-\tau)d\tau$$

متقاربة بانتظام في اسطوانة مغلقة .

بإجراء المناقشة السابقة نفسها ، فإنَّنا سنرى التقارب من المتسلسلة :

$$\sum_{n=7}^{\infty}\int_0^c\left((AF)_n(\tau)\right)^2\omega_n d\tau$$

التأكيد الأخير ينتج مباشرة من المبرهنة (1) ومن مبرهنة انتقال النهاية تحت إشارة تكامل ليبغ .

إنَّ المتبقي لنا إثبات أنَّ متسلسلة فورييه للدالة المتجهية $F(x,t)$:

$$\sum_{n=1}^{\infty}F_n(t)w^n(x) \tag{45}$$

متقاربة بانتظام في الاسطوانة المغلقة $\bar{\Omega}$.

لندرس المتسلسلة :

$$\sum_{n=7}^{\infty}w^{(n)}(x)\int_0^t\frac{dF_n(\tau)}{d\tau}d\tau \tag{46}$$

ولنقدر باقي المتسلسلة (46) باستخدام متراجحة كوشي–بونياكوفسكي :

$$\left|\sum_{n=m}^{m+p} w^{(n)}(x)\int_0^t \frac{dF_n(\tau)}{d\tau}d\tau\right| \le \left[\sum_{n=m}^{m+p}\frac{\left|w^{(n)}(x)\right|^2}{\omega_n^2}\sum_{n=m}^{m+p}\int_0^e\left|\frac{dF_n(\tau)}{d\tau}\right|^2\omega_n^2 d\tau\right]^{\frac{1}{2}}$$

باستخدام المبرهنة (2) للدالة المتجهية $\frac{\partial F(x,t)}{\partial t}$ ، ومن مبرهنة انتقال النهاية تحت إشارة التكامل نستطيع القول إنَّ المتسلسلة :

$$\sum_{n=7}^{\infty}\int_0^e\left|\frac{dF_n(\tau)}{d\tau}\right|^2\omega_n^2 d\tau$$ متقاربة .

هنا وبالانتقال إلى حساب المحدودية بانتظام لمجموع المتسلسلة (35) نجد أنَّ المتسلسلة (46) متقاربة بانتظام في $\overline{\Omega}$. من (46) لدينا :

$$\sum_{n=7}^{\infty} w^{(n)}(x)\int_0^t \frac{dF_n(\tau)}{d\tau}d\tau = \sum_{n=7}^{\infty}F_n(t)w^{(n)}(x) - \sum_{n=7}^{\infty}F_n(0)w^{(n)}(x)$$

واضح الآن أنَّه لإثبات التقارب المنتظم للمتسلسلة (45) في $\overline{\Omega}$ فإنَّه يكفينا أنْ نرى أنَّ المتسلسلة :

$$\sum_{n=7}^{\infty}F_n(0)w^{(n)}(x) \qquad (47)$$ متقاربة بانتظام في $\overline{D}$.

لنقدِّر باقي المتسلسلة (47) كما يلي :

$$\left|\sum_{n=m}^{m+p}F_n(0)w^{(n)}(x)\right| \le \left[\sum_{n=m}^{m+p}\frac{\left|w^{(n)}(x)\right|^2}{\omega_n^2}\sum_{n=m}^{m+p}F_n^2(0)\omega_n^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

بتطبيق المبرهنة (2) لـ $F(x,0)$ ، نحصل مباشرة على تقارب المتسلسلة :

$$\sum_{n=7}^{\infty}F_n^2(0)\omega_n^2$$

الآن وبالانتقال إلى حساب المحدودية بانتظام لمجموع المتسلسلة (35) نحصل على التقارب المنتظم للمتسلسلة (47) في $\overline{D}$ ، التي تكمل إثبات طريقة فورييه للمسألة المفروضة

المراجع العلمية

1 . Martin H . Sadd .,2009 – Elasticity (Theory , Applications) , Kingston , Rhode Island , 535 p

2 . Agoshkov.V.I , Dubovski . P.B , Shutyaev.V.P,2006 – Methods for Solving Mathematical Physics Problems , Cambridge International Science Publishing , 335 p .

3 . Kubradze . V , Gegelia . T , Basheleishvili . M ,and Burchuladze .V , 1979 – Three Dimensional Problems of the Mathematical theory of Elasticity and thermoelasticity . (Translated from Russian) North-Holland series in applied mathematics and mechanics , v.25 .

4 . Natroshvili .D.G , Jagmaidze .A .Ya , 2003 – Dynamic problems of the classical theory of elasticity for piecewise - homogeneous Bodies . Tbilisi University Press , Tbilisi .

5 . Vitaly.Volpert ,2011 – Elliptic Partial Differential Equations V1 Birkhauser . Springer Basel AG , 658 p .

دراسة مسألة التحريك الحدية الأولى
لنظرية المرونة الرياضية

د . أحمد الجاعور – أستاذ مساعد في كلية العلوم – جامعة البعث

ملخص البحث

تمَّ في هذا البحث ، استعمال طريقة جديدة تعرف بطريقة فورييه ، إثبات وجود الحل المنتظم للمسألة $(I)_{F,\varphi,\psi,0,0,0}$ من مسألة التحريك الحدية الأولى لنظرية المرونة الرياضية $(I)_{F,\varphi,\psi,\Phi,\Psi,f}$ المصاغة بالشكل التالي :

أوجد المتجه المنتظم $\overset{k}{u}(x,t)\,;k=\overline{0,r}$ الذي يحقق جملة المعادلات :

$$\forall (x,t)\in \Omega_k \ : \overset{k}{A}(\partial_x)\overset{k}{u}(x,t)-\rho\frac{\partial^2 \overset{k}{u}(x,t)}{\partial t^2}=-\overset{k}{F}(x,t)\ ;\ k=\overline{0,r}$$

مع الشروط التالية :

$$\forall x\in \overline{D}_k \ : \lim_{t\to 0}\overset{k}{u}(x,t)=\overset{k}{\varphi}(x)$$

$$\lim_{t\to 0}\frac{\partial \overset{k}{u}(x,t)}{\partial t}=\overset{k}{\psi}(x,t)\ ;\ k=\overline{0,r}$$

$$\forall (z,t)\in S_k\times \overline{L}:\left(\overset{0}{T}\left(\partial_z,n(z)\right)\overset{0}{u}(z,t)\right)^{+}=\overset{k}{f}\ (z,t);k=0,r+1,...,m$$

حيث $\overset{k}{F},\overset{k}{\varphi},\overset{k}{\psi},\overset{k}{\Phi},\overset{k}{\Psi},\overset{k}{f}$ دوال متجهية .

كلمات مفتاحية :

Mathematical Elasticity , Boundary problem

Studying a first Boundary Dynamic problem of the mathematical Elasticity theory

Dr . Ahmad Aljaour

SUMMARY

In this paper we proved the existence of the regular solution for the problem $(I)_{F,\varphi,\psi,0,0,0}$ of the first boundary dynamic problem of the mathematical elasticity theory $(I)_{F,\varphi,\psi,\Phi,\Psi,f}$ given by :

Find the regular vectors : $\overset{k}{u}(x,t)$; $k=\overline{0,r}$ satisfying the system of equations :

$$\forall (x,t)\in \Omega_k : \overset{k}{A}(\partial_x)\overset{k}{u}(x,t)-\rho\frac{\partial^2 \overset{k}{u}(x,t)}{\partial t^2}=-\overset{k}{F}(x,t)\ ;\ k=\overline{0,r}$$

with The conditions :

$$\forall x\in \overline{D}_k : \lim_{t\to 0}\overset{k}{u}(x,t)=\overset{k}{\varphi}(x)$$

$$\lim_{t\to 0}\frac{\partial \overset{k}{u}(x,t)}{\partial t}=\overset{k}{\psi}(x,t)\ ;\ k=\overline{0,r}$$

$$\forall (z,t)\in S_k\times \overline{L} : \left(\overset{0}{T}\left(\partial_z,n(z)\right)\overset{0}{u}(z,t)\right)^+=\overset{k}{f}(z,t); k=0,r+1,\ldots,m$$

here. $\overset{k}{F},\overset{k}{\varphi},\overset{k}{\psi},\overset{k}{\Phi},\overset{k}{\Psi},\overset{k}{f}$ are vector functions .

In improving that the Fourier method was used .

Key words

Mathematical Elasticity , Boundary problem