معادلات الحالتين المستويتين لانفعالات جسم استقطابي ترموديناميكي مرن ذي توجّهات مقيّدة بالإزاحات

خضر منهل الصالح[1] أ.د.منتجب الحسن [2]

ملخص البحث:

يتعلّق البحث بالجسم الاستقطابي المرن والمتجانس والمتماثل المناحي، وذي التوجّهات المقيّدة بالإزاحات، والخاضع لحرارة، والمناقش رياضياً من خلال الباحثين كويتير [1] ومندلين [2,3]، والذي نرمز له اختصاراً بالرمز K–M.

في البحث، باستخدام طريقة مشابهة للطريقة المستخدمة في [6,7]، تم استنتاج معادلات النموذج الرياضي التقليدي ونموذج لامي الرياضي الحاكمين للحالتين الترموديناميكية والديناميكية للجسم الاستقطابي المرن، ضمن الحالتين: المستوية الأولى والمستوية الثانية (المستوية العكسية) للانفعالات المرنة ، على الترتيب ، حيث يشغل الجسم في لحظة البدء منطقة بسيطة الترابط Ω في R^2.

[1] طالب ماجستير في قسم الرياضيات - كلية العلوم - جامعة البعث.

[2] أستاذ في قسم الرياضيات – كلية العلوم – جامعة البعث.

الكلمات المفتاحية: الحالة المستوية الأولى للانفعالات المرنة – الجسم المرن الاستقطابي المرن ذي التوجهات المقيدة بالازاحات – الحلول الأساسيّة .

The Equations of the two Plane States of Elastic Strains for the Thermodynamical Polar Body of Constructed Rotations

Kheder Manhal AL-Saleh † **Prof.Dr.Mountajab Al-Hasan** ‡

Summary:

The paper relates to the homogeneous isotropic thermodynamical polar body of constructed rotations, subjected to temperature field, which mathematically discussed by Koiter [1] and Mindlin [2,3], and shortly called K-M polar body.

In paper, using method similar to that method in [6,7], we derive the basic equations, relations and laws governing the thermodynamical first plane state and the dynamical anti-plane state of the elastic strains for the thermodynamical polar body K-M ,which occupies simply connected region Ω in R^2 at the initial moment .

† Mgr Student in Department of Mathematics–Faculty of Science–Al–Baath University.
‡ Professor At Department of Mathematics – Faculty of Science–Al–Baath University.

Key words: The First Plane State of Elastic Strains – The Polar Elastic Body of Constructed Rotations – The Fundamental Solutions.

1. مقدمة :

تعود دراسة النموذج الرياضي للأوساط الاستقطابيّة (لدنة ،مرنة ، مائعة) إلى النصف الثاني من القرن العشرين بدأً من راسكو [4] ، ومروراً بكويتر [1] ومندلين [2,3]، وسوكووفسكي [5] ، حيث قام راسكو بمناقشة النموذج الرياضي التقليدي لوسط مادي استقطابي يملك ست درجات حريّة هي ثلاث إزاحات وثلاث توجّهات مستقلّة عن هذه الإزاحات، في الوقت الذي ركّز فيه كويتر ومندلين على أجسام مرنة استقطابيّة حيث التوجّهات مرتبطة بالإزاحات ضمن مايسمّى بـ " نظريّة العزوم " أما في بحث سوكووفسكي فقد قام الباحث بمناقشة تفصيليّة لنظريّة العزوم ونظريّة العزوم المعدّلة بما يتعلّق بالجسم المرن الاستقطابي، ذي التوجهات المرتبطة بالإزاحات.

2. هدف البحث:

يهدف البحث إلى استنتاج معادلات النموذج الرياضي التقليدي ونموذج لامي الرياضي الحاكمين للحالتين الترموديناميكية والديناميكية للجسم الاستقطابي المرن، ضمن الحالتين: المستوية الأولى والمستوية الثانية (المستوية العكسية) للانفعالات المرنة ، على الترتيب ، حيث الجسم يشغل في لحظة البدء منطقة بسيطة الترابط Ω في R^2 .

3. طرق وأدوات البحث:

في البحث سنستخدم طريقة مشابهة للطريقة المستخدمة في [6] من أجل استنتاج النموذج الرياضي التقليدي ونموذج لامي الرياضي الحاكمين للحالتين الترموديناميكية والديناميكية للجسم الاستقطابي، ضمن الحالتين المستوية الأولى والمستوية الثانية (المستوية العكسية) للانفعالات المرنة، حيث الجسم يشغل في لحظة البدء منطقة بسيطة الترابط Ω في R^2 .

وهنا ننوه إلى أن مسألتا الحالة المستوية الأولى والثانية للجسم الاستقطابي المرن والخاضع لحرارة، هما مسألتان نوعيتان، حلولهما لا تنتجان عن الحلول في الحالة الفراغية للانفعالات المرنة لهذا الجسم، الأمر الذي يقودنا إلى استنتاج المعادلات الحاكمة لهذا الجسم المرن الاستقطابي، ضمن هاتين الحالتين المستويتين للانفعالات المرنة.

4. النتائـج والمناقشة:

فيما يلي سنستنتج معادلات الوصف التقليدي ومعادلات وصف لامي للحالة الترموديناميكيّة للجسم الاستقطابي المرن الخاضع لحرارة، ضمن الحالة المستوية الأولى للانفعالات المرنة،كما سنستنتج معادلات الوصف التقليدي ومعادلات وصف لامي للحالة الديناميكية للجسم الاستقطابي المرن، المذكور ،ضمن الحالة المستوية الثانية (الحالة المستوية العكسية) للانفعالات المرنة،حيث الجسم يشغل في لحظة البدء منطقة بسيطة الترابط Ω في R^2 [6].

توطئة : سنعتمد رموز أينشتاين (اتفاقية الجمع على الأدلة اللاتينية المكررة) على R^3 حيث الأدلة: i, j, k تأخذ القيم $1,2,3$، كما سنعتمد رموز أينشتاين (اتفاقية الجمع على الأدلة الإغريقية المكررة) على R^2 حيث الأدلة الإغريقية: α, β, γ تأخذ القيم $1,2$.

تتعين الحالة الترموديناميكية المرنة للجسم المرن الاستقطابي ذي التوجهات المقيدة بالازاحات وضمن الحالة المستوية الأولى للانفعالات المرنة، بواسطة مجموعة المقاطع التنسورية: $\left(u_i, \varphi_i, \varepsilon_{ij}, \kappa_{ij}, S_{ij}, m_{ij}, \theta\right)$، حيث:

u_i : تمثل المركبات الديكارتيّة لمقطع الإزاحات،

φ_i : تمثل المركبات الديكارتيّة لمقطع التوجّهات والتي ترتبط بالإزاحات وفق العلاقة:

$$u_i = \frac{1}{2} \in_{ijk} u_{\kappa, j}$$

حيث $\in_{ijk}$: هي المركبات الديكارتيّة لمقطع ليفي- تشيفيتا التنسوري النسبي كما انّ الفاصلة الدليليّة تدلّ على المشتق الجزئي بالنسبة للموضع: $\frac{\partial u_k}{\partial x_j}$.

ε_{ij} : تمثل المركبات الديكارتيّة لمقطع الانفعال الجهري المتناظر .

κ_{ij} : تمثل المركبات الديكارتيّة لمقطع الانفعال المجهري غير المتناظر .

S_{ij} : تمثل المركبات الديكارتية لمقطع الاجهادات الجهرية المتناظر .

m_{ij} : هي المركبات الديكارتيّة للجزء المائل لمقطع الإجهادات المجهريّة الغير متناظر.

أخيراً $\theta = T - T_0$: هو المقطع الحراري الذي يصف تغيّر درجة الحرارة المطلقة T في الجسم الاستقطابي عن درجة الحرارة الطبيعيّة T_0 [3] .

[3] نسمّي درجة الحرارة التي تتوافق مع انفعالات معدومة للجسم $(\boldsymbol{\varepsilon} = 0 , \boldsymbol{\kappa} = 0)$ بدرجة الحرارة الطبيعيّة.

4-1. الوصف التقليدي للحالة الترموديناميكيّة للجسم الاستقطابي المرن الخاضع لحرارة ضمن الحالة المستوية الأولى للانفعالات المرنة حيث الجسم يشغل في لحظة البدء منطقة بسيطة الترابط Ω في R^2:

ضمن الحالة المستوية الأولى للانفعالات المرنة تكون جميع المركّبات الديكارتيّة المذكورة أعلاه مستقلّة عن الإحداثي x_3 أي تتبع لـ x_1, x_2 وكذلك للزمن وعندئذٍ تُعطى المقاطع التنسوريّة المذكورة أعلاه في $\Omega \times]0, \infty[$ وفي المعلم الديكارتي العطالي المتجانس (O, e_i) تُعطى بالعلاقات :

$$\mathbf{u} \equiv (u_1, u_2, 0) \tag{4.1}$$

$$\boldsymbol{\varphi} \equiv (0, 0, \varphi_3) \tag{4.2}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} \equiv \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & 0 \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{4.3}$$

$$\boldsymbol{\kappa} \equiv \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \kappa_{31} & \kappa_{32} & 0 \end{bmatrix} \tag{4.4}$$

$$\mathbf{S} \equiv \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & 0 \\ S_{21} & S_{22} & 0 \\ 0 & 0 & S_{33} \end{bmatrix} \tag{4.5}$$

$$\mathbf{m} \equiv \begin{bmatrix} 0 & 0 & m_{13} \\ 0 & 0 & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & 0 \end{bmatrix} \tag{4.6}$$

$$S_{33} = \nu S_{\gamma\gamma} - \frac{\mu}{\mu + \lambda} \nu_{\mathrm{T}} \theta \tag{4.7}$$

$$m_{\alpha 3} = \eta\, m_{3\alpha} \; ; \alpha = 1, 2 \tag{4.8}$$

$$\varphi_3 = \frac{1}{2} \in_{\alpha\beta} u_{\beta,\alpha} = \frac{1}{2}\left(u_{2,1} - u_{1,2}\right) \tag{4.9}$$

حيث $\in_{\alpha\beta}$ مقطع ليفي– تشيفيتا التنسوري النسبي على R^2، و $\nu = \dfrac{\lambda}{2(\mu + \lambda)}$ نسبة بواسون، كما أن: $\nu_T = (3\lambda + 2\mu)\, a_t$، حيث a_t هو معامل التمدد الخطي الحراري

للجسم، أخيراً $\mu\,,\lambda\,,\eta$ تمثل أول ثلاثة ثوابت مادية للجسم الاستقطابي المرن المدروس،

أما مقطعا القوة الحجمية والعزم الحجمي (المعطيان)، فيأخذا الشكل التالي في $\Omega\times]0,\infty[$:

$$\mathbf{X}\equiv\left(X_1,X_2,0\right) \tag{4.10}$$

$$\mathbf{Y}\equiv\left(0,0,Y_3\right) \tag{4.11}$$

معادلات الحركة المحققة في $\Omega\times]0,\infty[$:

$$S_{\beta\alpha\,,\,\beta}+\frac{1}{2}\in_{\alpha\beta}(m_{\gamma3,\gamma\beta}+Y_{3,\beta})+X_{\alpha}=\rho\ddot{u}_{\alpha}\;;\alpha=1,2 \tag{4.12}$$

حيث ρ الكثافة الحجمية للجسم المدروس، والنقطة تدل على المشتق الجزئي الزمني:

$$\dot{f}\equiv\frac{\partial f}{\partial t}\;,\;\ddot{f}\equiv\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$$.

العلاقات الهندسيّة المحققة في $\Omega\times]0,\infty[$:

$$\varepsilon_{\beta\alpha}=\frac{1}{2}\left(u_{\alpha,\beta}+u_{\beta,\alpha}\right),\qquad \kappa_{3\alpha}=\varphi_{3,\alpha} \tag{4.13}$$

العلاقات التأسيسيّة المحققة في $\Omega\times]0,\infty[$:

$$\begin{aligned} s_{\beta\alpha}&=2\mu\varepsilon_{\beta\alpha}+\left(\lambda\,\varepsilon_{\gamma\gamma}-\nu_{\mathrm{T}}\theta\right)\delta_{\beta\alpha}\;,\\ m_{\alpha3}&=4\mu l^{*2}\eta\,\kappa_{3\alpha}\quad;\alpha,\beta=1,2\end{aligned} \tag{4.14}$$

معادلات التوصيل الحراري المحققة في $\Omega\times]0,\infty[$:

$$D\theta-\eta_0\dot{\gamma}_{\alpha\alpha}=-\frac{Q}{\kappa} \tag{4.15}$$

$$Q=\frac{\kappa\,W}{\lambda_0}\;,\;\;\kappa=\frac{\lambda_0}{c_{\varepsilon}}\;,\;\;\eta_0=\frac{\nu_T\,T_0}{\lambda_0}\;,\;D=\Delta_1-\frac{1}{\kappa}\partial_t \tag{4.16}$$

علماً أن Q يمثل المصادر الحرارية في الجسم المعتبر و W كمية الحرارة المشكَلة في وحدة الحجم ووحدة الزمن ، و λ_0 معامل التوصيل الحراري ، و c_{ε} تمثل الحرارة النوعية من أجل تشوه ثابت، كما أن: Δ_1 مؤثر لابلاس السلمي ثنائي البعد؛ $\Delta_1 f=f_{,\alpha\alpha}$ ، وكذلك:

$$\partial_t f\equiv\dot{f}\equiv\frac{\partial f}{\partial t}$$ ،

تدعى الثوابت: $\mu\,,\lambda\,,\,\eta\,,l^*$ الداخلة في العلاقات التأسيسية (4.14) بثوابت مرونة الجسم المعتبر، وهي تحقق متراجحات الطاقة:

$$\mu>0\;,\;\lambda>0\;,\;l^*\geq0\;,\;|\eta|<0 \tag{4.17}$$

إلى ذلك نضيف الشروط الحديّة والابتدائيّة التالية:

الشروط الحديّة على $\partial\Omega \times [0,\infty[$:

$$u_\alpha = f_\alpha ; \alpha = 1,2 \quad , \varphi_\alpha^0 = g_\alpha \; , \theta = \vartheta \qquad (4.18)$$

و φ_α^0 مركبات المتجه $\boldsymbol{\varphi} \equiv (0,0,\varphi_3)$ في المستوي المماس للجسم في النقطة $x \equiv (x_1, x_2, 0)$ واللحظة $t > 0$، حيث التوابع : $g_\alpha, f_\alpha, \theta$ معلومة على $\partial\Omega \times [0,\infty[$،

الشروط الابتدائيّة في $\Omega \times \{0\}$:

$$u_\alpha = k_\alpha \qquad , \dot{u}_\alpha = \psi_\alpha \quad , \theta = l \qquad (4.19)$$

حيث : l , ψ_α , k_α توابع معلومة في Ω .

تعريف: نسمّي مجموعة المقاطع التنسوريّة $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\kappa}, \mathbf{S}, \mathbf{m}, \theta)$ المعطاة بـ $(4.1)-(4.9)$ والمحققة للمعادلات والشروط السابقة، نسميها بالسلوك الترموديناميكي التقليدي للجسم الاستقطابي المرن ذي الدورانات المقيّدة بالإزاحات ضمن الحالة المستوية الأولى للانفعالات المرنة.

2-4. وصف لامي للجسم الترموديناميكي الاستقطابي المرن ضمن الحالة المستوية الأولى للانفعالات المرنة:

من أجل الحصول على هذا الوصف نتبع مايلي:

الخطوة الأولى نعوّض العلاقات الهندسيّة (4.13) في العلاقات التأسيسيّة (4.14) فنحصل على العلاقتين التاليتين المحققتين في $\Omega \times]0,\infty[$:

$$\begin{aligned} S_{\beta\alpha} &= \mu\left(u_{\beta,\alpha} + u_{\alpha,\beta}\right) + \left(\lambda u_{\gamma,\gamma} - \nu_T \theta\right)\delta_{\beta\alpha} \quad ; \alpha, \beta = 1,2, \\ m_{3\alpha} &= 4\mu l^{*2} \varphi_{3,\alpha} \end{aligned} \qquad (4.20)$$

في الخطوة الثانية نعوض (4.20) في (4.12) (معادلات الحركة) كما نعوّض العلاقة

$$\gamma_{\alpha\alpha} = u_{\alpha,\alpha} \qquad (4.21)$$

في معادلة التوصيل الحراري فنحصل مباشرةً على معادلات لامي التالية والمحققة أيضاً في $\Omega \times]0,\infty[$:

$$\begin{aligned} &\mu \Delta_1 u_\alpha - \rho \ddot{u}_\alpha + (\mu + \lambda) u_{\beta,\beta\alpha} - \nu_T \theta_{,\alpha} + \\ &-\frac{1}{2} \in_{\alpha\beta} \left(2\mu l^{*2} \eta \Delta_1 \in_{\gamma\varepsilon} u_{\gamma,\varepsilon\beta} + Y_{3,\beta}\right) + X_\alpha = 0, \end{aligned} \qquad (4.22)$$

$$D_\theta - \eta_0 \dot{u}_{\alpha\alpha} = -\frac{Q}{\kappa} \tag{4.23}$$

وبما أن:

$$\in_{\alpha\beta}\in_{\gamma\varepsilon} = \begin{vmatrix} \delta_{\alpha\gamma} & \delta_{\alpha\varepsilon} \\ \delta_{\beta\gamma} & \delta_{\beta\varepsilon} \end{vmatrix} = \delta_{\alpha\gamma}\delta_{\beta\varepsilon} - \delta_{\alpha\varepsilon}\delta_{\beta\gamma} \tag{4.24}$$

فينتج عن ذلك أن المعادلة (4.22) تأخذ الشكل التالي في $\Omega \times]0,\infty[$:

$$\mu \Delta_1 u_\alpha - \rho \ddot{u}_\alpha + (\mu+\lambda) u_{\beta,\beta\alpha} - \nu\, \theta_{,\alpha} +$$

$$-\frac{1}{2} \in_{\alpha\beta} \left(2\mu l^{*2} \eta \Delta_1 \in_{\gamma\varepsilon} u_{\varepsilon,\gamma\beta} + Y_{3,\beta} \right) + X_\alpha = 0,$$

وباستخدام خاصة تصفية دلتا كرونيكر تأخذ المعادلة السابقة الشكل التالي في $\Omega \times]0,\infty[$:

$$\begin{aligned} &\left(\mu \Delta_1 - \mu l^{*2} \eta \Delta_1^2 - \rho \partial_t^2 \right) u_\alpha + \left[(\mu+\lambda) + \mu l^{*2} \eta \Delta_1 \right] u_{\beta,\beta\alpha} \\ &-\nu\, \theta_{,\alpha} + X_\alpha - \frac{1}{2} \in_{\alpha\beta} Y_{3,\beta} = 0, \end{aligned} \tag{4.25}$$

وإذا فرضنا أن:

$$\Box_0 = \Delta_1 \left(l^{*2} \eta \Delta_1 - 1 \right) + \frac{1}{\hat{c}_2^2} \partial_t^2 \quad \text{و} \quad \hat{c} = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \quad \text{و} \quad \nu = \frac{\lambda}{2(\mu+\lambda)}, \tag{4.26}$$

$$F_\alpha = X_\alpha - \frac{1}{2} \in_{\alpha\beta} Y_{3,\beta} \tag{4.27}$$

عندئذٍ تأخذ المعادلة (4.25) الشكل التالي في $\Omega \times]0,\infty[$:

$$\Box_0 u_\alpha + \left(\frac{1}{2\nu - 1} - l^{*2} \eta \Delta_1 \right) u_{\beta,\beta\alpha} + \frac{\nu_T}{\mu} \theta_{,\alpha} - \frac{1}{\mu} F_\alpha = 0 \tag{4.28}$$

تسمّى المعادلات (4.28) و (4.23) بمعادلات لامي للجسم الترموديناميكي الاستقطابي المرن من نوع كويتر-مندلين K-M ، ضمن الحالة المستوية الأولى للانفعالات المرنة.

نضيق إلى هذه المعادلات الشروط الحديّة التالية على $\partial\Omega \times]0,\infty[$:

$$u_\alpha = f_\alpha ; \alpha = 1,2 \quad , \varphi_\alpha^0 = g_\alpha \quad , \theta = \vartheta \tag{4.29}$$

والشروط الابتدائيّة التالية المحققة في $\Omega \times \{0\}$:

$$u_\alpha = k_\alpha \quad , \dot{u}_\alpha = \psi_\alpha \quad , \theta = l \tag{4.30}$$

تعريف: ندعو مجموعة المقاطع التنسوريّة $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\kappa}, \mathbf{S}, \mathbf{m}, \theta)$ المعطاة بـ $(4.1)-(4.9)$ والتي تحقق معادلات لامي(4.28) و (4.23) مع الشروط الحديّة (4.29) والشروط

الابتدائيّة (4.30) والتي تحقق (4.20) والعلاقات الهندسيّة (4.13) أيضاً، نسميها بوصف لامي للجسم الترموديناميكي المرن من نوع كوتير ومندلين ضمن الحالة المستوية الأولى للانفعالات المرنة.

3-4. الوصف التقليدي للحالة الديناميكية للجسم الاستقطابي المرن ضمن الحالة المستوية الثانية (الحالة المستوية العكسية) للانفعالات المرنة حيث الجسم يشغل في لحظة البدء المنطقة بسيطة الترابط Ω في R^2.

توطئة: تتعيين الحالة الديناميكية المرنة للجسم المرن الاستقطابي ذي التوجّهات المقيدة بالإزاحات، ضمن الحالة المستوية العكسية للانفعالات المرنة، بواسطة مجموعة المقاطع التنسورية $\left(u_i,\varphi_i,\varepsilon_{i\,j},\kappa_{i\,j},S_{i\,j},m_{i\,j}\right)$ كما هو مبين في التوطئة السابقة مع العلم أنه هنا لا يظهر الحقل الحراري θ.

ضمن الحالة المستوية الثانية (المستوية العكسية)للانفعالات المرنة تكون جميع المركبات الديكارتية المذكورة أعلاه مستقلة عن الإحداثي x_3 أيضاً وتتبع لـ x_1,x_2,t ، حيث تعطى المقاطع التنسورية المذكورة أعلاه في $\Omega\times]0,\infty[$ وفي المعلم الديكارتي العطالي المتجانس المعتبر على النحو الآتي:

$$\mathbf{u}\equiv\left(0,0,u_3\right) \tag{4.31}$$

$$\boldsymbol{\varphi}\equiv\left(\varphi_1,\varphi_2,0\right) \tag{4.32}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}\equiv\begin{bmatrix}0 & 0 & \varepsilon_{13}\\ 0 & 0 & \varepsilon_{23}\\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & 0\end{bmatrix} \tag{4.33}$$

$$\boldsymbol{\kappa}\equiv\begin{bmatrix}\kappa_{11} & \kappa_{21} & 0\\ \kappa_{21} & \kappa_{22} & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix} \tag{4.34}$$

$$\mathbf{S}\equiv\begin{bmatrix}0 & 0 & S_{13}\\ 0 & 0 & S_{23}\\ S_{31} & S_{32} & 0\end{bmatrix} \tag{4.35}$$

$$\mathbf{m} \equiv \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & 0 \\ m_{21} & m_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad (4.36)$$

$$\varphi_\alpha = \frac{1}{2} \in_{\alpha\beta} u_{3,\beta} \qquad (4.37)$$

أما مقطعا القوة الحجمية والعزم الحجمي (المعطيات)، فتأخذ الشكل التالي في $]0,\infty[\times\Omega$:

$$\mathbf{X} \equiv (0,0,X_3) \qquad (4.38)$$

$$\mathbf{Y} \equiv (Y_1, Y_2, 0) \qquad (4.39)$$

يتألف الوصف التقليدي للجسم الديناميكي الاستقطابي المرن ضمن الحالة المستوية العكسية للانفعالات المرنة،يتألف من المعادلات والعلاقات الأساسية والشروط الحدية والابتدائية التالية:

معادلات الحركة في $]0,\infty[\times\Omega$:

$$S_{\beta 3,\beta} - \frac{1}{2} \in_{\alpha\beta} (m_{\gamma\alpha,\gamma\beta} + Y_{\alpha,\beta}) + X_3 = \rho \ddot{u}_3 \qquad (4.40)$$

العلاقات الهندسية المحققة في $]0,\infty[\times\Omega$:

$$\varepsilon_{\alpha 3} = \frac{1}{2} u_{3,\alpha} \,, \qquad \kappa_{\alpha\beta} = \varphi_{\alpha,\beta} \,, \varphi_\alpha = \frac{1}{2} \in_{\alpha\beta} u_{3,\beta} \qquad (4.41)$$

العلاقات التأسيسيّة المحققة في $[0,\infty[\times\Omega$:

$$s_{\alpha 3} = 2\mu \varepsilon_{\alpha 3} \qquad (4.42)$$

$$m_{\alpha\beta} = 4\mu l^{*2} \left(\kappa_{\alpha\beta} + \eta \kappa_{\beta\alpha}\right) \qquad (4.43)$$

الشروط الحديّة على $[0,\infty[\times\partial\Omega$:

$$u_3 = f_3 \,, \varphi_\alpha^0 = \omega_\alpha \,;\, \alpha = 1,2 \qquad (4.44)$$

و φ_α^0 مركبات المتجه $\boldsymbol{\varphi} \equiv (\varphi_1, \varphi_2, 0)$ في المستوي المماس للجسم في النقطة $x \equiv (x_1, x_2, 0)$ واللحظة $t > 0$، حيث التوابع: $f_3 \,,\, \omega_\alpha$ معلومة على $[0,\infty[\times\partial\Omega$،

الشروط الابتدائيّة في $\{0\}\times\Omega$:

$$u_3 = k_3 \,, \quad \dot{u}_3 = h_3 \qquad (4.45)$$

حيث : h_3 , k_3 توابع معلومة في Ω.

تعريف: نسمّي مجموعة المقاطع التنسوريّة $(\mathbf{u},\varphi,\boldsymbol{\varepsilon},\boldsymbol{\kappa},\mathbf{S},\mathbf{m},\theta)$ المعطاة بـ $(4.31)-(4.37)$ الممثلة بالمعادلات السابقة، نسميها بالسلوك الديناميكي التقليدي للجسم الاستقطابي المرن ذي الدورانات المقيّدة بالإزاحات ضمن الحالة المستوية العكسية للانفغالات المرنة.

4-4 . *وصف لامي للجسم الديناميكي الاستقطابي المرن ضمن الحالة المستوية العكسية للانفعالات:*

من أجل الحصول على هذا الوصف نتبع مايلي:

في الخطوة الأولى نعوّض المعادلتين الأولى والثانية من العلاقات الهندسيّة (4.41) في العلاقات التأسيسيّة (4.42) و(4.43) فنحصل على العلاقتين التاليتين المحققتين في $\Omega\times]0,\infty[$:

$$S_{\alpha 3}=\mu u_{3,\alpha} \tag{4.46}$$

$$m_{\alpha\beta}=4\mu l^{*2}\left(\varphi_{\alpha,\beta}+\eta\,\varphi_{\beta,\alpha}\right) \tag{4.47}$$

وفي الخطوة الثانية، نعوض (4.46) و(4.47) والعلاقة الثالثة في(4.41)، في معادلات الحركة (4.40)، فنحصل على معادلة لامي التالية المحققة في $\Omega\times]0,\infty[$:

$$\mu\Delta_1 u_3-\frac{1}{2}\in_{\alpha\beta}\left(4\mu l^{*2}\eta\,\Delta_1 u_{\alpha,\beta}+Y_{\alpha,\beta}\right)+X_3=\rho \ddot{u}_3 \tag{4.48}$$

نضيف إلى ذلك الشروط الحدية والابتدائية (4.44) و(4.45).

تعريف: ندعو المسألة المؤلفة من معادلة لامي (4.42) والشروط الحدية والابتدائية (4.44)و(4.45)والعلاقات (4.46)و(4.47)والعلاقة الهندسية (4.41)،ندعوها مسألة لامي للجسم الديناميكي الاستقطابي المرن ضمن الحالة المستوية العكسية للانفعالات المرنة.

5. الاستنتاجات والمقترحات:

1ً) الاستنتاجات: في البحث تم مناقشة مسألتا الوصف التقليدي ووصف لامي للجسم الاستقطابي المرن الترموديناميكي ضمن الحالة المستوية الأولى للانفعالات المرنة والديناميكي ضمن الحالة المستوية العكسية أيضاً.

2ً) المقترحات: هناك تناقض في مسألتي الحالة المستوية للانفعالات المرنة يتمثل بالآتي: من أجل الحالة ثلاثية البعد للانفعالات وعندما يشغل الجسم كامل الفضاء فإن الحل يتوافق مع تكاملات فورييه المتقاربة وعندما ننتقل إلى الحالة المستوية للانفعالات المرنة

مستوية كانت أو عكسية فإن التكاملات تصبح متباعدة الأمر الذي يقودنا إلى اقتطاع جزء من هذه التكاملات وهو الجزء الذي يشكل الحل حيث يدعى هذا الجزء بجزء Hadamard المنتهي، الأمر الذي يطرح المسائل التالية للمناقشة:

المسألة الأولى: مناقشة الحلول الأساسية لمسألة لامي للجسم المرن الاستقطابي ذي الدورانات المقيدة بالإزاحات وضمن الحالة المستوية الأولى للانفعالات المرنة حيث الجسم يشغل كامل R^2.

المسألة الثانية: إعادة ماتقدم ذكره لأجل مسألة الحالة المستوية العكسية للانفعالات المرنة.

المسألة الثالثة: إعادة ماتقدم ذكره لأجل مسائل الحالات المستوية للانفعالات اللدنة.

المراجع

[1]- Koiter ,W.T., 1964- Couple-Stresses in the theory of elasticity, Koninkl. Nederl. Akad . Van Wetensehappen. Proc .Ser . 8,1-1964 , 67 ,1,17,67,1,30 .

[2]- Mindlin ,R.D., Tiersten , H.F., 1962- Effects of couple–Stresses in linear elasticity , Arch . Rat.Mech.Anal., 1962,11,5,415.

[3]- Mindlin , R.D., 1963- Influence of couple-Stresses on stress concentration, Exper. Mech .,1963,3,1.

[4]- Stojanovič , R., **1970** – Recent Developments in the Thory of Polar Continua , Springer-Verlag.

[5]- Sokołowski , M., **1970** – Theory of Couple – Stresses in Bodies with Constrained Rotations, Springer-Verlag.

[6]- Dyszlewicz , J., **2004 -** Micropolar Theory of Elasticity , in : Series Lectures. Notes in Applied and Computational Mechanics, Vol.15, 356 p, Springer .

[7] –Nowacki, W. , **1986 -** Theory of Asymmetric Elasticity , Warsaw , PWN.