المـــودولات الثنــــائيــــة شبــــــه المحـــليــــة

إيمان الخوجة[1] حمزة حاكمي[2] مجد فاخوري[3]

الملخص

يعد مفهوم الحلقة المحلية من المفاهيم الأساسية في نظرية الحلقات، حيث إن الحلقة تكون محلية إذا حوت مثالياً أعظمياً واحداً فقط. لأجل ذلك تم نقل هذا المفهوم إلى المودولات الإسقاطية حيث نقول عن المودول الإسقاطي إنه محلي إذا حوى مودولاً جزئياً أعظمياً واحداً فقط. في هذه الورقة العلمية سندرس المودول الثنائي شبه المحلي كتعميم لحلقة الإندومورفيزمات المحلية لمودول وكذلك المفهوم الثنوي له وهو المودول الثنائي شبه المحلي المرافق.

وقد أثبتنا أنه لأجل أي مودولين M, N فوق حلقة R فإن المودول الثنائي $[M, N]$ يكون شبه محلي عندما وفقط عندما لأجل كل عنصر $\alpha \in [M, N]$ يحقق أن $Im(\alpha)$ ليس صغيراً في N فإن $Im(\alpha)$ حد مباشر في N. فضلاً عن ذلك، إذا كان المودول N شبه محلي، عندئذ فإنه لأجل أي مودول $M \in mod-R$ يكون المودول الثنائي $[M, N]$ شبه محلي وأن $\nabla[M, N] = [M, J(N)]$. وفي هذا السياق أثبتنا أنه إذا كان N هو $e-$مودول قابل للسحب ونصف إسقاطي فإن المودول N شبه محلي عندما وفقط عندما الحلقة E_N شبه محلية يمينية رئيسية وإن $\nabla E_N = J(E_N)$.

الكلمـات المفتاحيـة. الحلقـات والمـودولات شبه المحليـة، المـودولات القابلـة للسـحب ومرافقاتهـا، المودولات نصف الإسقاطية، المودولات نصف الأفقية.

رقم التصنيف العالمي للعام 2020: 16E50, 16E70, 16D40, 16D50.

---

[1] أستاذ مساعد قسم الرياضيات كلية العلوم جامعة البعث.

[2] أستاذ قسم الرياضيات كلية العلوم جامعة دمشق.

[3] طالب دراسات عليا فسم الرياضيات كلية العلوم جامعة البعث.

QUASI-LOCAL Bi-MODULES

Eaman Al-Khouja[1] Hamza Hakmi[2] Magd Alfakhory[3]

Abstract

The concept of local ring is one of the essential concept in rings theory. Where a ring is local if it contains one maximal ideal only. For that it is extended to projective modules, so we call a projective module is local if it contains only one maximal submodule.

In this scientific paper we study the semi-local bi-module as a generalization for the local endomorphism ring of module. Also, its the dual concept, that is the dual semi-local of bi-module.

We prove that for any modules M,N over a ring R, the bi-module $[M,N]$ is semi-local if and only if for every element $\alpha \in [M,N]$ such that the submodule $Im(\alpha)$ is not small in N, $Im(\alpha)$ is a direct summand of N.

In addition to that, we prove that if N is semi-local, then for every module $M \in mod-R$, the bi-module $[M,N]$ is semi-local and $\nabla[M,N]=[M,J(N)]$.

Furthermore, in this paper, we prove that if N was $e-$ retractable and semi-projective module, then the module is semi-local if and only if the ring endomorphism of N, E_N is principal right semi-local and $\nabla E_N = J(E_N)$.

Key Words: Quasi-local rings and modules, Retractable and co-retractable modules, Semi-projective modules, Semi-injective modules.

2020 **Mathematical Subject Classification:** 16E50, 16E70, 16D40, 16D50

[1] Professor, Department of Mathematics Al-Baath University.

[2] Professor, Department of Mathematics Damascus University.

[3] Department of Mathematics Al-Baath University.

المقدمـــــــــة.

يعد مفهوم الحلقة المحلية من المفاهيم الأساسية في نظرية الحلقات، حيث إن الحلقة تكون محلية إذا حوت مثالياً أعظمياً واحداً فقط، [6]. لأجل ذلك تم نقل هذا المفهوم إلى المودولات الإسقاطية حيث نقول عن المودول الإسقاطي إنه محلي إذا حوى مودولاً جزئياً أعظمياً واحداً فقط، [7].

في ورقة علمية سابقة درسنا المودولات شبه المحلية كتعميم للمودولات المحلية وفي هذه الورقة العلمية سندرس المودول الثنائي شبه المحلي وشبه المحلي المرافق. وقد أثبتنا أنه لأجل أي مودولين M, N فوق حلقة R فإن المودول الثنائي $[M, N]$ يكون شبه محلي عندما وفقط عندما لأجل كل عنصر $\alpha \in [M, N]$ يحقق أن $Im(\alpha)$ ليس صغيراً في N فإن $Im(\alpha)$ حد مباشر في N. فضلاً عن ذلك، إذا كان المودول N شبه محلي، عندئذ فإنه لأجل أي مودول $M \in mod-R$ يكون المودول الثنائي $[M, N]$ شبه محلي وأن $\nabla[M, N] = [M, J(N)]$. وفي هذا السياق أثبتنا أنه إذا كان N هو $e-$مودول قابل للسحب ونصف إسقاطي فإن الشروط الآتية متكافئة:

1 – المودول N شبه محلي.

2 – لأجل أي مودول $M \in mod-R$ فإن المودول الثنائي $[M, N]$ شبه محلي.

3 – الحلقة E_N شبه محلية يمينية رئيسية وأن $\nabla E_N = J(E_N)$.

بعد ذلك قمنا بدراسة المودولات شبه المحلية المرافقة وقد أثبتنا أنه لأجل أي مودولين M, N فوق حلقة R فإن المودول الثنائي $[M, N]$ يكون شبه محلي مرافق عندما وفقط عندما لأجل كل عنصر $\alpha \in [M, N]$ يحقق أن $Ker(\alpha)$ ليس كبيراً في M فإن $Ker(\alpha)$ حد مباشر في M. فضلاً عن ذلك، إذا كان المودول N شبه محلي مرافق، عندئذ فإنه لأجل أي مودول $N \in mod-R$ يكون المودول الثنائي $[M, N]$ شبه محلي مرافق وأن $\Delta[M, N] = J[M, N]$.

الهـــــدف مـــن البحــــث.

دراسة المودولات الثنائية شبه المحلية وشبه المحلية المرافقة وإيجاد العلاقة بينها وبين حلقة الإندومورفيزمات للمودولات شبه المحلية وشبه المحلية المرافقة.

1 – الدراســـة المـــرجعيــــــة.

جميع الحلقات R التي سندرسها هي حلقات واحدية فيها $0 \neq 1$ والمودولات فوق هذه الحلقات هي مودولات يمينية وواحدية. حلقة التشاكلات لأي مودول M سنرمز لها E_M. ليكن M, N مودولين فوق حلقة R، سنرمز $[M,N] = hom_R(M,N)$. إن المجموعة $[M,N]$ هي زمرة جمعية تبديلية [1]، وتشكل مودولاً يسارياً فوق الحلقة E_M ويمينياً فوق الحلقة E_N.

1–1. نقول عن المودول الجزئي A من المودول M إنه صغير في M إذا كان لأجل أي مودول جزئي آخر B في M يحقق $M = A + B$ ينتج أن $B = M$، [5].

1–2. نقول عن المودول الجزئي A إنه كبير في M، إذا كان لأجل أي مودول جزئي آخر B في M يحقق $A \cap B = 0$ ينتج أن $B = 0$، [5].

1–3. نقول عن المودول M إنه $(-e)$ قابل للسحب إذا كان لأجل كل مودول جزئي مغاير للصفر N للمودول M يوجد تشاكل مودولات (غامر) $\alpha : M \to N$ بحيث $\alpha \neq 0$. بمعنى آخر، إذا كان لأجل كل مودول جزئي مغاير للصفر N للمودول M فإن المثالي اليميني $Hom_R(M,N) \neq 0$، [3].

1–4. نقول عن المودول M إنه قابل للسحب مرافق إذا كان لأجل كل مودول جزئي $N \neq M$ للمودول M يوجد تشاكل مودولات $\alpha : M \to M$ بحيث $\alpha \neq 0$ ويحقق $\alpha(N) = 0$. بمعنى آخر، إذا كان لأجل كل مودول جزئي $N \neq M$ للمودول M فإن المثالي اليساري $\ell_S(N) \neq 0$ ونرمز له أحياناً بالشكل $Hom_R(M/N, M) \neq 0$، [2].

1–5. لأجل أي مودولين M, N فإن:

– المجموعة $\nabla[M,N] = \{\alpha : \alpha \in [M,N];\ Im(\alpha) \text{ is small in } N\}$ تشكل مودولاً جزئياً من المودول $[M,N]$ يسمى المودول الجزئي الشاذ، [4].

– المجموعة $\Delta[M,N] = \{\alpha : \alpha \in [M,N];\ Ker(\alpha) \text{ is large in } M\}$ تشكل مودولاً جزئياً من المودول $[M,N]$ يسمى المودول الجزئي الشاذ الثنوي، [4].

1-6. نقول عن المودول N إنه $M-$نصف إسقاطي إذا حقق أحد الشرطين المتكافئين الآتيين:

1 - لأجل كل $\alpha \in [M,N]$ فإن $\alpha[N,M]=[N,Im(\alpha)]$.

2 - لأجل كل $\alpha \in [M,N]$ فإن:

$$\alpha[N,M]=\{ f : f \in E_N ; Im(f) \subseteq Im(\alpha) \}.$$

ونقول عن المودول M إنه نصف إسقاطي إذا كان $M-$نصف إسقاطي، [3].

1-7. نقول عن المودول M إنه $N-$نصف أفقي إذا حقق أحد الشرطين المتكافئين الآتيين:

1 - لأجل كل $\alpha \in [M,N]$ فإن $[N,M]\alpha = \ell_{E_M}(Ker(\alpha))$.

2 - لأجل كل $\alpha \in [M,N]$ فإن:

$$[N,M]\alpha=\{ f : f \in E_M ; Ker(\alpha) \subseteq Ker(f) \}$$

ونقول عن المودول M إنه نصف أفقي إذا كان $N-$نصف أفقي، [4].

1-8. **تمهيدية**. إذا كان M مودولاً نصف أفقي قابل للسحب مرافق وأن $S=End_R(M)$، وكان N مودولاً جزئياً كبيراً في M، فعندئذ يكون المثالي اليساري $\ell_S(N)$ صغيراً في S، [4].

2 - الدراسة البحثية.

المودولات شبه المحلية.

تعريف.

ليكن M,N مودولين فوق حلقة R. نقول عن المودول الثنائي $[M,N]$ إنه شبه محلي إذا كان لأجل كل $\alpha \in [M,N]$ بحيث $Im(\alpha)$ ليس صغيراً في N فإن $Im(\alpha)$ هو حد مباشر في N.

تمهيدية 2-1.

ليكن M,N مودولين فوق حلقة R. عندئذ الشرطان الآتيان متكافئان:

1 - المودول $[M,N]$ شبه محلي.

2 – لأجل كل $\alpha \in [M,N]$ بحيث $\alpha \notin \nabla[M,N]$ فإن $Im(\alpha)$ حد مباشر في N.

البرهـــان.

$(1) \Leftarrow (2)$. ليكن $\alpha \in [M,N]$ بحيث $\alpha \notin \nabla[M,N]$، عندئذ فإن المودول الجزئي $Im(\alpha)$ ليس صغيراً في N وبحسب الفرض فإن $Im(\alpha)$ حد مباشر في N.

$(2) \Leftarrow (1)$. ليكن $\alpha \in [M,N]$ بحيث إن $Im(\alpha)$ ليس صغيراً في N، عندئذ فإن $\alpha \notin \nabla[M,N]$وحسب الفرض فإن $Im(\alpha)$ حد مباشر في N، ومنه $[M,N]$ مودول شبه محلي.

تمهيديـــة 2-2.

ليكن M,N مودولين فوق حلقة R. إذا كان المودول $[M,N]$ شبه محلي، عندئذ لأجل أي حد مباشر A للمودول N فإن المودول الجزئي $[M,A]$ هو أيضاً شبه محلي.

البرهـــان.

لنفرض أن المودول $[M,N]$ شبه محلي وليكن A حد مباشر للمودول N، عندئذ فإن $N = A \oplus B$ حيث B مودول جزئي في N. ليكن $\alpha \in [M,A]$ بحيث إن المودول الجزئي $Im(\alpha)$ ليس صغيراً في A، لما كان $Im(\alpha) \subseteq A \subseteq N$ فإن $\alpha \in [M,N]$. لنبرهن على أن المودول الجزئي $Im(\alpha)$ ليس صغيراً في N. لنفرض جدلاً أن $Im(\alpha)$ صغير في N. لما كان $Im(\alpha)$ ليس صغيراً في A فإنه يوجد في A مودول جزئي K بحيث $A = Im(\alpha) + K$ وأن $K \neq A$ ومنه فإن:

$$N = A \oplus B = (Im(\alpha) + K) \oplus B$$

ولكن وبحسب الفرض الجدلي فإن $Im(\alpha)$ صغير في N ومنه $N = K + B$

لما كان $K \subseteq A$ فإن $A \cap (K+B) = K + (A \cap B)$ومنه $A = A \cap N = K$ وهذا غير ممكن. وبالتالي فإن المودول الجزئي $Im(\alpha)$ ليس صغيراً في N وبحسب الفرض فإن $Im(\alpha)$حد مباشر في N ولما كان $Im(\alpha) \subseteq A$ نجد أن $Im(\alpha)$ حد مباشر في A. مما سبق نجد أن المودول الجزئي $[M,A]$ شبه محلي.

تمهيديـــة 2-3.

ليكن N مودولاً فوق حلقة R. إذا كان المودول N شبه محلي، عندئذ فإنه لأجل كل مودول $M \in mod-R$ يكون المودول الثنائي $[M,N]$ شبه محلي وأن:

$$.\nabla[M,N]=[M,J(N)]$$

البرهـــان.

لنفرض أن المودول N شبه محلي وليكن $M \in mod-R$ وأن $\alpha \in [M,N]$ بحيث إن المودول الجزئي $Im(\alpha)$ ليس صغيراً في N وبحسب الفرض لما كان المودول N شبه محلي فإن $Im(\alpha)$ حد مباشر في N وبالتالي فإن المودول $[M,N]$ شبه محلي.

ليكن $\gamma \in \nabla[M,N]$، عندئذ $Im(\gamma)$صغير في N ومنه $Im(\gamma) \subseteq J(N)$ وبالتالي نجد أن $\nabla[M,N] \subseteq [M,J(N)]$.

ليكن $\lambda \in [M,J(N)]$، عندئذ $Im(\lambda) \subseteq J(N)$ ولما كان المودول N شبه محلي فإن المودول الجزئي $J(N)$ صغير في Nومنه فإن المودول الجزئي $Im(\lambda)$ صغير في N وبالتالي فإن $\lambda \in \nabla[M,N]$ومنه فإن $[M,J(N)] \subseteq \nabla[M,N]$. مما سبق نجد أن $\nabla[M,N]=[M,J(N)]$.

مبرهنـــــة 2-4.

ليكن M,N مودولين فوق حلقة R وأن المودول N هو $M-$نصف إسقاطي. إذا كان المودول N شبه محلي، عندئذ يكون $J[M,N]=\nabla[M,N]=[M,J(N)]$.

البرهـــــــان.

لنفرض أن المودول N شبه محلي، عندئذ بحسب المبرهنة (2-3) فإن:

$$.\nabla[M,N]=[M,J(N)]$$

لنبرهن الآن على أن $J[M,N]=[M,J(N)]$. ليكن $\alpha \in J[M,N]$ ولنفرض جدلاً أن $\alpha \notin J[M,N]$، عندئذ $Im(\alpha) \not\subset J(N)$ بالتالي فإن المودول الجزئي $Im(\alpha)$ ليس صغيراً في N، ولما كان المودول N شبه محلي فإن $Im(\alpha)$ حد مباشر في N وبالتالي يوجد عنصر جامد مغاير للصفر $e \in E_N$ بحيث إن $Im(\alpha)=Im(e)$ ولما كان المودول N هو $M-$نصف إسقاطي نجد أن $e \in \alpha[N,M] \subseteq J(E_N)$ وهذا يبين

أن $J[M,N]\subseteq[M,J(N)]$. ليكن $\alpha\in[M,J(N)]$ ، عندئذ فإن $\alpha\in\nabla[M,N]$ ومنه فإن المودول الجزئي $Im(\alpha)$ صغير في N ، ولما كان لأجل كل $\beta\in[N,M]$ فإن $1_N=\alpha\beta+(1_N-\alpha\beta)$ نجد أن:

$$N=Im(\alpha\beta)+Im(1_N-\alpha\beta)\subseteq Im(\alpha)+Im(1_N-\alpha\beta)\subseteq N$$

وبالتالي يكون $N=Im(\alpha)+Im(1_N-\alpha\beta)$ ولما كان $Im(\alpha)$ صغيراً في N نجد أن $N=Im(1_N-\alpha\beta)$ ولما كان:

$$Im(\alpha-\alpha\beta\alpha)=Im(\alpha)\cap Im(1_N-\alpha\beta)=Im(\alpha)\cap N=Im(\alpha)$$

ولكون المودول N هو $M-$نصف إسقاطي نجد أن:

$$\alpha[N,M]=[N,Im(\alpha)]=[N,Im(\alpha-\alpha\beta\alpha)]=(\alpha-\alpha\beta\alpha)[N,M]$$

ولما كان $(\alpha-\alpha\beta\alpha)[N,M]=\alpha[N,M]\cap(1_N-\alpha\beta)E_N$ نجد أن:

$$\alpha[N,M]=\alpha[N,M]\cap(1_N-\alpha\beta)E_N$$

ومنه فإن $\alpha[N,M]\subseteq(1_N-\alpha\beta)E_N$ ولما كان:

$$E_N=\alpha[N,M]+(1_N-\alpha\beta)E_N$$

نجد أن $E_N=(1_N-\alpha\beta)E_N$ ومنه فإن $\alpha\in J[M,N]$ وهكذا نجد أن:

$$[M,J(N)]\subseteq J[M,N]$$

ومنه يكون $J[M,N]=\nabla[M,N]=[M,J(N)]$.

مبرهنـــــة 2-5.

ليكن N مودولاً $e-$قابلاً للسحب فوق حلقة R . عندئذ الشرطان الآتيان متكافئان:

1 − المودول N شبه محلي.

2 − لأجل أي مودول $M\in mod-R$ فإن المودول الثنائي $[M,N]$ شبه محلي.

البرهــــــان.

$(1)\Leftarrow(2)$. ينتج من المبرهنة (2-3).

$(2)\Leftarrow(1)$. ليكن A مودولاً جزئياً ليس صغيراً من المودول N ، عندئذ فإن $A\neq 0$ ولما كان المودول N هو $e-$قابل للسحب فإن $hom_R(N,A)\neq 0$ وبالتالي يوجد تشاكل

مودولات غامر $f : N \to A$ ومنه فإن $f \in [N,N] = E_N$ وبحسب الفرض فإن $Im(f) = A$ حد مباشر في N وهذا يبين أن المودول N شبه محلي.

مبرهنـــــة 2−6.

ليكن N مودولاً e−قابلاً للسحب نصف إسقاطي فوق حلقة R. عندئذ الشروط الآتية متكافئة:

1 − المودول N شبه محلي.

2 − لأجل أي مودول $M \in mod - R$ فإن المودول الثنائي $[M,N]$ شبه محلي.

3 − الحلقة E_N شبه محلية يمينية رئيسية وأن $\nabla E_N = J(E_N)$.

البرهـــــان.

$(1) \Leftrightarrow (2)$. ينتج من المبرهنة (2−5).

$(1) \Leftarrow (3)$. لنفرض أن المودول N شبه محلي وليكن $\alpha \in E_N$ بحيث إن المثالي اليميني αE_N ليس صغيراً في E_N، عندئذ فإن المودول الجزئي $Im(\alpha)$ ليس صغيراً في N، لأنه إذا كان $Im(\alpha)$ صغيراً في N ولما كان المودول N نصف إسقاطي يكون المثالي اليميني αE_N صغيراً في E_N وهذا يناقض الفرض. ومنه فإن $Im(\alpha)$ حد مباشر في N وبالتالي يوجد عنصر جامد مغاير للصفر $e \in E_N$ بحيث إن $Im(\alpha) = Im(e)$ ولما كان المودول N نصف إسقاطي ينتج أن:

$$\alpha E_N = hom_R(N, Im(\alpha)) = hom_R(N, Im(e)) = eE_N$$

وهذا يبين أن الحلقة E_N شبه محلية يمينية رئيسية. من جهة أخرى، لما كان المودول N شبه محلي ونصف إسقاطي فإن $\nabla E_N = J(E_N)$.

$(3) \Leftarrow (1)$. لنفرض أن الحلقة E_N شبه محلية يمينية رئيسية وأن $\nabla E_N = J(E_N)$. ليكن A مودولاً جزئياً ليس صغيراً من المودول N، عندئذ فإن $A \neq 0$ ولما كان المودول N هو e−قابلاً للسحب فإن $hom_R(N, A) \neq 0$ وبالتالي يوجد تشاكل مودولات غامر $g : N \to A$ ومنه فإن $g \in E_N$ وبحسب الفرض فإن $Im(g) = A$ مودول جزئي ليس صغيراً في N وبحسب الفرض فإن $g \notin \nabla E_N = J(E_N)$ ومنه فإن المثالي اليميني gE_N ليس صغيراً في E_N ولما كانت الحلقة E_N شبه محلية يمينية رئيسية فإنه يوجد

عنصر جامد $e \in E_N$ بحيث إن $gE_N = eE_N$ وبالتالي يوجد $\lambda, \mu \in E_N$ بحيث إن $g = e\lambda = ee\lambda = eg$ وأن $e = g\mu$ ومنه نجد أن $g = g\mu g$ وأن:

$$Im(g) = Im(g\mu g) \subseteq Im(g\mu) \subseteq Im(g)$$

وهذا يبين أن $A = Im(g) = Im(g\mu) = Im(e)$ ومنه A حد مباشر في N وبالتالي الموديول N شبه محلي.

المـــودولات شبـــه المحـليـــة المرافقـــة.

تعريــــف.

ليكن M, N مودولين فوق حلقة R. نقول عن المودول الثنائي $[M, N]$ إنه شبه محلي مرافق إذا كان لأجل كل $\alpha \in [M, N]$ بحيث $Ker(\alpha)$ ليس كبيراً في M فإن $Ker(\alpha)$ هو حد مباشر في M.

تمهيديــــة 2-7.

ليكن M, N مودولين فوق حلقة R. عندئذ الشرطان الآتيان متكافئان:

1 – المودول $[M, N]$ شبه محلي مرافق.

2 – لأجل كل $\alpha \in [M, N]$ بحيث $\alpha \notin \Delta[M, N]$ فإن $Ker(\alpha)$ حد مباشر في M.

البرهـــــان.

$(1) \Leftarrow (2)$. ليكن $\alpha \in [M, N]$ بحيث $\alpha \notin \Delta[M, N]$، عندئذ فإن المودول الجزئي $Ker(\alpha)$ ليس كبيراً في M وبحسب الفرض فإن $Ker(\alpha)$ حد مباشر في M.

$(2) \Leftarrow (1)$. ليكن $\alpha \in [M, N]$ بحيث إن $Ker(\alpha)$ ليس كبيراً في M، عندئذ فإن $\alpha \notin \Delta[M, N]$ وبحسب الفرض فإن $Ker(\alpha)$ حد مباشر في M، ومنه المودول $[M, N]$ شبه محلي مرافق.

تمهيديــــة 2-8.

ليكن M, N مودولين فوق حلقة R. إذا كان المودول $[M, N]$ شبه محلي مرافق، عندئذ لأجل أي حد مباشر A للمودول M فإن المودول الجزئي $[A, N]$ هو أيضاً شبه محلي مرافق.

البرهـــــــان.

لنفرض أن المودول $[M,N]$ شبه محلي مرافق وليكن A حداً مباشراً للمودول M، عندئذ يوجد مودول جزئي B في M بحيث $M = A\oplus B$. إذا كان $A=M$ يتم المطلوب. لنفرض أن $A\neq M$، عندئذ فإن $B\neq 0$. ليكن $\alpha\in[A,N]$ بحيث إن المودول الجزئي $Ker(\alpha)$ ليس كبيراً في A، لما كان $Ker(\alpha)\subseteq A\subseteq M$ فإن $Ker(\alpha)\cap B=0$ وأن $B\neq 0$ ومنه فإن $Ker(\alpha)$ مودول جزئي في M وليس كبيراً في M. لنفرض أن $\pi: M\to A$ التشاكل الإسقاطي الغامر، عندئذ فإن $\alpha\pi\in[M,N]$. لنبرهن الآن على أن $Ker(\alpha)=Ker(\alpha\pi)\cap A$. لدينا $Ker(\alpha)\subseteq A$، ليكن $x\in Ker(\alpha)$، عندئذ $x\in A$ وأن $\alpha(x)=0$ ومنه $\pi(x)=x$ وبالتالي $\alpha\pi(x)=\alpha(x)=0$ وهكذا فإن $x\in Ker(\alpha\pi)$ ومنه فإن $Ker(\alpha)\subseteq Ker(\alpha\pi)\cap A$.

ليكن $y\in Ker(\alpha\pi)\cap A$، عندئذ فإن $y\in A$ وأن $\pi(y)=y$ ومنه نجد أن:

$$\alpha\pi(y)=\alpha(y)=0$$

ومنه $Ker(\alpha\pi)\cap A\subseteq Ker(\alpha)$. مما سبق نجد أن $Ker(\alpha)=Ker(\alpha\pi)\cap A$.

ولما كان المودول الجزئي $Ker(\alpha)$ ليس كبيراً في A فإنه يوجد مودول جزئي مغاير للصفر K في A بحيث إن $Ker(\alpha)\cap K=0$ ومنه نجد أن:

$$Ker(\alpha)\cap K=(Ker(\alpha\pi)\cap A)\cap K=Ker(\alpha\pi)\cap(A\cap K)=$$
$$=Ker(\alpha\pi)\cap K=0$$

وهذا يبين أن المودول الجزئي $Ker(\alpha\pi)$ ليس كبيراً في M وبحسب الفرض فإن $Ker(\alpha\pi)$ حد مباشر في M وبالتالي فإن $M=Ker(\alpha\pi)\oplus D$ حيث D مودول جزئي في M. ليكن $y\in Ker(\alpha\pi)$، عندئذ $\alpha\pi(y)=0$ ومنه فإن $\pi(y)\in Ker(\alpha)$ وبالتالي فإن $y\in\pi^{-1}(Ker(\alpha))=Ker(\alpha\pi)$ وهذا يبين أن $Ker(\alpha\pi)\subseteq Ker(\alpha)$ ومنه $Ker(\alpha\pi)=Ker(\alpha)$ وهكذا نجد أن $A=Ker(\alpha)\oplus(A\cap D)$، أي إن $Ker(\alpha)$ حد مباشر في A وبالتالي المودول $[A,N]$ شبه محلي مرافق.

تمهيديـــــة 2-9.

ليكن M مودولاً فوق حلقة R. إذا كان المودول M شبه محلي مرافق، عندئذ لأجل أي مودول $N \in mod-R$ فإن المودول الثنائي $[M,N]$ شبه محلي مرافق.

البرهــــــان.

لنفرض أن المودول M شبه محلي مرافق وليكن $N \in mod-R$ و $\alpha \in [M,N]$ بحيث إن المودول الجزئي $Ker(\alpha)$ ليس كبيراً في M ولما كان المودول M شبه محلي مرافق، عندئذ فإن المودول $Ker(\alpha)$ حد مباشر في M ومنه المودول $[M,N]$ شبه محلي مرافق.

مبرهنـــــة 2-10.

ليكن M,N مودولين فوق حلقة R وأن المودول M هو $N-$نصف أفقي. إذا كان المودول M شبه محلي مرافق، عندئذ يكون $J[M,N]=\Delta[M,N]$.

البرهــــــان.

لنفرض أن المودول N شبه محلي مرافق وليكن $\alpha \in J[M,N]$. لنفرض جدلاً أن $\alpha \notin \Delta[M,N]$، عندئذ فإن المودول الجزئي $Ker(\alpha)$ ليس كبيراً في M ولما كان المودول Mشبه محلي مرافق فإنه يوجد عنصر جامد مغاير للصفر $e \in E_M$ بحيث إن:

$$Ker(\alpha)=Im(e)=Ker(1_M-e)$$

ولما كان المودول M هو $N-$نصف أفقي نجد أن:

$$[N,M]\alpha=\ell_{E_M}(Ker(\alpha))=\ell_{E_M}(Im(e))=\ell_{E_M}(e)=E_M(1-e)$$

من جهة أخرى، لما كان $\alpha \in J[M,N]$ فإن المثالي اليساري $[N,M]\alpha$ صغير في E_M ومنه فإن المثالي اليساري $E_M(1-e)$ صغير في E_M وبالتالي $E_M=E_Me$ وهذا يبين أن $e=1_M$ ومنه نجد أن $Ker(\alpha)=Im(e)=M$ ومنه فإن $\alpha=0$ وهذا غير ممكن. مما سبق نجد أن $J[M,N]\subseteq\Delta[M,N]$.

ليكن $\alpha \in \Delta[M,N]$، عندئذ فإن المودول الجزئي $Ker(\alpha)$ كبير في M. من جهة أخرى، لما كان لأجل كل $\beta \in [N,M]$ فإن $Ker(1_M-\beta\alpha)$ مودول جزئي في M

ويحقق $Ker(\alpha)\cap Ker(1_M-\beta\alpha)=0$ نجد أن $Ker(1_M-\beta\alpha)=0$ وهذا يبين أن التشاكل $1_M-\beta\alpha$ متباين. أيضاً لما كان:

$$Ker(\alpha-\alpha\beta\alpha)=Ker(\alpha)+Ker(1_M-\beta\alpha)=Ker(\alpha)$$

نجد أن $\ell_{E_M}(Ker(\alpha-\alpha\beta\alpha))=\ell_{E_M}(Ker(\alpha))$ ولما كان المودول M هو $N-$ نصف أفقي نجد أن $[N,M](\alpha-\alpha\beta\alpha)=[N,M]\alpha$ ولما كان:

$$[N,M](\alpha-\alpha\beta\alpha)=[N,M]\alpha\cap E_M(1_M-\beta\alpha)$$

نجد أن $[N,M]\alpha=[N,M]\alpha\cap E_M(1_M-\beta\alpha)$ وهذا يبين أن:

$$[N,M]\alpha\subseteq E_M(1_M-\beta\alpha)$$

ومنه فإن $E_M=[N,M]\alpha+E_M(1_M-\beta\alpha)=E_M(1_M-\beta\alpha)$ وذلك أياً كان $\beta\in[N,M]$، ومنه نجد أن $\Delta[M,N]\subseteq J[M,N]$.

مما سبق نجد أن $J[M,N]=\Delta[M,N]$.

مبرهنـــــة 2-11.

ليكن M مودولاً نصف أفقي فوق حلقة R. إذا كان M مودولاً شبه محلي مرافق، عندئذ تكون الحلقة E_M شبه محلية يسارية رئيسية وتحقق $\Delta E_M=J(E_M)$.

البرهـــــان.

لنفرض أن المودول M شبه محلي مرافق وليكن $\alpha\in E_M$ بحيث إن المثالي اليساري $E_M\alpha$ ليس صغيراً في E_M، عندئذ يكون المودول الجزئي $Ker(\alpha)$ ليس كبيراً في M، لأنه إذا كان المودول الجزئي $Ker(\alpha)$ كبيراً في M فإنه بحسب التمهيدية (1-8) يكون المثالي اليساري $\ell_{E_M}(Ker(\alpha))$صغيراً في E_M ولما كان المودول M نصف أفقي فإن $E_M\alpha=\ell_{E_M}(Ker(\alpha))$ وهذا يبين أن المثالي اليساري $E_M\alpha$ صغير في E_M وهذا يناقض الفرض. ومنه فإن $Ker(\alpha)$ حد مباشر في M وبالتالي يوجد عنصر جامد مغاير للصفر $e\in E_M$ بحيث يكون:

$$Ker(\alpha)=Im(e)=Ker(1-e)$$

ولما كان المودول M نصف أفقي نجد أن:

$$E_M\alpha=\ell_{E_M}(Ker(\alpha))=\ell_{E_M}(Ker(1-e))=E_M(1-e)$$

وهذا يبين أن الحلقة E_M شبه محلية يسارية رئيسية. ولما كان المودول M شبه محلي مرافق فإنه بحسب المبرهنة $(2-10)$ ولأجل $M = N$ نجد أن $\Delta E_M = J(E_M)$.

ليكن P مودولاً إسقاطياً فوق حلقة R وأن $S = End_R(P)$. نعلم أنه لأجل أي عنصر $\alpha \in S$ فإن المودول الجزئي $Im(\alpha)$ صغير في P عندما وفقط عندما يكون المثالي اليميني αS صغيراً في S، [7، القضية 1.1].

بناءً على ذلك سنورد التمهيدية الآتية:

تمهيديـــــة 2-12.

ليكن M مودولاً نصف إسقاطي شبه محلي مرافقاً فوق حلقة R وأن $S = End_R(M)$.
عندئذ لأجل أي عنصر $\alpha \in S$ القضيتان الآتيتان متكافئتان:

1 – المثالي اليميني αS كبير في S .

2 – المودول الجزئي $Im(\alpha)$ كبير في M .

البرهـــــــان.

$(1) \Leftarrow (2)$. لنفرض أن المثالي اليميني αS كبير في S. لنفرض جدلاً أن المودول الجزئي $Im(\alpha)$ ليس كبيراً في M، عندئذ فإن $Im(\alpha) \neq M$ ولما كان المودول M شبه محلي مرافق فإن $Im(\alpha)$ حد مباشر في M وبالتالي يوجد عنصر جامد $e \in S$ بحيث $Im(\alpha) = Im(e)$ ولما كان $Im(\alpha) \neq M$ نجد أن $e \neq 1$. ولما كان المودول M نصف إسقاطي فإن:

$$\alpha S = hom_R(M, Im(\alpha)) = hom_R(M, Im(e)) = eS$$

ولما كان المثالي اليميني αS كبيراً في S نجد أن المثالي اليميني eS كبير في S ولما كان $eS \cap (1-e)S = 0$ نجد أن $(1-e)S = 0$ ومنه فإن $e = 1$ وهذا غير ممكن. مما سبق نجد أن المودول الجزئي $Im(\alpha)$ كبير في M .

$(2) \Leftarrow (1)$. لنفرض أن المودول الجزئي $Im(\alpha)$ كبير في M وليكن K مثالياً يمينياً في S بحيث إن $\alpha S \cap K = 0$. لنفرض جدلاً أن $K \neq 0$ ، عندئذ يوجد $\beta \in K$ بحيث إن $\beta \neq 0$ ولما كان $\alpha S \cap \beta S \subseteq \alpha S \cap K = 0$ نجد أن $\alpha S \cap \beta S = 0$ ولما كان المودول M نصف إسقاطي نجد أن:

$$hom_R(M, Im(\alpha)\cap Im(\beta)) = hom_R(M, Im(\alpha))\cap hom_R(M, Im(\beta)) =$$
$$= \alpha S \cap \beta S = 0$$

وهذا يبين أن $Im(\alpha)\cap Im(\beta)=0$ ولما كان المودول الجزئي $Im(\alpha)$ كبيراً في M نجد أن $Im(\beta)=0$ ومنه فإن $\beta=0$ وهذا غير ممكن. مما سبق نجد أن $K=0$، أي إن المثالي اليميني αS كبير في S.

ليكن Q مودولاً أفقياً فوق حلقة R وأن $S=End_R(Q)$. نعلم أنه لأجل أي عنصر $\alpha\in S$ فإن المودول الجزئي $Ker(\alpha)$ كبير في Q عندما وفقط عندما يكون المثالي اليساري $S\alpha$ صغيراً في S، [6، القضية 1].

تمهيديـــــة 2-13.

ليكن M مودولاً نصف أفقياً شبه محلي فوق حلقة R وأن $S=End_R(M)$. عندئذ لأجل أي عنصر $\alpha\in S$ القضيتان الآتيتان متكافئتان:

1 – المثالي اليساري $S\alpha$ كبير في S.

2 – المودول الجزئي $Ker(\alpha)$ صغير في M.

البرهـــــان.

$(1)\Leftarrow(2)$. لنفرض أن المثالي اليساري $S\alpha$ كبير في S. لنفرض جدلاً أن المودول الجزئي $Ker(\alpha)$ ليس صغيراً في M، عندئذ فإن $Ker(\alpha)\neq 0$، أي إن $\alpha\neq 1$ ولما كان المودول M شبه محلي فإن $Ker(\alpha)$ حد مباشر في M وبالتالي يوجد عنصر جامد $e\in S$ بحيث إن:

$$Ker(\alpha)=Im(e)=Ker(1-e)$$

ولما كان $\alpha\neq 1$ فإن $e\neq 1$. ولما كان المودول M نصف أفقي نجد أن:

$$S\alpha=\ell_S\{Ker(\alpha))=\ell_S\{Ker(1-e))=S(1-e)$$

ولما كان المثالي اليساري $S\alpha$ كبيراً في S نجد أن المثالي اليساري $S(1-e)$ كبير في S. ولما كان $Se\cap S(1-e)=0$ نجد أن $Se=0$ ومنه نجد أن $e=0$، أي إن:

$$Ker(\alpha)=Im(e)=0$$

وهذا غير ممكن. مما سبق نجد أن المودول الجزئي $Ker(\alpha)$ صغير في M.

$(2)\Leftarrow(1)$. لنفرض أن المودول الجزئي $Ker(\alpha)$ صغير في M ولنفرض جدلاً أن المثالي اليساري $S\alpha$ ليس كبيراً في S، عندئذ يوجد مثالي يساري $K\neq 0$ في S يحقق أن $S\alpha\cap K=0$ وبالتالي يوجد $\beta\in K$ بحيث إن $\beta\neq 0$ ولما كان:

$$S\alpha\cap S\beta\subseteq S\alpha\cap K=0$$

نجد أن $S\alpha\cap S\beta=0$ ولما كان المودول M نصف أفقي وبحسب التمهيدية $(11-4-1)$ نجد أن:

$$S\alpha\cap S\beta=\ell_S(Ker(\alpha))\cap\ell_S(Ker(\beta))=$$
$$=\ell_S(Ker(\alpha)+Ker(\beta))=0$$

وهذا يبين أن $Ker(\alpha)+Ker(\beta)=M$ ولما كان المودول الجزئي $Ker(\alpha)$ صغير في M نجد أن $Ker(\beta)=M$ ومنه فإن $\beta=0$ وهذا غير ممكن. مما سبق نجد أن $K=0$، أي إن المثالي اليساري $S\alpha$ كبير في S. ◊

المـراجــع العــلميــــة.

[1] – Anderson, F. W, & Fuller, K. R., " Rings and Categories of Modules ", New York. Springer (1973).

[2] – Amini, B., & Ershad, M. Sharif, H. " Co-retractable Modules", J. Aust. Math. Soc., 86,. (2009), 289 – 304.

[3] – Haghany, A., and Vedadi, M.R., "Study of semi-projective retractable modules", Algebra Colloq., (3) 14 (2007), 489-496.

[4] – Hakmi Hamza., " Semi $M-$projective and semi $N-$injective modules", Kyungpook Math. J., Vol. 56, (2016), pp. 83 – 94.

[5] – Kasch, F., " Modules and Rings ", London Math. Soc. Mono. 1982.

[6] – Lambek, J.,"Lectures on Rings and Modules", Blaisdell, Mass. 1966.

[7] Ware, R., " Endomorphism Rings of Projective Modules ", Trans. Amer. Math. Soc. 155, p. 233 – 256. (1971).